



*Universidade Federal de Juiz de Fora
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Física*



Teoria de Medidas

Erros e Gráficos

Prof. Carlos R. A. Lima

Primeira Edição - Março de 2004

ÍNDICE

APÊNDICE A - PRINCÍPIOS BÁSICOS DA ESTATÍSTICA	03
A.1- Introdução	03
A.2- Apresentação de resultados	03
A.3- Análise das médias	04
A.3.1- A mediana	05
A.3.2- O modo	05
A.3.3- A média harmônica	05
A.3.4- A média geométrica	05
A.3.5- A média aritmética	06
A.4- Análise da dispersão	06
A.4.1- O desvio médio	06
A.4.2 - O desvio padrão	06
A.5- Curvas teóricas de distribuição estatística	07
APÊNDICE B - A DISTRIBUIÇÃO NORMAL OU GAUSSIANA	09
B.1- Introdução	09
B.2- A dispersão e a distribuição normal	10
B.3- Intervalos de Confiança	12
APÊNDICE C - DISTRIBUIÇÃO ESTATÍSTICA DE STUDENT	14
APÊNDICE D - MEDIDAS E ERROS	17
D1 - Grandezas Físicas e Padrões de Medida	17
D2- Classificação dos Erros	18
D3- Algarismos Significativos	18
D4- Propagação de Erros	20
APÊNDICE E - CONSTRUÇÃO DE ESCALAS E GRÁFICOS	23
E.1- Introdução	23
E.1- Escala Linear	23
E.2- Escala Logarítmica	24
E.3- Papeis mono- log e log – log	25
E.4- Gráficos	27
E.4.1- Introdução	27
E.4.2- Gráficos de Funções Lineares	27
E.4.2.1- Método Gráfico	27
E.4.2.2- Método dos Mínimos Quadrados	29
E.4.3- Gráficos de Funções Não- Lineares	31
E.4.3.1- Funções Polinomiais	32
E.4.3.2- Funções Exponenciais	33
REFERÊNCIAS	34

APÊNDICE A - PRINCÍPIOS BÁSICOS DA ESTATÍSTICA

A.1- Introdução

Um pesquisador social procura obter conclusões sobre um grande número de sujeitos. Por exemplo, os 170000000 de indivíduos que compõem a população Brasileira, os 400000 habitantes da cidade de Juiz de Fora, ou os 8000 estudantes da Universidade Federal de Juiz de Fora. Cada um desses grupos, investigados pelo pesquisador social, é denominado tecnicamente de **população** ou **universo**. A população consiste de um conjunto de dados com alguma característica comum, seja ela, nacionalidade, cidadania ou matrícula na Universidade Federal de Juiz de Fora. Como, em geral, a população é composta de um número muito grande de indivíduos, dados ou observações, o pesquisador social raramente analisa esse grupo. Em lugar disso, é analisado somente uma **amostra**, que constitui-se de um número menor de dados retirados da população. O pesquisador procura tirar conclusões de sua amostra e estende-las para toda a população. O processo de amostragem faz parte do dia-a-dia de todas as pessoas. Por qual outro processo seria possível obter informações sobre alguma medida, se não amostrando-se aquelas que se é capaz? Por exemplo, pode-se concluir que vale a pena investir na bolsa de valores depois de saber que algumas pessoas ganharam dinheiro com essas aplicações. Os métodos de amostragem utilizados por um pesquisador são, em geral, mais elaborados e sistemáticos do que aqueles que se poderiam utilizar no dia-a-dia. Sistemáticamente, o pesquisador procura obter uma amostra mais representativa possível de toda a população. Se todos os dados puderem participar da amostra, diz-se que o método utilizado é o de **amostragem aleatória** e, se este não for o caso, diz-se que o método é o de **amostragem não aleatória**.

Propõe-se aqui fazer uma breve discussão sobre as técnicas disponíveis para o tratamento estatístico de medidas, erros e disposições gráficas em processos de observações experimentais. Existem duas propriedades estatísticas básicas associadas a um conjunto de dados de uma amostra: Tendência da maioria dos dados manter-se em torno de um valor central e tendência destes dispersar em torno desse valor central. A dispersão de dados em torno de um valor central pode referir-se a uma medida **precisa** ou **exata**. A **precisão** refere-se a uma aproximação de um grupo de medidas de um valor que não é, necessariamente, o valor verdadeiro e, **exatidão** refere-se a uma aproximação de um grupo de medidas do valor verdadeiro. A diferença entre precisão e exatidão pode ser melhor compreendida observando-se a Fig. A.1.

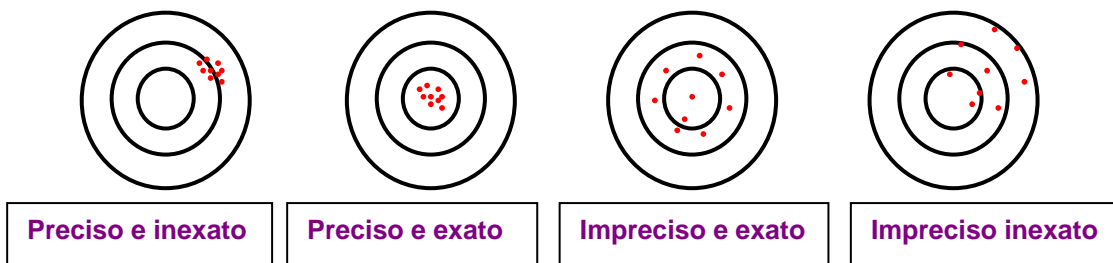


Fig. A.1- Possíveis pontos atingidos em um alvo ilustrando a diferença entre precisão e exatidão

O aspecto importante que se deve enfatizar aqui é que se pode ter uma amostra de grande precisão mas não necessariamente de grande exatidão. Essa condição peculiar pode ocorrer, por exemplo, quando um bom experimentador utiliza instrumentos que estejam descalibrados.

A.2- Apresentação de resultados

É possível perceber que amostras retiradas de uma determinada população devem seguir uma determinada distribuição. Seja, por exemplo, uma amostra contendo um conjunto de dados representados pelas idades de 32 pessoas de uma determinada cidade, organizadas em ordem crescente de magnitude como mostra a Tab. A.1(a). Nota-se que algumas pessoas podem ter a mesma idade e o que se busca é a média de idades que compõe essa amostra. Pode-se construir uma distribuição de freqüência com os dados dessa amostra separando-os em sete diferentes subgrupos. As freqüências de dados em cada subgrupo podem ser distribuídas como mostra a Tab. A.1(b).

32	51	64	76
37	53	64	77
41	55	68	78
43	57	69	82
43	57	69	88
48	60	71	88
50	61	75	91
51	63	75	94

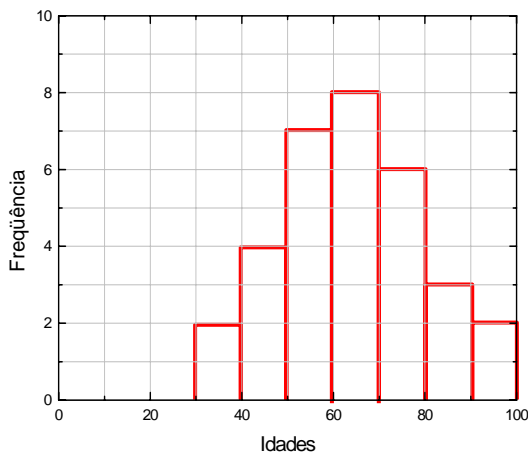
(a)

Subgrupos	Frequência	Total
30-39	II	2
40-49	IIII	4
50-59	IIIIII	7
60-69	IIIIIIII	8
70-79	IIIIII	6
80-89	III	3
90-100	II	2

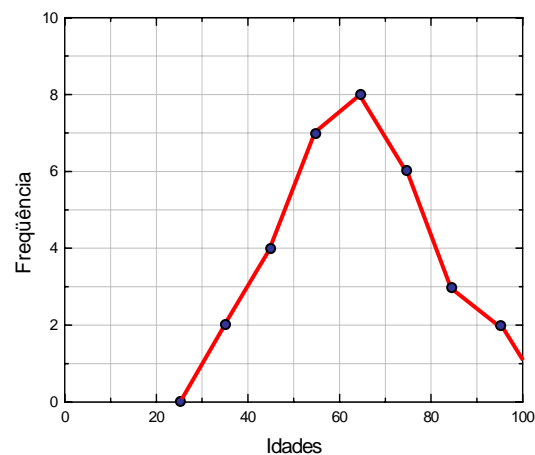
(b)

Tab. A.1- (a) Tabela de idades das pessoas consultadas, e (b) Distribuição de frequências de idades em sete subgrupos.

A vantagem da distribuição de frequência sobre a tabela de dados é na exposição de uma tendência clara a um certo valor central. Essa tendência pode ser melhor apresentada numa forma gráfica denominada de **histograma** como mostra a Fig. A.2 (a). As informações apresentadas no histograma, juntamente com a tabela de distribuição de frequências, podem ser transcritas numa outra forma gráfica denominada de **polígono de frequências** como mostra a Fig. A.2 (b). Em ambos os gráficos nota-se claramente uma tendência central para determinados valores da tabela de dados.



(a)



(b)

Fig. A.2- (a) Histograma das idades das pessoas e, (b) Polígono de frequências.

Os dados podem ser ainda plotados na forma de um diagrama de **frequências relativas**. Nesse caso, as frequências que aparecem nas abscissas do histograma, ou no polígono de frequências, devem ser divididos pelo número total de dados, que no caso é 32. A escala vertical passa a ser a ocorrência relativa, ou percentual do total.

A.3- Análise das médias

Existem várias formas de se escrever um valor médio de um grupo de dados que compõe uma amostra, sendo que, as mais importantes ^[01] são: **A mediana, o modo, a média harmônica, a média geométrica e a média aritmética**. A intenção, de qualquer uma dessas definições, é gerar um valor representativo associado a todos os dados de uma determinada amostra.

A.3.1- A mediana, é um valor central entre os dados que compõe a amostra. Metade dos dados está acima desse valor e a outra abaixo, não sendo necessariamente, o meio caminho entre o maior e o menor valor. Seja, por exemplo, os salários anuais em dólares, de cinco professores de uma determinada Universidade Brasileira, mostrados na Tab. A.2.

Professor	1	2	3	4	5
Salário (US\$)	10000,00	11000,00	12000,00	12500,00	25000,00

Tab. A.2- Salários anuais de professores de uma determinada Universidade Brasileira.

O salário médio, obtido somando-se os salários e dividindo-se por cinco, é US\$ 14100,00. Essa não é uma boa estimativa para o salário médio dos professores, por estar muito distante da maioria dos valores que compõe a amostra. A mediana, dada por US\$ 12000,00, é um valor mais representativo desses salários.

A.3.2- O modo, está associado ao valor mais freqüente dos dados que compõe a amostra. O valor do modo deve ser obtido da média entre os dados do intervalo que definem o pico do histograma.

A.3.3- A média harmônica, é utilizada freqüentemente para se fazer estimativas de valores típicos de taxas de variação. Essas estimativas são representativas quando seguem a seguinte relação:

$$\bar{x}_H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n (1/x_i)} \quad (A.1)$$

onde x_i são os valores de cada um dos dados da amostra e n é o número total desses dados.

A.3.4- A média geométrica, é utilizada para medidas que crescem como uma progressão geométrica, ou crescem proporcionalmente a um determinado valor. Essas estimativas são representativas quando seguem a seguinte equação:

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \quad (A.2)$$

Seja, por exemplo, o crescimento anual da população de uma pequena cidade do interior do Estado de Minas Gerais, como mostra a Tab. A.3.

ano	população	crescimento	Taxa de crescimento em relação ao ano anterior
1998	29894		
1999	31422	1528	1,0511
2000	32527	1105	1,0352
2001	33349	822	1,0253
2002	34681	1332	1,0399

Tab.A.3- Dados de crescimento populacional de uma pequena cidade do interior do Estado de Minas Gerais.

De acordo com a eq. (A.2), a taxa média de crescimento da pequena cidade, será

$$\bar{x}_G = \sqrt[4]{1,0511 \times 1,0352 \times 1,0253 \times 1,0399} = \sqrt[4]{1,1601} = 1,0378$$

ou, 3,78% , que é um valor representativo para o crescimento populacional anual dessa pequena cidade.

A.3.5- A média aritmética, é a mais utilizada para a determinação de valores médios e, é obtida simplesmente da razão entre a soma dos valores e o número total n de todos os dados de uma amostra, isto é

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (\text{A.3})$$

Sempre que o número de dados da amostra tiver um tamanho relativamente grande, a utilização da média aritmética será mais indicada para obtenção de médias representativas.

A.4- Análise da dispersão

O grau de confiabilidade, ou precisão, de uma amostra, pode ser estimado utilizando-se a definição de dispersão. A dispersão é uma medida das flutuações de todos os dados de uma amostra em torno do valor médio. As formas mais importantes de se representar a dispersão de uma amostra são feitas por meio das definições de **desvio médio** e **desvio padrão** ^[01].

A.4.1- O desvio médio δx , é a média aritmética dos desvios de cada dado da amostra em torno do valor médio, isto é

$$\delta x = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n} \quad (\text{A.4})$$

É importante que o valor absoluto $|x_i - \bar{x}|$ seja utilizado, pois, se assim não fosse, teria-se

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})}{n} = \frac{\sum x_i - \sum \bar{x}}{n} = \frac{\sum x_i}{n} - \frac{n\bar{x}}{n} = \bar{x} - \bar{x} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Por se pouco representativo das verdadeiras flutuações que, em geral, ocorrem nas amostras típicas, o desvio médio é raramente utilizado para a estimativa de um resultado estatístico.

A.4.2 - O desvio padrão δx^* , é a raiz média quadrática, ou RMS (*Root Mean Square*), das flutuações de cada dado da amostra em relação ao valor médio, isto é

$$\delta x^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad (\text{A.6})$$

O desvio padrão tem uma melhor representatividade das verdadeiras flutuações que, em geral, ocorrem nas amostras típicas e, por causa disso, é mais freqüentemente utilizado em cálculos estatísticos.

É importante notar, que

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \frac{2\bar{x}\sum x_i}{n} + \frac{\sum \bar{x}^2}{n} = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

uma vez que, $\sum \bar{x}^2 = n\bar{x}^2$ e $\frac{\sum x_i}{n} = \bar{x}$. Assim, a eq. (A.6) pode ser rescrita, como

$$\delta x^* = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \frac{1}{n} \sqrt{n \sum x_i^2 - n^2 \bar{x}^2} = \frac{1}{n} \sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (\text{A.7})$$

uma vez que, $\bar{x}^2 = \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2$.

A.5- Curvas teóricas de distribuição estatística

No vocabulário básico da estatística, inclui-se o termo população pai, para representar todas as medidas possíveis de uma determinada grandeza G. É notável, na Fig. A.3, que o número N de subgrupos de um histograma cresce proporcionalmente ao número n de dados de uma amostra.

Como nesse processo os limites inferior e superior dos dados da amostra não devem ser alterados significativamente, os intervalos dos subgrupos devem se estreitar progressivamente tendendo a zero, quando o número de dados tende ao infinito ($n \rightarrow \infty$). Nessas condições extremas, o histograma transforma-se numa curva suave de uma função de distribuição teórica como mostra a última seqüência da Fig. A.3.

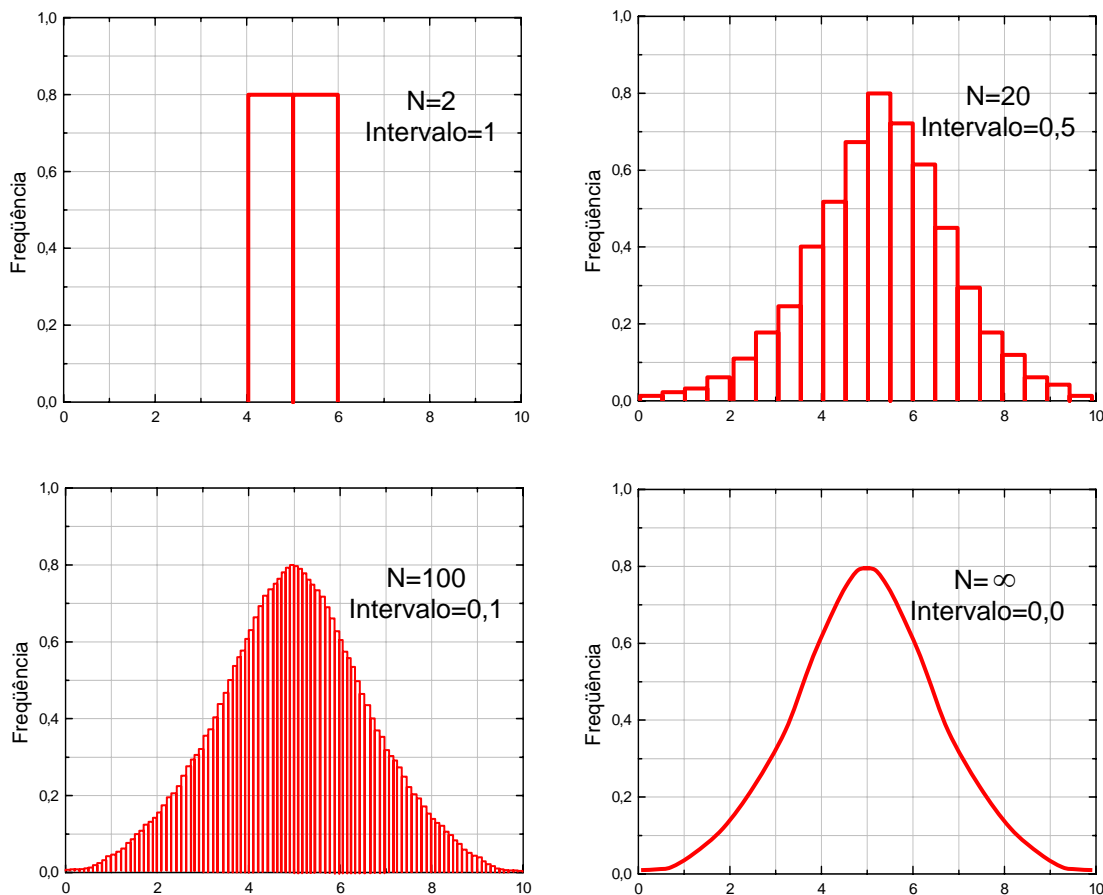


Fig. A.3- Efeito do aumento do número de dados de uma amostra sobre a morfologia do histograma correspondente.

A função de distribuição teórica tem a vantagem de poder ser tratada analiticamente. Essa função identifica a população de todos os dados possíveis (mas não os valores verdadeiros) e, a partir do conhecimento de suas propriedades, obtém-se informações sobre a credibilidade de todo o processo de medida. Na verdade, uma amostra finita, associada a uma determinada população é, em geral, suficiente para se chegar as propriedades da função de distribuição correspondente.

Não existem muitas funções matemáticas que se comportam morfologicamente como a função de distribuição mostrada na última seqüência da Fig. A.3. Dentre as poucas funções consideráveis, podem ser destacadas as distribuições, Binomial, Poisson e Gaussiana ou normal ^[01].

A **distribuição Binomial**, é utilizada em situações em que se disponha somente de eventos binários. Por exemplo, determinação do número de moedas que dão cara ou coroa, quando algumas delas são jogadas para cima um certo número de vezes.

A **distribuição de Poisson**, é utilizada em situações em que os eventos são independentes e que cada um deles não influencia os outros. Por exemplo, determinação do número de automóveis que passam por um determinado ponto de uma avenida por unidade de tempo em diferentes momentos do dia.

A **distribuição Gaussiana ou Normal**, é a distribuição que inspirou os resultados de dispersão discutidos na seção 1.4, válidos para sistemas genéricos de uma única população e que, por isso, vale a pena considera-la com mais detalhes, como se faz no Apêndice B.

APÊNDICE B - A DISTRIBUIÇÃO NORMAL OU GAUSSIANA

B.1- Introdução

A distribuição normal ou Gaussiana, é uma representação matemática utilizada para sistemas genéricos de uma única população. A expressão geral para essa distribuição^[01], é

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = y_{\text{máx}} e^{-z^2/2} \quad (\text{B.1})$$

onde, $y_{\text{máx}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, $z = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$, y é a frequência relativa da variável de medida x , μ é o valor médio de x para a população e σ é o desvio padrão de x , também para a população. O desvio padrão σ dá uma estimativa das flutuações ou erros aleatórios de x em torno do valor médio μ . Como μ e σ se referem a um número infinito de dados (população), seus valores não são necessariamente, os mesmos que \bar{x} e δx^* , uma vez que estes se referem a um número finito de dados analisados (amostra).

O valor de σ tem uma correlação direta com a precisão do instrumento utilizado no processo de medida. A Fig. B.1, mostra as formas da distribuição normal como função das variáveis x e z respectivamente. Note na Fig. B.1 (a), que a função de distribuição normal determina valores únicos para os parâmetros μ e σ , embora estes não sejam suficientes para determinar a morfologia dessa função. Na Fig. B.1 (b) mostra-se algumas frações percentuais da área total abaixo da curva definida pela distribuição normal.

Vale a pena relatar que, quando a distribuição normal foi criada em 1773, ela era conhecida como a **lei dos erros** por causa da sua utilização na representação de erros em observações astronômicas e de outras ciências naturais.

A Tab. B.1 mostra a percentagem da área total abaixo da curva normal para diferentes valores de z , positivos ou negativos, a partir da origem ($z = 0$).

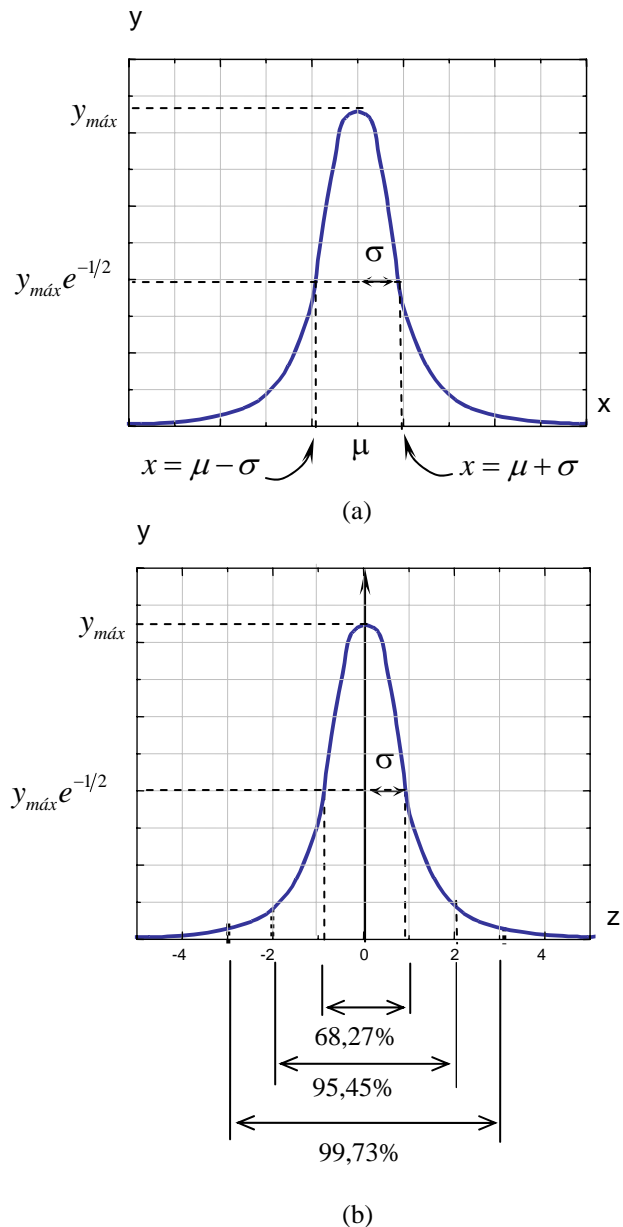


Fig. B.1- Morfologia da distribuição normal ou Gaussiana.

z	0,0	±0,5	±1,0	±1,5	±2,0	±2,5	±3,0	±3,5
Fração Percentual de Área	0,00%	19,15%	34,13%	43,32%	47,72%	49,38%	49,86%	49,98%

Tab. B.1- Percentagem da área total abaixo da curva normal para diferentes valores $+z$ ou $-z$ a partir da origem $z = 0$.

A utilização da Tab. B.1 pode ser ilustrado com um exemplo de uma população normal de média $\mu = 150 \text{ unid.}$ e desvio padrão $\sigma = 10 \text{ unid.}$. Para se determinar a proporção de observações entre $x_1 = 135 \text{ unid.}$ e $x_2 = 175 \text{ unid.}$, obtém-se primeiro, os valores correspondentes da variável z , como

$$z_1 = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{135 - 150}{10} = -\frac{15}{10} = -1,5$$

e

$$z_2 = \frac{175 - 150}{10} = \frac{25}{10} = 2,5$$

De acordo com a Tab. B.1, entre $z = -1,5$ e $z = 0$, tem-se uma fração percentual da área total abaixo da curva normal de 43,32% e, entre $z = 0$ e $z = +2,5$, tem-se uma fração de 49,38% dessa mesma área. Assim, a fração total no intervalo entre $z = -1,5$ e $z = +2,5$ é $43,32\% + 49,38\% = 92,70\%$. Em outras palavras, 92,70% da área da distribuição normal cai dentro do intervalo entre $x = 135 \text{ unid.}$ e 175 unid. .

B.2- A dispersão e a distribuição normal

A análise das propriedades de uma população requer, como se sabe, estimativas de μ e σ . É razoável assumir que as melhores estimativas para esses parâmetros são o valor médio \bar{x} e o desvio médio δx^* , dados pelas eqs. A.3 e A.6 respectivamente. De fato, \bar{x} é a melhor estimativa para μ , no entanto, δx^* não é a melhor estimativa para σ . Na verdade, a melhor estimativa de σ , é

$$\Delta x^* = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \delta x^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (\text{B.2})$$

A quantidade $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ é denominado de fator de correção de Bessel que pode ser obtido comparando-se valores observados x_i com o valor médio μ para a população [02].

Uma justificativa da representatividade da correção de Bessel para a população, pode ser verificada quando se utiliza uma amostra composta apenas por uma única medida, por exemplo, $x_1 = 5,0 \text{ unid.}$. Nesse caso, o valor médio é $\bar{x} = 5,0 \text{ unid.}$ e o desvio padrão δx^* , é

$$\delta x^* = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2}{1}} = \sqrt{\frac{(5,0 - 5,0)^2}{1}} = 0$$

isto é, o desvio é nulo. Isso é correto para a amostra, entretanto incorreto para a população. Por outro lado,

$$\Delta x^* = \sqrt{\frac{1}{1-1}} \delta x^* = \frac{0}{0}$$

isto é, o desvio é indeterminado. Isso é correto para a população pois, matematicamente, isso quer dizer que não se tem nenhuma informação sobre o desvio da população quando se tem uma amostra de apenas um único dado.

Uma escolha de δx^* ou Δx^* para análise da dispersão é indiferente para valores grandes de n , uma vez que, de acordo com a eq. (B.2), $\delta x^* \approx \Delta x^*$ para esses casos.

Sabe-se que, para qualquer procedimento de medida para uma determinada entidade, o valor médio \bar{x} para a amostra é diferente do valor médio μ para a população. Na verdade, isso não se refere a erro aleatório, mas sim reflete à presença das flutuações estatísticas inerentes a uma amostra com o número limitado de dados. As flutuações das medidas em torno do valor médio μ para a população, tem melhor representatividade quando se utiliza o conceito de **distribuição de amostragens** ou **média de amostras**.

Como ilustra a Fig. B.2, a distribuição de amostragens pode ser construída a partir dos valores médios $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots$ obtidos de um conjunto finito de amostras com n observações cada uma, retiradas da população, conhecida aqui como **população pai**.

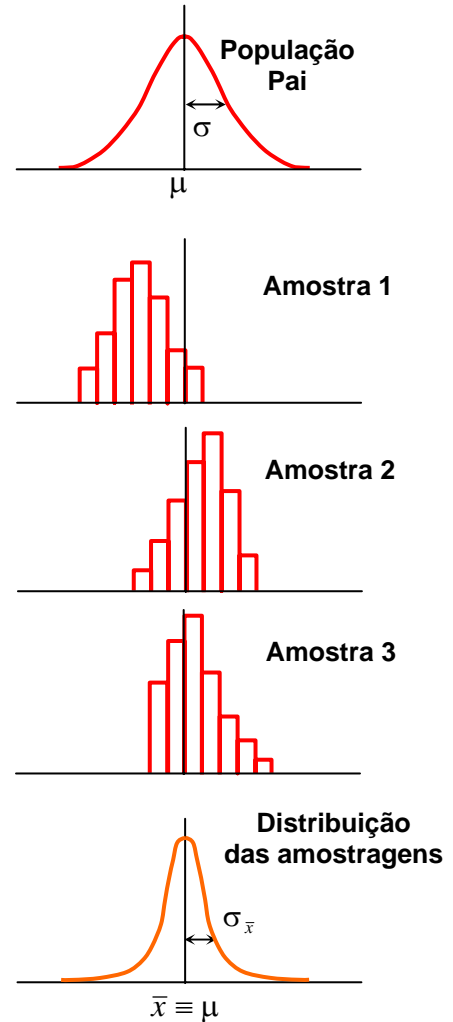


Fig. B.2- Ilustração da construção de uma distribuição de amostragens

Essas médias, denominada de **amostra estatística**, devem ter uma flutuação em torno de uma média $\bar{x} \equiv \mu$. De acordo com a teoria estatística, tal flutuação, conhecida como **erro padrão** $\sigma_{\bar{x}}$, é obtida em termos do desvio σ associado à população, por

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{B.3}$$

O conceito de distribuição de amostragens é correto para grande ou pequenas amostras, desde que a população pai seja do tipo Gaussiana.

O erro padrão $\sigma_{\bar{x}}$ de uma distribuição de amostragens pode ser utilizado para se encontrar o número de observações necessárias para gerar uma média com determinado grau de confiança.

O gráfico da Fig. B.3 mostra o comportamento do erro padrão $\sigma_{\bar{x}}$ de uma distribuição de amostragens em função do tamanho n das amostras de acordo com a eq. (B.3).

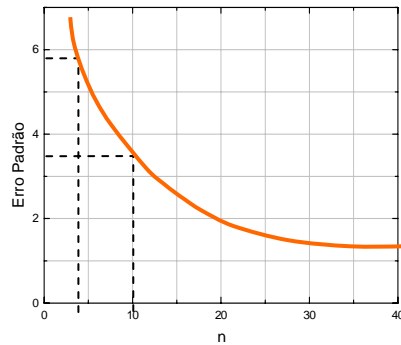


Fig. B.3- Comportamento do erro padrão $\sigma_{\bar{x}}$ como função do tamanho n de cada amostra.

Nota-se que o erro padrão cai lentamente com o aumento de n . Assim, aumentar o valor de n não é uma forma apropriada de melhorar o grau de confiança de um resultado experimental. Para se alcançar esse objetivo, é mais conveniente optar pelo uso de instrumentos de maior precisão.

No processo de execução de um grande número de medidas com um determinado instrumento, observações repetidas podem ocorrer com maior frequência. Nesse caso, os erros aleatórios serão menores do que a escala mais fina de leitura do instrumento de medida. A repetição de uma medida é uma consequência da limitação da precisão do instrumento de medida, associada a sua sensibilidade.

B.3- Intervalos de Confiança

A credibilidade de um determinado processo de medida está vinculada a um denominado **intervalo de confiança** que pode ser estimado por técnicas padrões de estatística^[01]. Um intervalo de confiança, para uma determinada amostra estatística, pode ser estimado calculando-se a probabilidade de que, um certo intervalo $\bar{x} \pm \Delta x$ sobre a média \bar{x} da amostra, inclua a média μ da população, como ilustra a Fig. B.4.

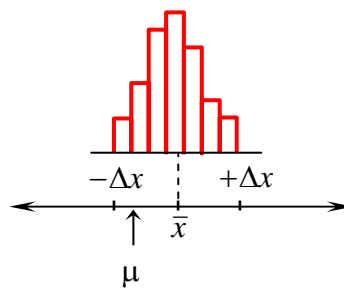


Fig. B.4- Ilustração do conceito de intervalo de confiança.

O parâmetro Δx , presente no intervalo de confiança $\bar{x} \pm \Delta x$, é denominado de limite de confiança. Deve-se reconhecer que o intervalo de confiança está diretamente associado à precisão de um instrumento de medida. No entanto, não existe, necessariamente, uma relação entre o intervalo de confiança e a exatidão do processo de medida.

Na seção anterior, viu-se que as médias \bar{x}_i de amostras, são distribuídos normalmente e que, essa distribuição de amostragens tem um valor médio igual a média μ da população e um erro padrão igual a

$\sigma_{\bar{x}} = \sigma/\sqrt{n}$. Para uma medida particular, não se sabe os valores dos parâmetros μ e σ . O que se procura, na verdade, é encontrar uma estimativa das magnitudes desses parâmetros a partir de informações extraídas de uma distribuição de amostragens. Como a distribuição de amostragens tem uma morfologia Gaussiana, como na Fig. B.1(b), pode-se afirmar que a média μ para a população tem uma probabilidade de 99,73% de estar dentro do intervalo de confiança $\bar{x} \pm 3\sigma_{\bar{x}} = \bar{x} \pm 3\sigma/\sqrt{n}$. Em geral, o parâmetro Δx pode ser calculado, por

$$\Delta x = z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (\text{B.4})$$

onde z pode ser obtido de tabelas construídas a partir de forma padrão da distribuição normal para diferentes níveis de probabilidade ou, **níveis de confiança** como são conhecidos. Utiliza-se também o termo **níveis de significância**, para a diferença percentual entre 100% e o nível de confiança. A Tab. B.2 mostra alguns valores típicos de z juntamente com os respectivos **níveis de confiança e significância**.

z	3,30	3,00	2,00	1,96	1,65	1,00
Nível de Confiança (%)	99,90	99,73	95,45	95,00	90,00	68,27
Nível de Significância(%)	0,10	0,27	4,55	5,00	10,00	31,73

Tab. B.2- Valores típicos de z juntamente com os respectivos níveis de confiança e significância.

Para se perceber o efeito do nível de confiança, ou significância, considere o exemplo de uma amostra que representa um conjunto de medidas, com as seguintes características:

$$n = 36 ; \bar{x} = 345 \text{ unid.} ; e \sigma = 12 \text{ unid.}$$

Nesse caso, o erro padrão da distribuição de amostragens é $\sigma_{\bar{x}} = 12/\sqrt{36} = 2 \text{ unid.}$, e, de acordo com a Tab. B.2 e a eq. (B.4), pode-se construir a Tab. B.3.

Nível de Confiança	Nível de Significância	Grandeza G
68,27%	31,73%	345 ± 2 unid.
95,45%	4,55%	345 ± 4 unid.
99,73%	0,27%	345 ± 6 unid.

Tab. B.3- Níveis de confiança e significância para uma amostra com $n = 36 ; \bar{x} = 345 \text{ unid.} ; e \sigma = 12 \text{ unid.}$.

A eq. (B.4) pode ser utilizada para estimar o tamanho n necessário de uma amostra para gerar uma média \bar{x} de credibilidade especificada. Por exemplo, suponha que se deseja estabelecer um intervalo de confiança $\Delta x = 5 \text{ unid.}$, de cada lado em torno da média \bar{x} , com nível de significância de 5% para a média μ da população, quando se utiliza um instrumento de precisão correspondente a $\sigma = 12 \text{ unid.}$ Para se obter o tamanho n da amostra necessário para que isso ocorra, deve-se notar da Tab. B.2 que, $z = 1,96$ para o nível de significância de 5%. Assim, da eq. (B.4), tem-se

$$5 = 1,96 \frac{12}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 4,7 \Rightarrow n = 22$$

Em outras palavras, para uma amostra contendo, pelo menos, 22 unidades tem-se 95% de chance de que a média μ da população caia dentro de um intervalo de 5 unidades de cada um dos lados, em torno da média \bar{x} , da referida amostra.

APÊNDICE C - DISTRIBUIÇÃO ESTATÍSTICA DE STUDENT

Quando se dispõe de uma amostra com um número pequeno de componentes ($n \leq 10$), o desvio padrão δx^* deixa de ser uma estimativa segura para o desvio padrão σ da população. O problema de pequenas amostras foi tratado, no início do século XX, por um químico irlandês que assinava com o nome de “**Student**”. Em vez de calcular o erro padrão da distribuição de amostragens das médias \bar{x} das amostras por σ/\sqrt{n} e, então, utilizá-lo para estimar o intervalo de confiança por meio do parâmetro $\Delta x = z \sigma/\sqrt{n}$, Student sugere que no seu lugar ^[01], utilize-se

$$\Delta x = t \frac{\Delta x^*}{\sqrt{n}} = t \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (C.1)$$

onde t representa um fator que corrige as distorções promovidas pelas amostras de poucas medidas. Se essas amostras são obtidas de uma população de distribuição normal, cujo valor médio é μ , o fator t deve ser tal que μ caia, pelo menos, nos extremos do intervalo $\bar{x} \pm \Delta x$, como ilustra a Fig. C.1(a).

Segundo essa Figura, tal condição fica satisfeita quando $\Delta x = |\mu - \bar{x}|$ que, substituída na eq. (C.1), fornece

$$t = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\Delta x^*} \sqrt{n} \quad (C.2)$$

De acordo com Student, a distribuição de amostragens de fator estatístico t é dada ^[01], por

$$f(t) = Y_0 \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2} = Y_0 \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-(v+1)/2} \quad (C.3)$$

onde Y_0 é uma constante que tem uma dependência com n de modo que a área abaixo da curva $f(t) \times t$ seja unitária, e $v = n - 1$ é denominado **grau de liberdade** da distribuição estatística. A Fig. C.1(b) mostra o perfil da distribuição de Student, ou **distribuição t** como também é chamada, para vários valores de v . Nota-se que a distribuição t de Student aproxima-se da distribuição normal, isto é da função parametrizada por z , a medida que v aumenta.

Seja o exemplo de medidas de uma certa entidade com as seguintes características: $n = 26$; $\bar{x} = 345 \text{ unid.}$; e $\Delta x^* = 15 \text{ unid.}$ Para um nível de confiança de 90%, de acordo com a Tab. C.1, $t = 1,71$ para $v = n - 1 = 25$, assim

$$\Delta x = \frac{1,71 \times 15}{\sqrt{26}} = 5,03 \text{ unid.}$$

Com esse exemplo, pode-se dizer que existe uma probabilidade de 90% de que a média μ da população associada a entidade caia dentro do intervalo $345 \pm 5,03 \text{ unid.}$

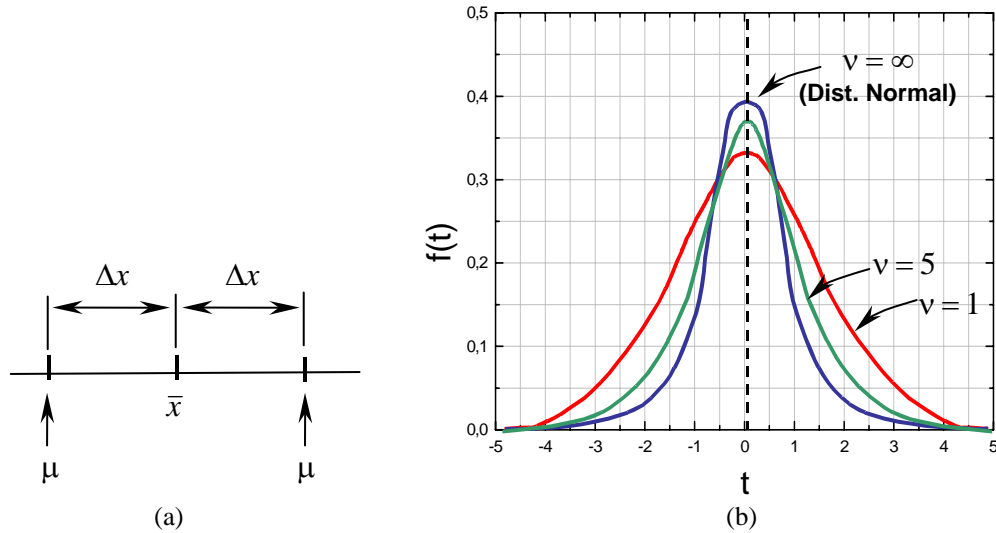


Fig. C.1- (a) Condição limiar para determinação do fator t e, (b) Distribuições t para vários valores de v .

A Tab. C.1 mostra valores de t para diferentes valores de graus de liberdade v e de níveis de confiança ^[01].

v	$t_{0,99}$	$t_{0,95}$	$t_{0,90}$	$t_{0,60}$	$t_{0,50}$	$t_{0,40}$
1	63,66	12,71	6,31	1,376	1,000	0,727
2	9,92	4,30	2,92	1,061	0,816	0,617
3	5,84	3,18	2,35	0,978	0,765	0,584
4	4,60	2,78	2,13	0,941	0,741	0,569
5	4,03	2,57	2,02	0,920	0,727	0,559
10	3,17	2,23	1,81	0,879	0,700	0,542
15	2,95	2,13	1,75	0,866	0,691	0,536
20	2,84	2,09	1,72	0,860	0,687	0,533
25	2,79	2,06	1,71	0,856	0,684	0,531
30	2,75	2,04	1,70	0,854	0,683	0,530
60	2,66	2,00	1,67	0,848	0,679	0,527
120	2,62	1,98	1,66	0,845	0,677	0,526
∞	2,58	1,96	1,65	0,842	0,674	0,524

Tab. C.1- Distribuição t de Student para diferentes graus de liberdade v .

A eq.(C.1) pode ser utilizada também para estimar o tamanho n da amostra necessário para gerar uma média \bar{x} com uma credibilidade especificada. No exemplo anterior onde $\Delta x^* = 15 \text{ unid.}$, pode-se perguntar, por exemplo, qual seria o número mínimo de dados n , para que a média μ da população caia dentro de um intervalo $\bar{x} \pm \Delta x$, para $\Delta x = 12 \text{ unid.}$, com um nível de confiança de 99%. Nesse caso, a eq. (C.1), fornece

$$t = \frac{\Delta x}{\Delta x^*} \sqrt{n} = \frac{12}{15} \sqrt{n} = 0,8 \sqrt{n}.$$

A Tab. C.2 mostra valores de t para alguns valores de n , calculados por essa equação e obtidos diretamente da distribuição de Student, como da Tab. C.1, para um nível de confiança de 99%.

n	t tabelado para um nível de confiança de 99%	t calculado
10	3,170	2,530
11	3,110	2,653
12	3,060	2,771
13	3,010	2,884
14	2,980	2,993

Tab. C.2- Valores de t tabelados para um nível de confiança de 99% e calculados para $\Delta x^* = 15 \text{ unid.}$ e $\Delta x = 12 \text{ unid.}$.

Em outras palavras, são necessários pelo menos 14 medidas para que um instrumento de medida, de precisão estimado de $\Delta x^* = 15 \text{ unid.}$, gere um nível de confiança de 99%.

APÊNDICE D - MEDIDAS E ERROS

D.1 - Grandezas Físicas e Padrões de Medida

As grandezas físicas podem ser expressas em termos de um determinado número de unidades fundamentais. Realizar medida significa fazer uma comparação entre uma quantidade e outra, definida como unidade padrão. Em Particular na mecânica, utiliza-se três **grandezas fundamentais**, denominadas **comprimentos, massa e tempo**. Nesse caso, as dimensões, unidades e símbolos, utilizadas no Sistema Internacional de medida (SI), estão especificadas na Tab. D.1.

	Nome	dimensão	unidade	símbolo
grandezas Fundamentais	comprimento	$[L]$	m	m
	massa	$[M]$	kg	kg
	tempo	$[T]$	s	s
grandezas Derivadas	Velocidade	$[L/T]$	m/s	m/s
	Aceleração	$[L/T^2]$	m/s^2	m/s^2
	Força	$[M \times L/T^2]$	$kg\ m/s^2$	<i>Newton(N)</i>
	Trabalho	$[M \times L^2/T^2]$	$N \times m$	<i>Joule(J)</i>
	Potência	$[M \times L^2/T^3]$	J/s	<i>Watt(W)</i>

Tab. D.1- Grandezas fundamentais e derivadas com suas dimensões, unidades e símbolos no Sistema Internacional de medidas (SI).

Por motivos evidentes, esse sistema é freqüentemente denominado de sistema MKS. Quando se diz, por exemplo, que um certo comprimento vale 100 m, estar-se-á dizendo que tal comprimento corresponde a cem vezes o comprimento da unidade padrão. As unidades de outras grandezas, tais como velocidade, aceleração, trabalho, força, etc., são derivadas das três grandezas fundamentais. Alguns exemplos de **grandezas derivadas** estão listados também na Tab. D.1.

Para grandezas muito grandes ou muito pequenas é comum utilizar prefixos múltiplos ou submúltiplos de potências de 10. Por exemplo, $10^{-3}m = 1\ \text{milímetro} = 1\ \text{mm}$, ou $10^6W = 1\ \text{megawatt} = 1\ \text{MW}$. Na Tab. D.2 estão listados os prefixos mais comuns utilizados para as grandezas físicas.

As medidas de grandezas físicas podem ser diretas ou indiretas. A medida direta é o resultado da leitura de um instrumento de medida, como por exemplo, um comprimento com uma régua graduada, ou ainda a de um intervalo de tempo com um cronômetro. Uma medida indireta é a que resulta da aplicação de uma equação matemática que relaciona a grandeza a ser medida com outras diretamente mensuráveis.

Múltiplo	Prefixo	Símbolo
10^{-18}	ato	a
10^{-15}	fento	f
10^{-12}	pico	p
10^{-9}	nano	n
10^{-6}	micro	μ
10^{-3}	mili	m
10^{-2}	centi	c
10^{-1}	deci	d
10^1	deca	da
10^2	hecto	h
10^3	kilo	k
10^6	mega	M
10^9	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	exa	E

Tab. D.2- Prefixos múltiplos e submúltiplos de potência de 10

Por exemplo, pode-se medir a velocidade v de um carro por meio das medidas diretas da distância percorrida Δx e do intervalo de tempo Δt , uma vez que $v = \Delta x / \Delta t$.

D.2- Classificação dos Erros

Por mais criteriosa que seja uma medição e por mais preciso que seja o instrumento, não é possível realizar uma medida exata. Em outras palavras, existe sempre uma incerteza quando se compara uma medida de uma dada grandeza física com sua unidade. De acordo com sua natureza, os erros são classificados^[03, 04], como: **sistemático**, **grosseiros**, e **acidentais**.

Os **Erros Sistemáticos** são provocados por fontes associadas a instrumentação ou ao método de medida utilizado, e, em princípio, podem ser eliminados ou compensados. Esses erros fazem com que as medidas estejam sistematicamente acima ou abaixo do valor verdadeiro. Como exemplo de erros sistemáticos, pode-se citar a utilização de uma régua graduada numa temperatura de $30^{\circ}C$, mas que foi calibrada a $20^{\circ}C$. A dilatação de sua escala resultará num erro sistemático em todas as medidas.

Os **Erros Grosseiros** ocorrem devido a imperícia ou distração do operador. Como exemplos pode ser citados, uma escolha errada de escalas, erros de cálculo, etc.. Esses erros podem ser reduzidos por meio da repetição cuidadosa das medições.

Os **Erros acidentais** ocorrem devido a causas diversas e imprevisíveis difíceis de serem eliminadas. Esses erros podem ter várias origens, tais como em relação aos próprios **instrumentos de medida**, onde pequenas flutuações das condições ambientais (temperatura, pressão, umidade, etc) afetam os resultados experimentais. Em fatores associados ao **operador** sujeitos a variações, como por exemplo a visão e a audição.

Pode-se dizer que uma medida terá **exatidão** quando os erros sistemáticos forem desprezíveis e uma medida terá **precisão** quando esse for o caso para os erros acidentais.

D.3- Algarismos Significativos

A medida de uma grandeza física é sempre aproximada, por mais experiente que seja o operador e por mais preciso que seja o aparelho utilizado. Esta limitação reflete-se no número de algarismos que se pode utilizar para representar uma medida. O procedimento padrão é a utilização de algarismos que se tem certeza de estarem corretos, admitindo-se geralmente o uso de apenas um algarismo duvidoso. Esses algarismos são denominados de **algarismos significativos** e a sua **quantidade** estará diretamente relacionada à **precisão da medida**. Por exemplo, pode-se dizer que o comprimento assinalado na escala graduada em centímetros da Fig. D.1 é de $4,8\text{ cm}$. O algarismo 4 é correto, porém o algarismo 8 é duvidoso. Podia-se ter lido também $4,7\text{ cm}$ ou $4,9\text{ cm}$. O erro que se comete é de $\pm 0,1\text{ cm}$ e o valor da medida deve ser apresentado como $4,8 \pm 0,1\text{ cm}$. Note que o erro deve afetar somente o algarismo duvidoso da medida.

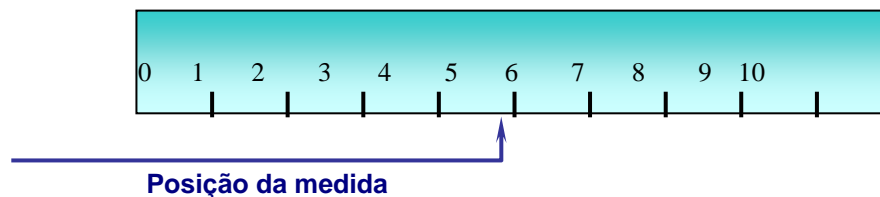


Fig. D.1- Medida de um comprimento utilizando-se uma escala graduada em centímetros.

O erro estimado de uma medida deve conter somente o seu algarismo mais significativo. Os algarismos menos significativos devem ser simplesmente desprezados ou no máximo utilizados para efetuar arredondamentos. Por exemplo, suponha que se faça um cálculo da média e do erro de medidas de um comprimento de uma peça, e o que se encontrou foi $\bar{x} = 9,5423\text{ cm}$ e $\Delta x = 0,432\text{ cm}$. Como o erro da medida encontra-se nos

décimos de centímetros, não tem sentido apresentá-lo com algarismos que se referem aos **centésimos** e **milésimos** de centímetros. Nesse caso, a maneira correta de apresentar o erro seria simplesmente $\Delta x = 0,4 \text{ cm}$. No caso da média, o algarismo 9 é exato, no entanto, o algarismo 5 é duvidoso pois este é afetado pelo erro, e, conseqüentemente, os algarismos 4, 2 e 3 também são duvidosos. Esses algarismos, resultante de um cálculo, podem ser utilizados para fazer o devido arredondamento. Com esse procedimento, a forma recomendada de apresentar a medida referida, é $9,5 \pm 0,4 \text{ cm}$.

Durante um processo de medida experimental, deve-se ficar atento as seguintes regras relacionadas a algarismos significativos:

1- Zeros à esquerda do primeiro algarismo significativo diferente de zero não são algarismos significativo. Por exemplo, tanto $25,3 \text{ cm}$ como $0,253 \text{ m}$ tem a mesma medida e tem 3 algarismos significativos. Similarmente, pode-se dizer que $2 = 0,2 \times 10 = 0,02 \times 10^2$ todos têm 1 algarismo significativo, $32 = 3,2 \times 10 = 0,32 \times 10^2$ todos têm 2 algarismos significativos, e $0,000531 = 0,531 \times 10^{-3} = 5,31 \times 10^{-4}$ todos têm 3 algarismos significativos.

2- Zeros à direita de um algarismo significativo é também significativo. Por exemplo, $25,3 \text{ cm}$ e $25,30 \text{ cm}$ são medidas diferentes. A primeira tem 3 algarismos significativos e a segunda, de maior precisão, tem 4 algarismos significativos.

3- Zero situado entre algarismos significativos é também significativos. Por exemplo, $25,3 \text{ cm}$ tem 3 algarismos significativos e $2,053 \text{ m}$ tem 4 algarismos significativos.

Para que uma medida seja apresentada com um número de algarismos significativos apropriado, muitas vezes é necessário se fazer um arredondamento do resultado. Quando for esse o caso, utiliza-se a seguinte regra: Quando o último algarismo for **menor ou igual a 5** este deve ser simplesmente abandonado. Por outro lado, quando esse algarismo for **maior que 5**, abandona-o e soma-se uma unidade ao algarismo anterior. Por exemplo, $9,365 \text{ cm}$ pode ser arredondado para $9,36 \text{ cm}$ ou ainda $9,4 \text{ cm}$.

Para executar operações matemáticas com algarismos significativos, deve-se primeiro transformar todas as parcelas para a mesma unidade e seguir as regras abaixo:

1- No caso de soma ou subtração, o resultado deve ser apresentado somente com um algarismo duvidoso e o número de algarismos significativos vai depender do tamanho dos algarismos duvidosos de cada parcela da operação. Por exemplo, a adição entre as medidas $4,3 \text{ cm}$ com $3,37 \text{ cm}$, realizadas com uma escala graduada em centímetros e outra em milímetro, deve ser executada como segue:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 4,3xx \text{ cm} \\ +3,37x \text{ cm} \\ \hline 7,7xx \text{ cm} \end{array}$$

O procedimento adotado na operação acima, utilizando x após o último algarismo significativo, é um artifício para representar **algarismos desconhecidos**, e a adição de um algarismo conhecido com um desconhecido dará um algarismo desconhecido. A adição de x com 7 será um algarismo desconhecido que poderá ser maior do que 10 , portanto, haverá a possibilidade de um **“vai um”** e o segundo algarismo do resultado deverá ser acrescido de uma unidade e será duvidoso.

Um resultado $4,3 \text{ cm} + 3,37 \text{ cm} = 7,67 \text{ cm}$, estaria incorreto do ponto de vista de algarismos significativos, uma vez que, isso relataria a utilização de instrumentos de precisão de milímetros quando, na verdade, um dos instrumentos tinha precisão apenas de centímetros. Deve-se ficar claro que uma operação matemática não

pode alterar a precisão de uma medida, uma vez que isso não alteraria a precisão do instrumento com o qual ela foi efetuada.

Outros exemplos interessantes de soma e subtração com algarismos significativos são os que se seguem:

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 4,041x \\
 + 0,0498x \\
 \hline
 98,00x \\
 \hline
 102,09xxx
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 20,00x \\
 - 0,1x \\
 \hline
 19,9xx
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 15,421x \\
 - 0,0003x \\
 \hline
 15,421xx
 \end{array}$$

2- No caso de **multiplicação e divisão**, o resultado deve ser apresentado com um número de algarismos significativos igual ao da parcela que tiver o menor número de algarismos significativos. Essas operações podem ser efetuadas utilizando-se o mesmo artifício adotado na soma e subtração, como se pode notar com os exemplos que se seguem:

$$\begin{array}{r}
 8,348x \\
 \times 3,1x \\
 \hline
 xxxxx \\
 8348x \\
 \hline
 25044x \\
 \hline
 25,8xxxxx
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 109,xxxx \overline{)7,998} \\
 \underline{13,6} \\
 7998x \\
 \hline
 30xxxx \\
 23994x \\
 \hline
 7xxxxx \\
 47988x \\
 \hline
 3xxxxx
 \end{array}$$

D.4 Propagação de Erros

Normalmente deve-se utilizar valores medidos e afetados por erros para se fazer cálculos e encontrar os valores de outras grandezas indiretas. Nesses casos, é importante conhecer como o erro nas medidas diretas afetam a grandeza final ^[03, 04]. Suponha que uma quantidade V seja calculada como função de outras quantidades x, y , de forma que $V = V(x, y)$. Suponha que x, y tenham sido determinados n vezes, de modo, que

$$V_1 = V(x_1, y_1), V_2 = V(x_2, y_2), \dots, V_i = V(x_i, y_i), \dots, V_n = V(x_n, y_n)$$

Por outro lado, pode-se encontrar as médias \bar{x}, \bar{y} e, fazendo-se a suposição de que o valor mais provável de $V(x, y)$ seja $V(\bar{x}, \bar{y})$ então, cada valor vai diferir de $V(\bar{x}, \bar{y})$, por

$$\Delta V_i = V(x_i, y_i) - V(\bar{x}, \bar{y}) \tag{D.1}$$

Esse desvio de V_i pode ser determinado por meio do cálculo diferencial, como

$$\Delta V_i = \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x_i + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y_i \tag{D.2}$$

onde $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$, $\Delta y_i = y_i - \bar{y}$. Como $\sum_{i=1}^n \Delta V_i = 0$, então o valor médio de ΔV será nulo, uma vez que,

$$\overline{\Delta V} = \sum_{i=1}^n \Delta V_i / n . \text{ Assim, da eq.(D.1), obtém-se}$$

$$\overline{\Delta V} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta V_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n V(\bar{x}, \bar{y})}{n} = \bar{V} - \frac{nV(\bar{x}, \bar{y})}{n} = 0$$

ou,

$$\bar{V} = V(\bar{x}, \bar{y}) \quad (D.3)$$

Em outras palavras, o valor médio \bar{V} é o valor de V calculado utilizando-se os valores médios de x , y .

O desvio padrão ΔV de V pode ser obtido a partir da eq. (D.2), elevando-a ao quadrado, dividindo-se o resultado por $n(n-1)$ e, em seguida, extraindo-se a raiz quadrada, isto é

$$\Delta V = \sqrt{\frac{(\Delta V_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}{n(n-1)} + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2}{n(n-1)} + 2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) \frac{\sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta y_i}{n(n-1)}}$$

ou ainda

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + 2\rho_{xy} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) \Delta x \Delta y} \quad (D.4)$$

onde

$$\rho_{xy} = \frac{1}{n(n-1)\Delta x \Delta y} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \Delta y_i \quad (D.5)$$

é denominado de **coeficiente de correlação** ^[04], cujo valor depende do tipo de erro que se comete. Quando os desvios em x e em y são independentes, a somatória presente na eq. (D.5) anula-se resultando em $\rho_{xy} = 0$.

Isso pode ocorrer, por exemplo, na determinação da velocidade de um corpo por meio de medidas de tempos e distâncias. Se a medida da distância for menor que a verdadeira, isso não implica, necessariamente, que a medida do tempo também o seja, uma vez que elas foram feitas com instrumentos diferentes. Nesses casos, a eq. (D.4), torna-se

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2} \quad (D.6)$$

Os erros independentes são mais freqüentes do que os correlacionados, quando uma correlação é conhecida, ou suspeitada, entretanto, deve-se calcular ρ_{xy} utilizando-se a eq.(D.5).

A generalização da eq. (D.6) à funções de mais de duas variáveis é imediata. Se a quantidade V for calculada como função de quantidades x, y, z, \dots , de forma que $V = V(x, y, z, \dots)$, então

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 (\Delta z)^2 + \dots} \quad (D.7)$$

Do ponto de vista prático, para os casos em que a quantidade $V = V(x, y)$, quando se sabe as quantidades $\bar{x} \pm \Delta x$ e $\bar{y} \pm \Delta y$, pode-se calcular o valor de ΔV imediatamente em termos de Δx e Δy , utilizando-se as relações mostradas na Tab. D.3^[03].

Operação	Relação
Adição	$(\bar{x} \pm \Delta x) + (\bar{y} \pm \Delta y) = (\bar{x} + \bar{y}) \pm (\Delta x + \Delta y)$
Subtração	$(\bar{x} \pm \Delta x) - (\bar{y} \pm \Delta y) = (\bar{x} - \bar{y}) \pm (\Delta x + \Delta y)$
Multiplicação	$(\bar{x} \pm \Delta x) \times (\bar{y} \pm \Delta y) = (\bar{x} \times \bar{y}) \pm (\bar{x} \times \Delta y + \bar{y} \times \Delta x)$
Divisão	$\frac{(\bar{x} \pm \Delta x)}{(\bar{y} \pm \Delta y)} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \pm \frac{1}{\bar{y}^2} \times (\bar{x} \times \Delta y + \bar{y} \times \Delta x)$

Tab. D.3- Operações práticas para os casos em que a quantidade $V = V(x, y)$.

Nessas relações todos os termos posteriores ao sinal \pm devem ser tomados em módulo. Quando o erro aleatório calculado for nulo, o erro adotado deve ser o erro do próprio aparelho, que será o menor erro possível cometido na medida.

APÊNDICE E - CONSTRUÇÃO DE ESCALAS E GRÁFICOS

E.1- Introdução

Os resultados de medidas podem ser apresentados com simplicidade e clareza por meio de um gráfico. Os resultados expostos num gráfico podem ser facilmente analisados e, muitas vezes, permitem descobrir a expressão algébrica que relaciona as grandezas correspondentes. A curva aproximada que se obtém, cujo traçado é orientado pelos pontos experimentais marcados no papel gráfico, é uma imagem intuitiva da relação funcional investigada.

Para se entender como se constrói corretamente um gráfico, é necessário antes, formular as seguintes definições e convenções^[04]:

A **Escala** é qualquer trecho de curva, em geral uma reta, marcada por traços, os quais estão em correspondência com valores ordenados de uma grandeza.

O **Passo** (ΔL) é a distância, em centímetro, milímetro, etc, entre dois traços numerados consecutivos numa escala.

O **Degrau** ($\Delta f(x)$) é a variação da grandeza em um passo.

O **Módulo** (M) é a constante de proporção que existe entre o passo e o de grau, isto é

$$M = \frac{\Delta L}{|f(x)|} = a \times 10^n \quad (\text{E.1})$$

E.1- Escala Linear

A escala linear possui o passo e o de grau constantes, na qual se estabelece uma correspondência entre a unidade de comprimento na escala e o valor da grandeza analisada. Por exemplo, 1 *cm* na escala corresponde a $a' \times 10^m$ *unid.* da grandeza analisada, onde m é um inteiro e $a' = 1, 2, 2,5$, ou 5 de acordo as normas de desenhos técnicos (NB-8)^[04]. Assim, de acordo com a eq. (E.1),

$$M = \frac{1 \text{ cm}}{a' \times 10^m \text{ unid.}} = \left(\frac{1}{a'}\right) \times 10^{-m} \text{ cm/unid.} = (1, 0,5, 0,4, \text{ ou } 0,2) \times 10^{-m} \text{ cm/unid.}$$

ou, escrevendo-se $\frac{1}{a'} = a$ e $-m = n$, obtém-se $M = a \times 10^n \text{ cm/unid.}$, com

$$a = \frac{1}{a'} = 1, 5, 4, \text{ ou } 2 \quad (\text{E.2})$$

onde os fatores de escala menores que 1 foram multiplicados por 10 que, por sua vez, foi absorvida pela potência de dez 10^n . A Fig. E.1 mostra o exemplo de uma escala linear, onde

$$\text{Passo} = \text{Const.} = 2 \text{ cm}, \text{ Degrau} = \text{Const.} = 1 \text{ Joule}, M = 2 \text{ cm/Joule}$$

Na escolha do módulo é importante levar em conta, o comprimento disponível para o eixo, a variação da grandeza analisada e o interesse ou não de coincidir o “zero” da grandeza com a origem da escala.

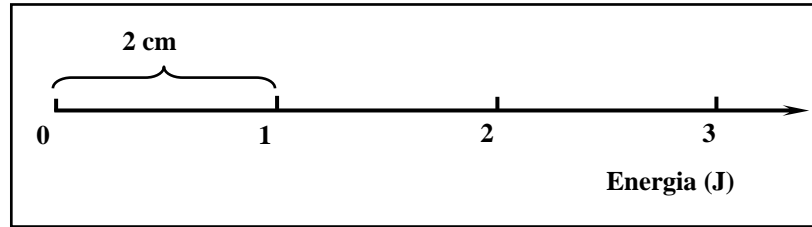


Fig. E.1- Exemplo de escala linear de passo = 2 cm, degrau = 1J e Módulo = 2 cm/J.

O **papel milimetrado** é o tipo de escala mais freqüentemente utilizada para representar a relação funcional entre duas grandezas. Nesse tipo de escala pode-se utilizar 1 milímetro como passo mínimo.

E.2- Escala Logarítmica

A construção de uma escala logarítmica está relacionada à divisão de um certo seguimento de reta em partes proporcionais aos valores dos logaritmos dos números numa determinada base a ^[04]. Nessas escalas, adota-se a definição de **década logarítmica** como as variações de unidades de potência de 10 (10^n a 10^{n+1}), sobre os valores da grandeza analisada.

Seja um seguimento de reta de comprimento L , como mostra a Fig. E.2. Suponha que se deseja dividir esse seguimento de reta em partes proporcionais aos logaritmos dos números $n = 1,2,3,\dots,10$.

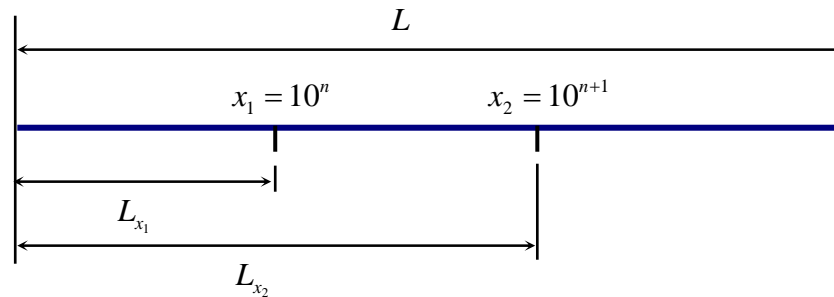


Fig. E2- Segmento de reta utilizado para construir uma escala logarítmica sobre uma década logarítmica.

Aplicando-se a definição de módulo na base a , obtém-se

$$M_a = \frac{|\Delta L|}{|\Delta f(x)|} = \frac{|L_{x_2} - L_{x_1}|}{|\log_a x_2 - \log_a x_1|} = \frac{L_{x_2} - L_{x_1}}{\log_a (x_2/x_1)} \quad (\text{E.3})$$

Aplicando-se essa relação na base 10 e, tomando-se a variação de x_2 a x_1 igual a 10, obtém-se

$$M_{10} = \frac{L_{x_2} - L_{x_1}}{\log_{10} x_2/x_1} = \frac{L_{10^{n+1}} - L_{10^n}}{\log_{10} \frac{10^{n+1}}{10^n}} = \frac{L_{10} - L_1}{\log_{10} 10} = \frac{L_{10} - L_1}{1} = L_{10} \quad (\text{E.4})$$

o que mostra que o módulo M na base 10 é igual a distância de $x_1 = 1$ a $x_2 = 10$, ou, $x_1 = 10$ a $x_2 = 10^2$, etc. Por outro lado, pode-se encontrar também uma relação de escala para qualquer seguimento de reta $L(x)$ medido a partir da origem igual a 1, como representado na Fig. E.3.

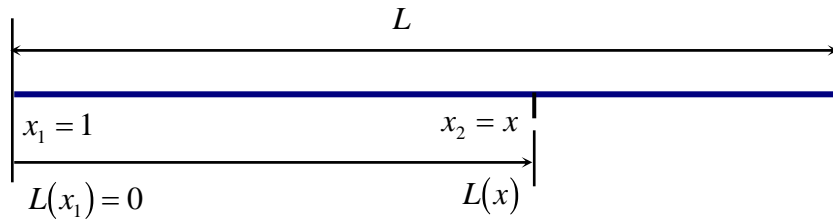


Fig. E.3- Escala que permite determinar o logaritmo de x na base 10.

Nesse caso, $L_{x_1} = 0$ em $x_1 = 1$ e $L_{x_2} = L(x)$ em $x_2 = x$, portanto

$$M_{10} = \frac{L_{x_2} - L_{x_1}}{\log_{10}(x/1)} = \frac{L(x) - 0}{\log_{10} x} = \frac{L(x)}{\log_{10} x}$$

ou, como $M_{10} = L_{10}$, então

$$\log_{10} x = \frac{L(x)}{L_{10}} = \frac{L(x)}{L(10)} \quad (\text{E.5})$$

pois, $1 = \log_{10} 10 = L(10)/L_{10}$ tal que, $L_{10} = L(10)$. A eq. (E.5) permite determinar o logaritmo de qualquer número x na base 10 a partir da escala construída. Similarmente, numa base natural $e = 2,781\dots$, ou mesmo, numa base N qualquer tem-se, respectivamente:

$$\ln x = \frac{L(x)}{L(e)} \quad ; \quad \log_N x = \frac{L(x)}{L(N)} \quad (\text{E.6})$$

É importante relatar que a origem de uma escala logarítmica não precisa iniciar em $x_1 = 1$ e sim numa potência de 10 conveniente. Além disso, como não existe logaritmo de números negativos ou nulos, esses não podem ser utilizados para construir uma escala logarítmica.

E.3- Papeis mono- log e log – log

Os papeis mono – log, ou semi – log, e log – log, ou di – log, mostrados na Fig. E.4, são construídos a partir da escala logarítmica, e são utilizados para linearização de funções exponenciais e polinomiais, respectivamente.

Uma ou mais décadas da escala logarítmica podem ser utilizadas para representar pontos experimentais associados às grandezas analisadas. Por exemplo, se as grandezas tiverem variações de 0,1 a 10, na primeira década coloca-se os valores entre 0,1 e 1, e na segunda os valores entre 1 e 10.

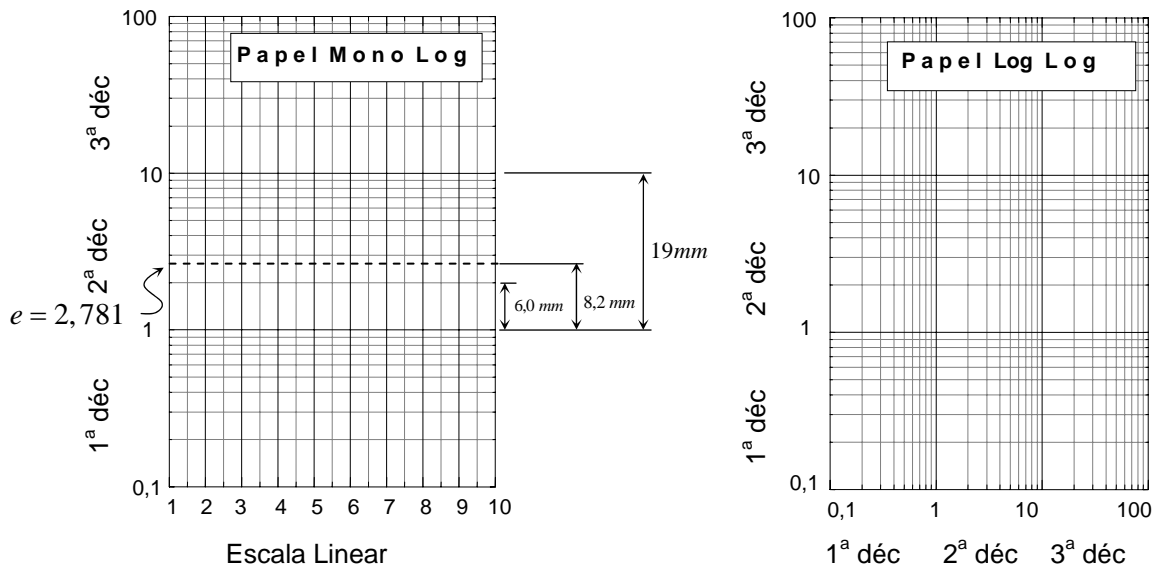


Fig. E.4- Aspecto de papéis mono – log e log – log.

Todas as décadas têm mesmos comprimentos e subdivisões proporcionais, isto é, o segundo traço na primeira década vale 0,2, o segundo traço na segunda década vale 2, e assim por diante. Cada década apresenta 10 subdivisões, que podem também estar subdivididas em 2, 5, ou 10 partes.

Alguns papéis logarítmicos comerciais apresentam suas décadas igualmente numeradas e, nesse caso, é o experimentador que deve definir as faixas de potência de 10 que melhor lhe convém.

Pode-se utilizar as eq. (E.5) ou a eq. (E.6) e o papel mono – log da Fig. E.4, para calcular, por exemplo, os logaritmos dos algarismos 2 e 0,0148 nas bases 10 ou natural e . Para isso, deve-se notar que qualquer década do eixo logarítmico tem comprimento $L(10) \approx 19 \text{ mm}$ e o comprimento correspondente a base natural é $L(e) = L(2,781) \approx 8,2 \text{ mm}$, tal que

$$\log 2 = \frac{L(2)}{L(10)} \approx \frac{6,0 \text{ mm}}{19,0 \text{ mm}} \approx 0,30$$

$$\log 0,0148 = \log(1,48 \times 10^{-2}) = \frac{L(1,48)}{L(10)} - 2 \approx \frac{1,9 \text{ mm}}{19,0 \text{ mm}} - 2 \approx -1,9$$

$$\ln 2 = \frac{L(2)}{L(e)} = \frac{L(2)}{L(2,781)} \approx \frac{6,0 \text{ mm}}{8,2 \text{ mm}} \approx 0,70$$

$$\ln 0,0148 = \ln(1,48 \times 10^{-2}) = \ln 1,48 - 2 \ln 10 = \frac{L(1,48)}{L(e)} - 2 \frac{L(10)}{L(e)} \approx \frac{2,9 \text{ mm}}{8,2 \text{ mm}} - 2 \frac{19,0 \text{ mm}}{8,2 \text{ mm}} \approx -4,24$$

Outros papéis podem apresentar tamanhos diferentes, mas como se espera uma mesma correspondência entre logaritmos e comprimentos, deve-se chegar sempre aos mesmos resultados encontrados acima.

E.4- Gráficos

E.4.1- Introdução

A utilização de gráficos é uma das formas mais claras de apresentar o comportamento de duas grandezas correlacionadas. Pontos experimentais, resultantes de medidas, podem ser distribuídos sobre uma escala gráfica e, a partir destes, é possível traçar uma linha (reta ou curva) que melhor se ajusta sobre esses pontos. A partir da forma da linha traçada na escala gráfica, é possível obter informações sobre a lei que correlaciona as grandezas.

Para se construir um bom gráfico, deve-se adotar as regras que se seguem:

Escolhe-se primeiro escalas convenientes tais que tornem facilitada a construção e a leitura dos gráficos. Não é necessário que as escalas dos eixos sejam as mesmas. Essas escalas devem ser tais que a precisão dos pontos geométricos sobre o gráfico sejam da ordem da precisão dos dados encontrados nas medidas. Não é conveniente assinalar nas escalas as coordenadas dos pontos experimentais. Em seguida, escreve-se um título que especifica o fenômeno analisado e os nomes das grandezas, com respectivas unidades, sobre os eixos que representam. No eixo horizontal deve ser lançada a variável independente e no eixo vertical as variáveis dependente, obtida em função da primeira. Não é necessário que a linha traçada no gráfico passe por todos os pontos.

A Fig. E.5 mostra um exemplo de construção de um bom gráfico, cujo comportamento é caracterizado por uma função linear. As pequenas barras, horizontal e vertical, marcadas sobre cada ponto experimental, são denominadas de **barras de erro**. Essas barras fornecem uma estimativa dos erros aleatórios embutidos em cada ponto experimental, resultante do processo de medida de cada uma das grandezas.

Os erros aleatórios de cada ponto experimental podem ser estimados, construindo-se amostras estatísticas, com determinado número n de dados, para cada grandeza envolvida na experiência. As coordenadas do ponto experimental sobre o gráfico, coincide com os valores médios medidos das grandezas, calculados das amostras estatísticas, e o tamanho das barras de erro identifica-se com intervalos de confiança Δx , associados a uma determinada função de distribuição estatística.

E.4.2- Gráficos de Funções Lineares

As funções lineares são aquelas cujas grandezas envolvidas relacionam-se, por

$$y = ax + b \quad (\text{E.7})$$

onde, $a = \Delta y / \Delta x$ é o coeficiente angular, obtido pela inclinação da reta, e b é o coeficiente linear, obtido pela interseção da reta com o eixo y , como ilustrado na Fig. E.5.

Os métodos freqüentemente utilizados para a determinação dos coeficientes angular e linear são: o **método gráfico** e o **método dos mínimos quadrados**, sobre os quais se faz uma breve discussão nas seções que se seguem.

E.4.2.1- Método Gráfico

Esse método é apropriado quando se tem um número razoável de pontos experimentais ($n > 10$), e sua utilização requer uma boa dose de bom senso. O método se baseia numa estimativa dos parâmetros de uma reta que melhor se ajusta sobre os n pontos experimentais, a partir do **centro de gravidade** (\bar{x}, \bar{y}) desses pontos distribuídos sobre o gráfico, onde

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad ; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (\text{E.8})$$

Uma reta horizontal e uma vertical que passa por este ponto no gráfico, definem quatro quadrantes como se vê no exemplo da Fig. E.6. Neste exemplo, aproximadamente, metade dos pontos experimentais está no terceiro

quadrante e metade no segundo. Para se estimar a reta que melhor se ajusta sobre os pontos experimentais, coloca-se a ponta de um lápis sobre o ponto (\bar{x}, \bar{y}) e apóia-se aí uma régua transparente. Gira-se a régua em torno do ponto (\bar{x}, \bar{y}) até que, aproximadamente, 84% dos pontos fiquem **abaixo** da régua no **terceiro quadrante** e a mesma quantidade **acima** no **segundo quadrante**.

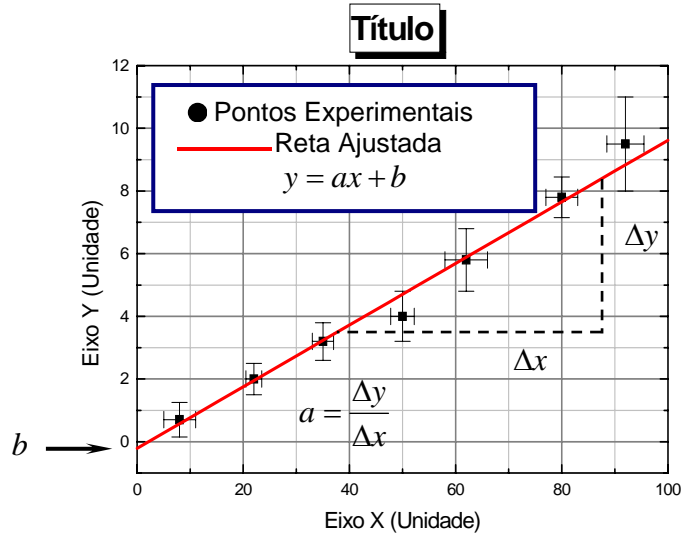


Fig.E.5- Apresentação geral de um bom gráfico.

Agora, gira-se a régua em torno do ponto (\bar{x}, \bar{y}) até que, aproximadamente, 84% dos pontos fiquem **acima** da régua no **terceiro quadrante** e a mesma quantidade **abaixo** no **segundo quadrante**. A reta traçada nessas condições, tem uma **inclinação máxima** $a_{máx}$ com um certo erro padrão. Prolongando-se essa reta até interceptar o eixo y , determina-se o coeficiente linear b_{min} .

Pode-se notar que, na região delimitada pelas retas de inclinação máxima e mínima, tem-se, aproximadamente, 68% dos pontos experimentais, o que é consistente com o conceito de erro padrão $\sigma_x = \sigma / \sqrt{n}$, obtido do

parâmetro $\Delta x = z \sigma / \sqrt{n}$ para $z = \frac{(x - \mu)}{\sigma} = 1$ da **distribuição normal**, definida na eq. (B.1).

Com essas considerções, a reta que melhor se ajusta sobre os pontos experimentais, é a **reta média** que fica na região intermediária entre as retas de inclinação mínima e máxima, como indicado na Fig. E.6. Os coeficientes linear e angular da reta média, bem como seus desvios padrões, são obtidos por

$$a = \frac{1}{2}(a_{máx} + a_{min}) \quad , \quad b = \frac{1}{2}(b_{máx} + b_{min}) \tag{E.9}$$

$$\Delta a = \frac{1}{2\sqrt{n}} |a_{máx} - a_{min}| \quad , \quad \Delta b = \frac{1}{2\sqrt{n}} |b_{máx} - b_{min}|$$

Caso os pontos experimentais tenham diferentes ponderações de erros, pode-se seguir o mesmo procedimento porém, leva-se em consideração os pesos relativo de cada ponto. Esses pesos são aproximadamente iguais às inversas das barras de erro de cada ponto.

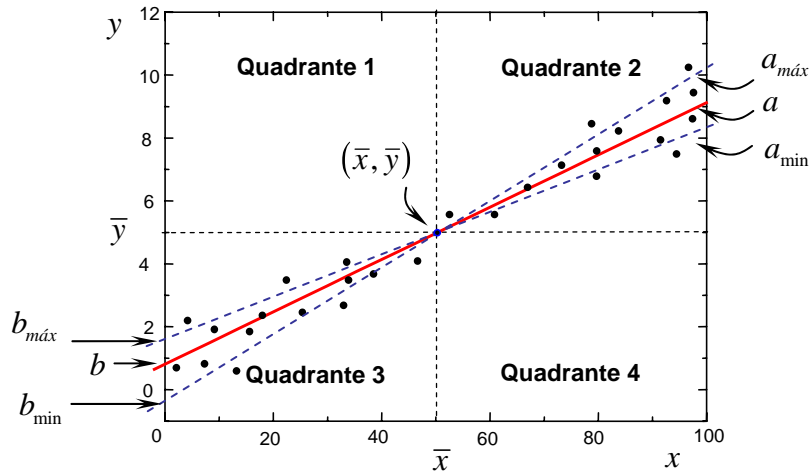


Fig. E.6- Determinação dos coeficientes a e b pelo método gráfico

E.4.2.2- Método dos Mínimos Quadrados

Esse método baseia-se na minimização da função

$$f(a, b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^{\text{calculado}})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$$

Nesse caso, procura-se ajustar os dados (x_i, y_i) da amostragem com a eq.(E.7), tal que, os coeficientes a e b minimizem a diferença entre os valores y_i medidos e os valores $y_i^{\text{calculado}}(x_i)$ calculados por essa equação [16][17]. Em outras palavras, o que se quer é, encontrar valores a e b que satisfaçam as condições

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a, b) = \frac{\partial}{\partial b} f(a, b) = 0, \text{ ou}$$

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a, b) = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial a} \left[\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \right] = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)x_i = 0$$

e

$$\frac{\partial}{\partial b} f(a, b) = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial b} \left[\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \right] = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0$$

ou ainda

$$-\sum_{i=1}^n y_i x_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad \text{e} \quad -\sum_{i=1}^n y_i + a \sum_{i=1}^n x_i + nb = 0$$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad \text{e} \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (\text{E.10})$$

Dividindo-se ambos, numerador e denominador, da primeira eq. (E.10) por n e, em seguida, fazendo-se algumas manipulações algébricas, obtém-se

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n \bar{x} y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n \bar{x} y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) + n \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n \bar{x} y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n \bar{x} y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i \bar{x} + \bar{x}^2)} \end{aligned}$$

ou,

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (\text{E.11})$$

Dividindo-se ambos, numerador e denominador, da segunda eq. (E.10) por n e, em seguida, fazendo-se algumas manipulações algébricas, obtém-se

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - n \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n y_i \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n \left[n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]}$$

ou,

$$b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \left[\frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \right] \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{y} - a \bar{x} \quad (\text{E.12})$$

onde utilizou-se a expressão do coeficiente angular dada na eq. (E.10). As dispersões dos coeficientes angular a e linear b podem ser estimadas a partir da definição de erro padrão, discutido no APÊNDICE B. Isso se faz de forma criteriosa na Referência [05] e, o resultado é:

$$\Delta a = \frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}, \quad \Delta b = S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \quad (\text{E.13})$$

onde,

$$S^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \quad (\text{E.14})$$

onde utilizou-se a expressão do coeficiente angular dada na eq. (E.10).

O método dos mínimos quadrados pode ser aplicado desde que os valores de x_i sejam medidos sem erros e que todos os valores de y_i tenham a mesma distribuição (por exemplo, Gaussiana), com o mesmo desvio padrão σ . Isso, em princípio, poderia significar uma séria limitação para a utilização do método. Entretanto, na prática, a variável dependente x , geralmente pode ser adotada como um dado de referência cujo erro é regulado por um instrumento de precisão e, a variável independente y como o parâmetro estatístico do processo de medida. As medidas das posições s de um corpo que se move uniformemente em função do tempo t é um exemplo clássico dessa condição. Nesse caso particular, é possível gerar tabelas onde se disponha diferentes valores s_i das posições medidas em função de intervalos de tempo Δt predefinidos, como se vê nos exemplos da Fig. E.7.

$s_1 (m)$	$t (s)$
s_{10}	0,00
s_{11}	1,00
s_{12}	2,00
s_{13}	3,00

$s_2 (m)$	$t (s)$
s_{20}	0,00
s_{21}	1,00
s_{22}	2,00
s_{23}	3,00

$s_3 (m)$	$t (s)$
s_{30}	0,00
s_{31}	1,00
s_{32}	2,00
s_{33}	3,00

Fig. E.7- Exemplo de valores s_i das posições medidas em função de intervalos de tempo $\Delta t = 1,00s$ predefinidos.

Desde que os intervalos de tempo nas tabelas sejam gerados por um cronômetro de precisão e que cada uma dessas tabelas apresentem as variáveis estatísticas s_i com uma mesma distribuição, o método dos mínimos quadrados poderá fornecer uma boa estimativa da relação linear entre as grandezas s e t .

E.4.3- Gráficos de Funções Não- Lineares

Quando se coleta uma amostra de medidas e se constrói um gráfico para representá-la, freqüentemente depara-se com funções não lineares. Muitas vezes, essas funções são difíceis de serem identificadas com precisão ou, até mesmo, desconhecidas. Essas dificuldades desaparecem com as funções lineares, pois estas tem identificações confiáveis. Assim, é desejável lançar os dados de uma amostra num gráfico de tal forma que se obtenha uma dependência linear. Esse procedimento, denominado de **linearização de gráficos**, tem como base a técnica de mudança de variável. A linearização de gráficos pode ser efetuada tanto em escalas lineares como logarítmicas ^[03, 04].

As funções não lineares mais freqüentemente linearizáveis são: as **funções polinomiais** e as **funções exponenciais**, sobre as quais se faz uma breve discussão nas seções que se seguem.

E.4.3.1- Funções Polinomiais

Essas funções tem a seguinte forma geral^[03, 04]:

$$y = kx^m \quad (E.15)$$

onde k e m são constantes. Aplicando-se a função logaritmo a ambos os lados da eq. (E.15), obtém-se

$$\log y = \log k + m \log x$$

ou

$$Y = B + AX \quad (E.16)$$

onde, $Y = \log y$, $B = \log k$, $A = m$ e $X = \log x$. Pode-se construir um gráfico da função (E.15) em papel milimetrado, como mostra o exemplo da Fig. E.8(a), e obter A e B utilizando-se o método dos mínimos quadrados ou método gráfico. A partir dos valores obtidos de A e B , pode-se determinar a constante k , por meio da relação $k = 10^B$, e o expoente m do polinômio diretamente de $m = A$.

As funções polinomiais, dadas na eq. (E.15), pode também ser linearizada utilizando-se as escalas logarítmicas de um **papel log – log**. A vantagem da utilização de escalas logarítmicas nesses procedimentos, é que não há a necessidade de se calcular os logaritmos dos dados experimentais.

Essas escalas oferecem diretamente, os valores desses logaritmos, como mostra o exemplo da Fig. E.8(b). Nesse caso, o coeficiente angular deve ser calculado diretamente do gráfico por $m = \Delta Y / \Delta X$ e, a partir disso, a constante k pode ser determinada utilizando-se um ponto particular da reta na escala logarítmica. Escolhendo-se, por exemplo, o ponto (x_1, y_1) , obtém-se $y_1 = kx_1^m$, ou

$$k = \frac{y_1}{x_1^m} \quad (E.17)$$

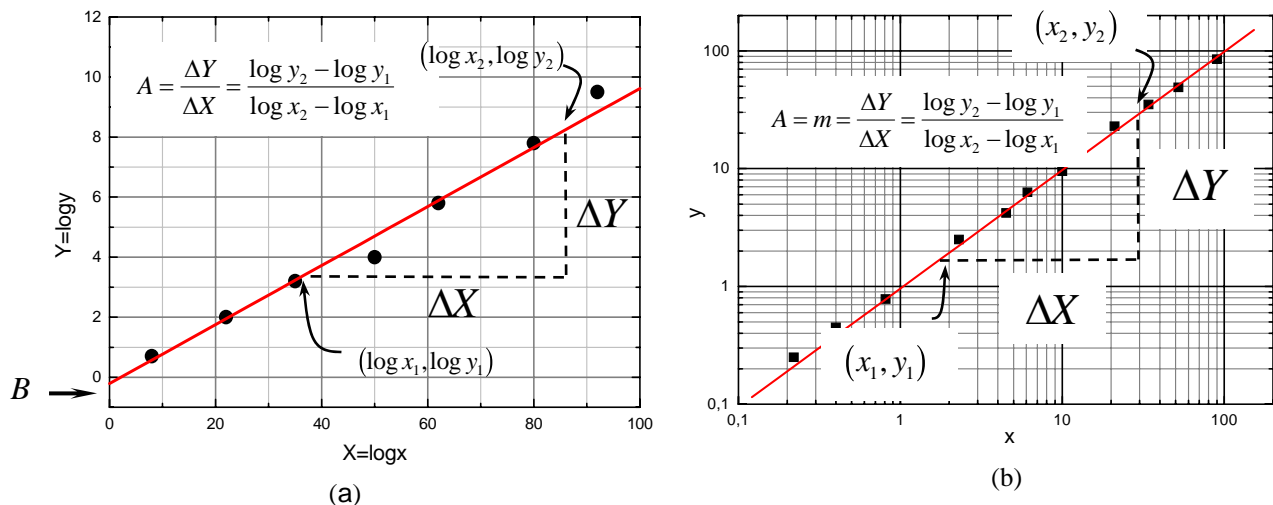


Fig. E.8- Linearização de uma função polinomial em, (a) escala linear e (b) papel log – log.

E.4.3.2- Funções Exponenciais

Essas funções tem a seguinte forma geral ^[03, 04] :

$$y = ke^{mx} \quad (E.18)$$

onde k , m e $e = 2,781\dots$ são constantes. Aplicando-se a função logaritmo a ambos os lados da eq. (E.18), obtém-se:

$$\log y = \log k + m(\log e)x$$

ou

$$Y = B + AX \quad (E.19)$$

onde, $Y = \log y$, $B = \log k$, $A = m(\log e)$ e $X = x$. Como antes, pode-se construir um gráfico da função (E.19) em papel milimetrado, como mostra o exemplo da Fig. E.9(a), e obter A e B utilizando-se o método dos mínimos quadrados ou método gráfico. A partir dos valores obtidos de A e B , pode-se determinar a constante k , por meio da relação $k = 10^B$ e a constante m , diretamente de $m = A/\log e$.

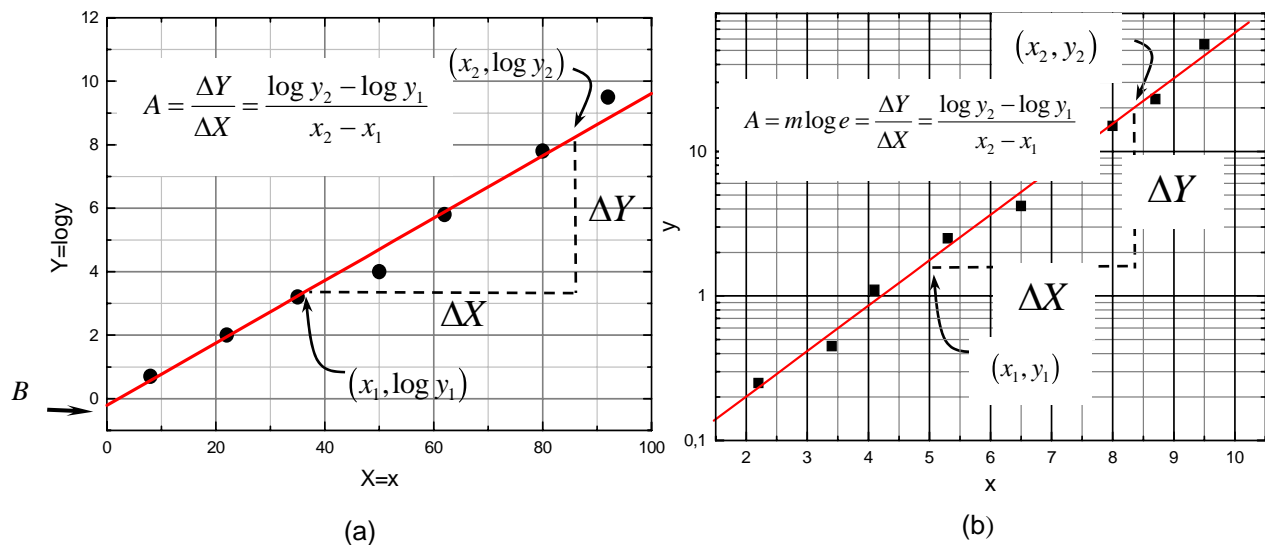


Fig. E.9- Linearização de uma função exponencial em, (a) escala linear e (b) papel mono – log.

A função exponencial , dada na eq. (E.18), pode também ser linearizada utilizando-se as escalas linear e logarítmica de um **papel mono – log**. Com esse papel, não há a necessidade de se calcular os logaritmos dos dados experimentais. A Fig. E.9(b) mostra um exemplo de linearização de uma função exponencial em papel mono - log.

Nesse caso, o coeficiente angular deve ser calculado diretamente do gráfico por $m = \Delta Y/\Delta X$ e, a partir disso, a constante k pode ser determinada utilizando-se um ponto particular da reta. Escolhendo-se, por exemplo, o ponto (x_1, y_1) , obtém-se $y_1 = ke^{mx_1}$, ou

$$k = \frac{y_1}{e^{mx_1}} \quad (E.20)$$

REFERÊNCIAS

- [01] Gordon M. Bragg, "***Principles of Experimentation and Measurement***", Prentice – Hall, inc., Englewood[
- [02] David H. Loyd, "***Physics – Laboratory Manual***", Secound Edition, Saunders College Publishing , (1997).
- [03] M. J. V. Bell, "***Roteiros – Laboratório de Física I***", Dep. De Física, ICE, UFJF, (2002).
- [04] Roberto A. Stempniak, "***Alguns Aspectos da Física da Luz***", Escola de Inverno de 11 a 17 de julho de 1999, ITA, São José dos Campos –SP.
- [05] G. L. Squires, "***Practical Physics***", 3rd. edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.