Hidrodinâmica

Bernhard Lesche

1 Dedução das equações básicas da dinâmica

A formulação da mecânica em termos de partículas não é muito apropriada para o estudo do escoamento de fluidos. Nesta descrição com partículas aponta-se para cada partícula k com um vetor posição $\vec{r}_k(t)$ e a dinâmica do sistema de N partículas é formulada com um sistema de N equações diferenciais cujas incógnitas são os N vetores posição em função do tempo. O problema com este tipo de descrição reside no grande número de equações, pois N é tipicamente algo na ordem de 10^{24}. É mais fácil tratar um sistema de muitos corpos com a linguagem de teoria de campos. Nesta abordagem usamos vetores posição $\vec{r}$ que não são incógnitas mas servem para apontar para lugares de nossa escolha. O estado do sistema físico é descrito com funções de $\vec{r}$ e t cujos valores descrevem condições locais da matéria como densidade, velocidade, etc.

Para poder formular a dinâmica de um fluido precisamos reformular a segunda lei de Newton na linguagem de campos. Primeiramente vamos olhar para a segunda lei de Newton na linguagem original:

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k = \sum_{l \neq k} \vec{F}_{k \leftarrow l} + \vec{F}_{k\,\text{externa}} \tag{1.1}$$

m_k é o valor da massa da k-esima partícula, $\ddot{\vec{r}}_k$ é sua aceleração, $\vec{F}_{k \leftarrow l}$ é a força que a partícula l exerce sobre a partícula k e $\vec{F}_{k\,\text{externa}}$ é alguma força externa que atua sobre a partícula k. Para transferir esta lei para a linguagem de campos é conveniente interpretá-la como uma lei de conservação de momento linear:

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \sum_{l \neq k} \vec{F}_{k \leftarrow l} + \vec{F}_{k\,\text{externa}} \tag{1.2}$$

com $\vec{p}_k = m_k \dot{\vec{r}}_k$. Nesta forma podemos interpretar a equação da seguinte forma: a partícula k possui um momento linear $m_k \dot{\vec{r}}_k$ e este momento linear só pode mudar se houver uma troca de momento linear com o resto do universo. As forças que atuam sobre a partícula k recebem desta forma a interpretação de fluxos de momento linear. Estas forças descrevem taxas de transferência de momento linear para a partícula.

Para adaptar esta lei à linguagem de campo devemos separar do resto do universo não mais uma dada partícula mas tudo que está dentro de um dado volume V. A lei de conservação de momento linear terá então a seguinte forma: o momento linear do volume, que é a soma dos momenta de todas as partículas que se encontram momentaneamente no volume, só pode mudar por causa de fluxos de momento linear pela superfície do volume. Mas teremos dois tipos de fluxo diferentes: as forças que partículas fora do volume exercem sobre as dentro do volume são naturalmente fluxos de momento linear, mas agora teremos também fluxos diretos pelas próprias partículas, pois as partículas podem entrar e sair no volume e transportar momento linear para dentro e para fora. Consequentemente teremos que tratar de três grandezas para formular uma equação de balanço de momento linear: 1) a taxa de variação do momento linear do volume, 2) o fluxo de momento linear correspondente ao momento transportado por partículas que atravessam a superfície do volume e 3) um fluxo de momento linear correspondente a forças que atuam sobre partículas dentro do volume e que são exercidas por objetos fora do volume.

Para descrever estas três parcelas da equação de balanço vamos agora adotar uma linguagem de campo. Este passo envolve aproximações. Por exemplo para descrever a massa total contida num volume num instante t teríamos que somar exatamente as massas de todas as partículas que estão dentro do volume neste instante . Mas de forma aproximada podemos descrever esta massa através de uma função densidade de massa de tal forma que a massa dentro do volume seja uma integral de volume da função densidade:

$$M(t) = \iiint\limits_V \rho(\vec{r},t)\, d^3\vec{r} \tag{1.3}$$

Esta descrição envolve uma aproximação. A todo rigor a massa pode ter somente certos valores discretos, mas imaginamos a função ρ como uma função contínua de tal forma que qualquer pequena modificação do volume de integração V provocaria uma alteração arbitrariamente pequena na massa dentro do volume. Da mesma forma podemos pensar numa densidade de número de partículas. Esta descrição também é aproximativa permitindo que formalmente apareçam frações de uma partícula. Vamos definir tal densidade de partículas não apenas no espaço, mas vamos defini-la no espaço de posições e velocidades:

$$n(V,W,t) = \iiint\limits_V \iiint\limits_W f(\vec{r},\vec{w},t)\; d^3\vec{w}\, d^3\vec{r} \tag{1.4}$$

$n(V,W,t)$ seria o número de partículas dentro do volume V que possuem uma velocidade dentro de um volume W do espaço de velocidades $\vec{w}$. Vamos desenvolver toda a teoria para um fluido de uma única espécie química de tal forma que todas as partículas tenham a mesma massa *m*. É fácil generalizar depois todo o formalismo para várias espécies. Podemos escrever a densidade de massa com a ajuda da densidade *f*:

$$\rho(\vec{r},t) = m \iiint\limits_\infty f(\vec{r},\vec{w},t)\, d^3\vec{w} \tag{1.5}$$

onde indicamos com um símbolo ∞ que a integral é feita sobre todo o espaço de velocidades.

Vamos agora tratar do item 2) do balanço de momento linear isto é do fluxo de momento linear correspondente ao momento transportado por partículas que atravessam a superfície do volume. Primeiramente recordaremos de resultados antigos sobre densidade de correntes. Imagine uma densidade ε_E de partículas de certa espécie E de tal forma que o número de partículas desta espécie dentro de um volume qualquer V seja dado por

$$N(V) = \iiint\limits_V \varepsilon_E(\vec{r})\, d^3\vec{r} \quad .$$

Vamos supor que todas estas partículas tenham a mesma velocidade $\vec{w}_E$ e que elas transportem alguma grandeza física *G*. Seja g_E o valor da grandeza que cada partícula da espécie E representa. Por exemplo se a grandeza fosse a carga elétrica e as partículas elétrons, teríamos $g_E = -1,602177... \times 10^{-19}\,\mathrm{As}$. Neste caso a densidade de corrente da grandeza G seria dada por

$$\vec{j}_G = \varepsilon_E g_E \vec{w}_E \tag{1.6}$$

Agora imagine que tenhamos várias espécies diferentes cada uma com a sua velocidade $\vec{w}_E$ e com o seu valor g_E. Por exemplo, podemos pensar em um eletrólito com uma espécie A negativamente carregada com $g_A = -1,602177... \times 10^{-19}\,\mathrm{As}$ e velocidade $\vec{w}_A = -1,602177... \times 10^{-19}\,\mathrm{As} \cdot \eta_A \cdot \vec{E}$ e uma espécie B positivamente carregada com $g_B = +1,602177... \times 10^{-19}\,\mathrm{As}$ e velocidade $\vec{w}_B = 1,602177... \times 10^{-19}\,\mathrm{As} \cdot \eta_B \cdot \vec{E}$, onde $\vec{E}$ é um campo elétrico aplicado ao eletrólito e η_A e η_B seriam as respectivas mobilidades. Neste caso a densidade de corrente da grandeza G seria

$$\vec{j}_G = \sum_E \varepsilon_E g_E \vec{w}_E \tag{1.7}$$

Esta fórmula vale para qualquer grandeza G. Esta grandeza não precisa ser um escalar. Se G for, por exemplo, um vetor, o produto $g_E \vec{w}_E$ seria um produto tensorial e a densidade de corrente $\vec{j}_G$ seria um tensor. Nestas condições podemos utilizar a fórmula (1.7) para avaliar a densidade de corrente de momento linear. O que seria a espécie E seriam partículas que têm todas a mesma velocidade $\vec{w}$ e no lugar da soma teríamos uma integral sobre as velocidades, já que neste caso temos espécies que variam continuamente. A densidade de fluxo de momento linear transportado pelas partículas seria então

$$\overset{\leftrightarrow}{j}_P(\vec{r},t) \;=\; \iiint_\infty f(\vec{r},\vec{w},t)\, m\vec{w} \otimes \vec{w}\, d^3\vec{w} \tag{1.8}$$

A seta dupla sobre j indica que se trata de um tensor. O fluxo de momento linear para fora de um volume devido ao transporte das partículas seria então:

$$\vec{\phi}_P(V,t) = \oiint_{\partial V} \overset{\leftrightarrow}{j}_P(\vec{r},t) \cdot d\vec{S} \tag{1.9}$$

A parte de fluxo de momento devido às forças pode igualmente ser expressa através de uma densidade de fluxo. Mas na prática vamos adotar esta forma de descrição somente com as forças de curto alcance. Vamos então dividir as forças em forças de curto alcance (que caem mais rapidamente do que distancia^{-2}) e forças de longo alcance (que caem quadraticamente com a distância). Para as forças de curto alcance podemos definir um tensor de tensão $\overset{\leftrightarrow}{T}_{FCA}$ (com índice FCA=Força de Curto Alcance) tal que a integral de superfície

$$\vec{F}_{FCA}(V,t) = \oiint_{\partial V} \overset{\leftrightarrow}{T}_{FCA}(\vec{r},t) \cdot d\vec{S} \tag{1.10}$$

sobre a superfície de um volume V forneça a soma das forças de curto alcance que as partículas fora do volume exercem sobre aquelas dentro do volume. Isto deve valer para qualquer volume V e esta condição (1.10) define então o tensor $\overset{\leftrightarrow}{T}_{FCA}$. Do ponto de vista da mecânica Newtoniana não faria sentido representar também as forças de longo alcance na forma de uma integral de superfície, pois eles representam Newtonianamente uma ação à distância. Isto significa que podemos imaginar que elas representam uma transferência de momento linear que não atravessa a superfície mas de certa forma pula para dentro do volume sem passar pela superfície. Mais tarde, quando todas as forças são descritas com a ajuda de campos que também possuem momento linear, pode-se mostrar que as forças de longo alcance também permitem uma representação em forma de integral de superfície. Mas aqui descreveremos estas com uma densidade de força de longo alcance $\vec{f}_{FLA}$ de tal forma que a soma das forças de longo alcance que atuam sobre todas as partículas dentro de um volume V seja dada por

$$\vec{F}_{FLA}(V,t) = \iiint_V \vec{f}_{FLA}(\vec{r},t)\, d^3\vec{r} \tag{1.11}$$

Por último, falta o item 1) da equação de balaço de momento. O momento linear total de um dado volume V no instante t é obviamente $\iiint_V \iiint_\infty f(\vec{r},\vec{w},t)\, m\,\vec{w}\, d^3\vec{w}\, d^3\vec{r}$ então a taxa de variação deste momento linear é

$$\dot{\vec{P}}(V,t) \;=\; \iiint_V \iiint_\infty \frac{\partial f(\vec{r},\vec{w},t)}{\partial t}\, m\,\vec{w}\, d^3\vec{w}\, d^3\vec{r} \tag{1.12}$$

Estamos prontos para montar a equação de balanço de momento. Somente temos que prestar atenção nos sinais; o fluxo de momento linear devido às forças é contado de fora para dentro do volume, enquanto o fluxo de momento transportado pelas partículas é contado de dentro para fora. Correspondentemente, temos que escrever a parcela do transporte no mesmo lado da taxa de variação do momento:

$$\begin{aligned} &\iiint_V \iiint_\infty \frac{\partial f(\vec{r},\vec{w},t)}{\partial t}\, m\,\vec{w}\, d^3\vec{w}\, d^3\vec{r} + \oint\!\!\!\oint_{\partial V} \left[\iiint_\infty f(\vec{r},\vec{w},t)\, m\vec{w}\otimes\vec{w}\, d^3\vec{w} \right]\cdot d\vec{S} \;= \\ &= \oint\!\!\!\oint_{\partial V} \vec{T}_{FCA}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S} + \iiint_V \vec{f}_{FLA}(\vec{r},t)\, d^3\vec{r} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Podemos utilizar o teorema de Gauss para transformar as integrais de superfície em integrais de volume e podemos utilizar o fato que tudo deva valer para qualquer volume, de tal forma que a igualdade deva valer para os integrandos:

$$\begin{aligned} &\iiint_\infty \frac{\partial f(\vec{r},\vec{w},t)}{\partial t}\, m\,\vec{w}\, d^3\vec{w} + div\left[\iiint_\infty f(\vec{r},\vec{w},t)\, m\vec{w}\otimes\vec{w}\, d^3\vec{w} \right] \;= \\ &= \; div\left[\vec{T}_{FCA}(\vec{r},t)\right] + \vec{f}_{FLA}(\vec{r},t) \end{aligned} \tag{1.14}$$

Nesta equação o operador de divergência é aplicado a um tensor e isto resulta num vetor. Se $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ for a base vetorial ortonormal associada as coordenadas cartesianas $\{x_1, x_2, x_3\}$ a divergência de um campo tensorial

$$\vec{T}(x_1,x_2,x_3) = \sum_{l,k=1}^{3} T_{lk}(x_1,x_2,x_3)\, \vec{b}_l \otimes \vec{b}_k \tag{1.15}$$

é dada por

$$div\left[\vec{T}(x_1,x_2,x_3)\right] = \sum_{l,k=1}^{3} \frac{\partial T_{lk}(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_k}\, \vec{b}_l \tag{1.16}$$

Na prática a equação de balaço de momento linear não é usada na forma (1.14). Nas aplicações separa-se das velocidades das partículas uma parte que representa o movimento macroscópico do fluido. Podemos identificar a velocidade média calculada com a densidade f com a velocidade macroscópica do fluido. Vamos chamar esta velocidade média de $\vec{v}$. Ela é dada por

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \frac{\iiint\limits_{\infty} f(\vec{r},\vec{w},t)\,\vec{w}\,d^3\vec{w}}{\iiint\limits_{\infty} f(\vec{r},\vec{w},t)\,d^3\vec{w}} \tag{1.17}$$

Com a equação (1.5) podemos escrever isto também como

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \frac{m\iiint\limits_{\infty} f(\vec{r},\vec{w},t)\,\vec{w}\,d^3\vec{w}}{\rho(\vec{r},t)} \tag{1.18}$$

Com este campo de velocidades podemos agora expressar o primeiro termo na equação (1.14). Temos

$$m\iiint\limits_{\infty} f(\vec{r},\vec{w},t)\,\vec{w}\,d^3\vec{w} = \rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t) \tag{1.19}$$

e consequentemente

$$\iiint\limits_{\infty} \frac{\partial f(\vec{r},\vec{w},t)}{\partial t}\, m\,\vec{w}\,d^3\vec{w} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)\right] \tag{1.20}$$

Agora vamos reescrever o segundo temo com a ajuda da velocidade macroscópica. Vamos primeiramente reescrever o tensor e depois calcular a divergência do mesmo:

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{\infty} f(\vec{r},\vec{w},t)\,m\vec{w}\otimes\vec{w}\,d^3\vec{w} = \\ &\qquad \iiint\limits_{\infty} f(\vec{r},\vec{v}(\vec{r},t)+\vec{u},t)\,m\left[\vec{v}(\vec{r},t)+\vec{u}\right]\otimes\left[\vec{v}(\vec{r},t)+\vec{u}\right]d^3\vec{u}\end{aligned} \tag{1.21}$$

Neste primeiro passo mudamos simplesmente a variável de integração transladando no espaço das velocidades. Abrindo o produto tensorial teríamos quatro termos: $\vec{v}\otimes\vec{v}$, $\vec{v}\otimes\vec{u}$, $\vec{u}\otimes\vec{v}$ e $\vec{u}\otimes\vec{u}$. Os dois termos mistos são zero. Pois temos

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{\infty} f(\vec{r},\vec{v}+\vec{u},t)\,m\vec{v}\otimes\vec{u}\,d^3\vec{u} = m\vec{v}\otimes\iiint\limits_{\infty} f(\vec{r},\vec{v}+\vec{u},t)\,\vec{u}\,d^3\vec{u} = \\ &\qquad m\vec{v}\otimes\iiint\limits_{\infty} f(\vec{r},\vec{u},t)\left[\vec{u}-\vec{v}\right]d^3\vec{u} = \vec{v}\otimes\left[\vec{v}-\vec{v}\right]\rho = 0\end{aligned} \tag{1.22}$$

Então obtemos:

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{\infty} f(\vec{r},\vec{w},t)\,m\vec{w}\otimes\vec{w}\,d^3\vec{w} = \\ &\qquad \vec{v}(\vec{r},t)\otimes\vec{v}(\vec{r},t)\iiint\limits_{\infty} f(\vec{r},\vec{v}(\vec{r},t)+\vec{u},t)\,m\,d^3\vec{u} + \iiint\limits_{\infty} f(\vec{r},\vec{v}(\vec{r},t)+\vec{u},t)\,m\,\vec{u}\otimes\vec{u}\,d^3\vec{u} = \\ &\qquad = \vec{v}(\vec{r},t)\otimes\vec{v}(\vec{r},t)\,\rho(\vec{r},t) + \iiint\limits_{\infty} f(\vec{r},\vec{v}(\vec{r},t)+\vec{u},t)\,m\,\vec{u}\otimes\vec{u}\,d^3\vec{u}\end{aligned}$$

(1.23)

Como podemos ver, o transporte de momento linear pelas partículas tem duas contribuições: uma é devido ao movimento macroscópico do fluido e a outra é por conta de graus de liberdade que não se manifestam através de movimentos macroscópicos.

Neste aspecto o transporte de momento linear é diferente do transporte de massa. Para a densidade de corrente de massa obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{j}_m(\vec{r},t) &= m\iiint_{\infty} f(\vec{r},\vec{w},t)\,\vec{w}\,d^3\vec{w} \quad = \\ &= \rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t) \end{aligned} \tag{1.24}$$

Somente a parte do movimento macroscópico contribui. Isto acontece por que na integral os desvios da média das velocidades cancelam. Por outro lado no transporte de momento linear os desvios entram quadraticamente e não cancelam.

É interessante escrever a parte de transporte de momento linear devido aos graus internos de liberdade, ou seja aqueles que não se manifestam como movimento macroscópico, num referencial que se move com a velocidade macroscópica local do fluido. Vamos definir uma densidade de partículas neste referencial:

$$g(\vec{r},\vec{u},t) \underset{def.}{=} f(\vec{r},\vec{v}(\vec{r},t)+\vec{u},t) \tag{1.25}$$

Geralmente esta distribuição não deva diferir muito de uma distribuição de Maxwell-Boltzmann com alguma temperatura $T(\vec{r},t)$ que podemos momentaneamente e localmente definir de forma aproximada. Com isto o tensor de densidade de fluxo de momento devido ao transporte pelas partículas fica com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\iiint_{\infty} f(\vec{r},\vec{w},t)\,m\vec{w}\otimes\vec{w}\,d^3\vec{w} \quad = \\ &= \rho(\vec{r},t)\,\vec{v}(\vec{r},t)\otimes\vec{v}(\vec{r},t) \;+\; \iiint_{\infty} g(\vec{r},\vec{u},t)\,m\,\vec{u}\otimes\vec{u}\,d^3\vec{u} \end{aligned} \tag{1.26}$$

Chamaremos a primeira parcela de transporte convectivo de momento linear e a segunda de transporte difusivo de momento linear.

Precisamos da divergência deste tensor. Vamos primeiro olhar para a divergência do primeiro termo, do *termo convectivo*:

$$div[\rho\,\vec{v}\otimes\vec{v}] \;=\; \rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} \;+\; \vec{v}\,div(\rho\vec{v}) \tag{1.27}$$

Naturalmente vale uma conservação de massa, já que na descrição Newtoniana com partículas não há criação nem destruição de partículas. Consequentemente vale

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\vec{j}_m) = 0 \tag{1.28}$$

Com as equações (1.24) e (1.28), podemos reescrever a (1.27) da seguinte forma:

$$div[\rho\,\vec{v}\otimes\vec{v}] \;=\; \rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} \;-\; \vec{v}\,\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{1.29}$$

Com isto podemos finalmente juntar as peças para a formulação da equação de balanço de momento linear:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho\vec{v}] + \rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} \;-\; \vec{v}\,\frac{\partial\rho}{\partial t} \;=\; div\left[\vec{T}_{FCA}(\vec{r},t) - \iiint_{\infty} g(\vec{r},\vec{u},t)\,m\,\vec{u}\otimes\vec{u}\,d^3\vec{u}\right] + \vec{f}_{FLA}(\vec{r},t) \tag{1.30}$$

Jogamos o termo de densidade de fluxo transportado pelas partículas para o outro lado da equação. Juntemos os dois tensores numa única expressão:

$$\vec{\vec{\sigma}}(\vec{r},t) \underset{def.}{=} \vec{T}_{FCA}(\vec{r},t) - \iiint_{\infty} g(\vec{r},\vec{u},t)\, m\, \vec{u} \otimes \vec{u}\, d^3\vec{u} \tag{1.31}$$

e podemos simplificar o lado esquerdo da equação de balanço (1.30):

$$\boxed{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} \;=\; div[\vec{\vec{\sigma}}] + \vec{f}_{FLA}} \tag{1.32}$$

Reconhecemos no lado esquerdo a derivada convectiva da velociade:

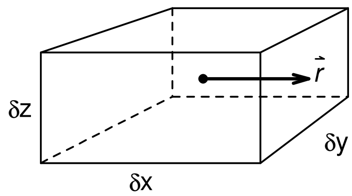
$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\right]\vec{v} \;=\; div[\vec{\vec{\sigma}}] + \vec{f}_{FLA} \tag{1.33}$$

Usaremos a seguinte abreviação para a derivada convectiva:

$$\mathbb{D} \underset{def.}{=} \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\right] \tag{1.34}$$

Para esta operação de derivada valem as regras usuais de derivada. Com este símbolo a equação (1.33) toma a forma simples:

$$\rho\mathbb{D}\vec{v} = div[\vec{\vec{\sigma}}] + \vec{f}_{FLA} \tag{1.35}$$



Para que esta equação funcione como equação que determine a dinâmica precisamos conhecer o tensor $\vec{\vec{\sigma}}$. Este tensor é geralmente descrito fenomenologicamente em termos de parâmetros macroscópicos. Vejamos primeiro as propriedades deste tensor: Imagine um pequeno volume no fluido como na figura 1. Para δx, δy, δz muito pequenos a integral de superfície do tensor $\vec{\vec{\sigma}}$, tomado sobre a superfície deste volume,

$$\oiint \vec{\vec{\sigma}}\cdot d\vec{S}$$

é proporcional ao volume $\delta x\delta y\delta z$ e o fator de proporcionalidade contem somente derivadas do campo tensorial $\vec{\vec{\sigma}}$:

$$\oiint \vec{\vec{\sigma}}\cdot d\vec{S} \xrightarrow[\delta x,\delta y,\delta z\to 0]{} \delta x\delta y\delta z\cdot div(\vec{\vec{\sigma}}) \tag{1.36}$$

A situação é bem diferente com o torque transmitido ao volume pelo campo $\vec{\vec{\sigma}}$. Este seria dado por

$$\oiint \vec{r}\times(\vec{\vec{\sigma}}\cdot d\vec{S}) \tag{1.37}$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição apontando para os lugares de integração a partir de alguma origem. Com a origem no centro do cubo obtemos como primeiro termo para pequenos δx, δy, δz

$$\oiint \vec{r}\times(\vec{\vec{\sigma}}\cdot d\vec{S}) \xrightarrow[\delta x,\delta y,\delta z\to 0]{} \delta x\delta y\delta z\left\{\hat{i}\times(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{i}) + \hat{j}\times(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{j}) + \hat{k}\times(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{k})\right\} \tag{1.38}$$

Por outro lado, quando δx, δy, δz foram tão pequenos que a densidade de massa é uniforme, o momento de inércia do volume é proporcional a $(\delta x\delta y\delta z)^{5/3}$. Isto significa que a aceleração angular teria um comportamento divergente a não ser que o vetor $\left\{\hat{\imath}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\imath}\right)+\hat{\jmath}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\jmath}\right)+\hat{k}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{k}\right)\right\}$ fosse nulo. Temos então a seguinte condição que o tensor $\vec{\vec{\sigma}}$ deve satisfazer:

$$\left\{\hat{\imath}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\imath}\right)+\hat{\jmath}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\jmath}\right)+\hat{k}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{k}\right)\right\}=0 \tag{1.39}$$

As três componentes deste vetor são

$$\hat{\imath}\cdot\left\{\hat{\imath}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\imath}\right)+\hat{\jmath}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\jmath}\right)+\hat{k}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{k}\right)\right\}=\hat{\imath}\cdot\left[\hat{\jmath}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\jmath}\right)\right]+\hat{\imath}\cdot\left[\hat{k}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{k}\right)\right]=\sigma_{32}-\sigma_{23}$$

$$\hat{\jmath}\cdot\left\{\hat{\imath}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\imath}\right)+\hat{\jmath}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\jmath}\right)+\hat{k}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{k}\right)\right\}=\hat{\jmath}\cdot\left[\hat{\imath}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\imath}\right)\right]+\hat{\jmath}\cdot\left[\hat{k}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{k}\right)\right]=-\sigma_{31}+\sigma_{13}$$

$$\hat{k}\cdot\left\{\hat{\imath}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\imath}\right)+\hat{\jmath}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\jmath}\right)+\hat{k}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{k}\right)\right\}=\hat{k}\cdot\left[\hat{\jmath}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{\jmath}\right)\right]+\hat{k}\cdot\left[\hat{k}\times\left(\vec{\vec{\sigma}}\cdot\hat{k}\right)\right]=-\sigma_{12}+\sigma_{21}$$

Então a condição (1.39) significa que o tensor $\vec{\vec{\sigma}}$ deve ser simétrico: $\sigma_{ik}=\sigma_{ki}$.

Antes de prosseguir com a análise do tensor $\vec{\vec{\sigma}}$ segue um comentário sobre o momento angular. É claro que a parcela da integral (1.37) devido ao termo difusivo

$$-\oiint\iiint_{\infty} g\left(\vec{r},\vec{u},t\right)\vec{r}\times\left\{\left(m\,\vec{u}\otimes\vec{u}\right)d^3\vec{u}\cdot d\vec{S}\right\}$$

representa um fluxo de momento angular. A outra parcela devido às forças

$$\oiint\vec{r}\times\left\{\vec{\vec{T}}_{FCA}\left(\vec{r},t\right)\cdot d\vec{S}\right\} \tag{1.40}$$

é um pouco mais problemática: Na mecânica de Newton o torque (=fluxo de momento angular) é dado por

$$\sum_k \vec{r}_k\times\vec{F}_k$$

onde se soma sobre as partículas do sistema, $\vec{r}_k$ é o vetor posição da k-esima partícula e $\vec{F}_k$ a força que atua sobre esta partícula. Como as forças na integral (1.40) são supostamente de curto alcance, os vetores posição $\vec{r}$, que apontam para os pedaços de superfície da integração, apontam praticamente também para as partículas sobre as quais as forças atuam. Isto justifica a interpretação da integral como um fluxo de momento angular. Dentro da mecânica de Newton este tipo de representação do torque como integral de superfície não seria possível com as forças de longo alcance. Mas se a linguagem de campo for estendida sobre as forças (como no eletromagnetismo) a situação muda. Neste caso o próprio campo que descreve as forças possui momento linear e momento angular e neste caso o torque pode ser escrito como integral de superfície mesmo com forças de longo alcance.

Se olharmos o valor do campo $\vec{\vec{\sigma}}$ num dado ponto $\vec{r}$ estamos vendo um objeto geométrico definido num espaço que tem um ponto, a saber o ponto $\vec{r}$, privilegiado. Todas as rotações em torno deste ponto fixo são operações de simetria deste espaço. O estado do fluido e o valor do campo $\vec{\vec{\sigma}}$ não tem necessariamente esta simetria. Mas é certamente útil decompor o $\vec{\vec{\sigma}}\left(\vec{r}\right)$ em componentes irredutíveis deste grupo de simetria. O espaço de tensores simétricos possui dois subespaços invariantes sob o grupo de rotações: um subespaço é formado pelos tensores múltiplos da identidade e o outro subespaço é formado pelos tensores com traço zero. Correspondentemente vamos decompor o tensor $\vec{\vec{\sigma}}$:

$$\vec{\vec{\sigma}}(\vec{r},t) \;=\; -p(\vec{r},t)\mathbf{1} \;+\; \vec{\vec{\theta}}(\vec{r},t) \qquad \text{com} \quad Tr\left(\vec{\vec{\theta}}(\vec{r},t)\right)=0 \qquad (1.41)$$

Isto define a grandeza escalar p chamada *pressão do fluido*. A pressão é a parte escalar da parte não convectiva da densidade de fluxo de momento linear. Esta parte é em geral diferente de zero mesmo em estados de equilíbrio termodinâmico. Isto é um exemplo que fluxos podem ser diferentes de zero em sistemas em equilíbrio termodinâmico (contrariando inúmeras afirmações em livros texto de termodinâmica).

p e $\vec{\vec{\theta}}$ são determinados pela função densidade f . Mas na prática não trabalharemos com esta densidade. No lugar disso usaremos poucos campos que caracterizam f, o suficiente para poder ter determinados valores de p e $\vec{\vec{\theta}}$. Os campos usados são a densidade do fluido ρ , o campo de velocidades macroscópicas $\vec{v}$ e um terceiro campo que caracteriza um aspecto microscópico da matéria. Para este terceiro campo podemos fazer diferentes escolhas: Uma possibilidade seria escolher o segundo momento da distribuição de velocidades:

$$\tau(\vec{r},t) \underset{def.}{=} \frac{\iiint\limits_{\infty} f(\vec{r},\vec{w},t)\left\{\vec{w}-\vec{v}(\vec{r},t)\right\}^2 d^3\vec{w}}{\iiint\limits_{\infty} f(\vec{r},\vec{w},t)\, d^3\vec{w}} \qquad (1.42)$$

Outra seria um campo de densidade de energia interna $e(\vec{r},t)$, outra um campo de densidade de entropia $s(\vec{r},t)$ ou ainda um campo de temperatura $T(\vec{r},t)$. Para fluidos cujas partículas permitem uma descrição clássica, resulta a última opção ser equivalente a escolha do segundo momento (1.42), pois estes campos são proporcionais:

$$T(\vec{r},t)=\frac{m}{3k}\tau(\vec{r},t) \qquad (1.43)$$

onde k é a constante de Boltzmann. Para a grande maioria dos fluidos pode-se escrever p e $\vec{\vec{\theta}}$ como funções dos campos ρ, T, e de derivadas espaciais primeiras do campo de velocidades macroscópicas $\vec{v}$. Este fato não é nada trivial. Em princípio p e $\vec{\vec{\theta}}$ poderiam depender de outros detalhes da densidade f. Para descrever estes detalhes através de parâmetros macroscópicos como ρ, T e $\vec{v}$ poderia ser necessário considerar não apenas os valores instantâneos destes campos mas também a história destes valores. Ou poderiam entrar derivadas de mais alta ordem nesta descrição com campos macroscópicos. Vamos então considerar apenas estes fluidos normais e supor

$$p(\vec{r},t)=\Pi\left(\rho(\vec{r},t),T(\vec{r},t),\nabla\otimes\vec{v}(\vec{r},t)\right) \qquad (1.44)$$

e

$$\vec{\vec{\theta}}(\vec{r},t)=\vec{\vec{\Theta}}\left(\rho(\vec{r},t),T(\vec{r},t),\nabla\otimes\vec{v}(\vec{r},t)\right) \qquad (1.45)$$

com uma função escalar $\Pi(\cdot,\cdot,\vec{\vec{\cdot}})$ e uma função tensorial $\vec{\vec{\Theta}}(\cdot,\cdot,\vec{\vec{\cdot}})$ características do fluido. O fato que estas funções dependem do gradiente do campo de velocidades e não diretamente da velocidade macroscópica é fácil de entender. Um movimento uniforme do fluido todo poderia ser eliminado por uma simples mudança de referencial e este tipo de movimento do fluido não deveria provocar contribuições para as forças ou fluxos não convectivas de momento.

Tudo que elaboramos até agora foi formulado com uma linguagem especialmente adequada para fluidos. Mas em princípio poderia ser aplicado também para sólidos. Agora vamos supor uma propriedade da função $\overleftrightarrow{\Theta}(\cdot,\cdot,\overleftrightarrow{\cdot})$ que é característica dos fluidos:

Em fluidos o tensor $\overleftrightarrow{\theta}$ é zero em situações de equilíbrio estático.

Consequentemente temos

$$\overleftrightarrow{\Theta}(\rho,T,0)=0 \tag{1.46}$$

Por outro lado, a pressão em geral é diferente de 0 mesmo em situações de equilíbrio. Da termodinâmica da substância que compõe o fluido temos uma relação que expressa a pressão de equilíbrio em função da densidade e da temperatura. Esta relação é conhecida como equação térmica de estado:

$$p_{Equilíbrio}=P(\rho,T) \tag{1.47}$$

onde P é uma função característica do fluido, que se determina no estudo da termodinâmica do fluido. Para escrever as funções $\Pi(\cdot,\cdot,\overleftrightarrow{\cdot})$ e $\overleftrightarrow{\Theta}(\cdot,\cdot,\overleftrightarrow{\cdot})$ vamos usar o procedimento padrão dos físicos: escreve-se estas funções como séries de Taylor e arruma-se uma boa desculpa para terminar esta série logo depois do termo de primeira ordem. As equações (1.46) e (1.47) fornecem o ponto de partida, ou seja, o termo de ordem zero:

$$\overleftrightarrow{\Theta}(\rho,T,\nabla\otimes\vec{v})=0+\text{termo linear em }\nabla\otimes\vec{v} \tag{1.48}$$

$$\Pi(\rho,T,\nabla\otimes\vec{v})=P(\rho,T)+\text{termo linear em }\nabla\otimes\vec{v} \tag{1.49}$$

Nem todo o tensor $\nabla\otimes\vec{v}$ vai contribuir para estes termos lineares. Da mesma forma que um movimento uniforme do fluido não provoca fluxos não convectivos de momento linear, uma rotação rígida do fluido também não causa este tipo de fluxo. Pode-se mostrar que a parte anti-simétrica do tensor $\nabla\otimes\vec{v}$ descreve uma rotação rígida local do fluido. Então devemos considerar somente a parte simétrica. Se $\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3\}$, for a base vetorial ortonormal associada às coordenadas cartesianas $\{x_1,x_2,x_3\}$ esta parte simétrica é dada por:

$$\overleftrightarrow{\eta} \underset{def.}{=} \frac{1}{2}\sum_{l,k=1}^{3}\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_l}\right)\vec{b}_l\otimes\vec{b}_k \tag{1.50}$$

Novamente é conveniente decompor este tensor em componentes irredutíveis em relação ao grupo de rotações. Correspondentemente vamos separar uma parte escalar e uma parte sem traço:

$$\overleftrightarrow{\eta} = \kappa\mathbf{1} + \overleftrightarrow{\zeta} \qquad \text{com} \quad Tr\left(\overleftrightarrow{\zeta}\right)=0 \tag{1.51}$$

O traço de $\overleftrightarrow{\eta}$ é obviamente a divergência do campo $\vec{v}$ e a decomposição resulta em

$$\kappa=div(\vec{v}) \tag{1.52}$$

e

$$\vec{\zeta} = \sum_{l,k=1}^{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_l}\right)-\frac{1}{3}\delta_{lk}div\left(\vec{v}\right)\right]\vec{b}_l\otimes\vec{b}_k \tag{1.53}$$

É bom ver os componentes deste tensor em forma matricial:

$$\left(\vec{\zeta}_{\cdot\cdot}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{1}{3}div\left(\vec{v}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y}-\frac{1}{3}div\left(\vec{v}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{1}{3}div\left(\vec{v}\right) \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

Os termos lineares, escritos em termos de componentes de tensores, seriam então da seguinte forma:

$$\left(\text{termo linear de }\Theta\right)_{ij} \quad = \quad A_{ij}\kappa \; + \; \sum_{l,k=1}^{3} B_{ijlk}\zeta_{lk} \tag{1.55}$$

e

$$\left(\text{termo linear de }\Pi\right) \quad = \quad C\kappa \; + \; \sum_{l,k=1}^{3} D_{lk}\zeta_{lk} \tag{1.56}$$

Estas relações devem ser de tal forma que não privilegiem nenhuma direção no espaço. A única maneira de garantir isto[1] é com

$$A_{ij}=0, \quad D_{ij}=0, \quad B_{ijlk}\sim\delta_{il}\delta_{jk} \tag{1.57}$$

Tradicionalmente a constante de proporcionalidade de $B_{ijlk}\sim\delta_{il}\delta_{jk}$ é escrita como 2μ [2]e a constante de proporcionalidade C como μ_V . Estas constantes são constantes em relação ao κ e ζ_{ij}, mas podem depender da densidade e da temperatura do fluido. O parâmetro μ é chamado de *viscosidade* do fluido e o parâmetro μ_V de *viscosidade volumar*. Na prática eles são determinados experimentalmente, mas em princípio podem ser calculados para determinados casos com métodos da mecânica estatística. Juntando tudo podemos agora escrever o tensor $\vec{\vec{\sigma}}$ (em componentes):

[1] Aqui entram argumentos de teoria de grupos. Por exemplo não existe mapeamento linear pertencente à representação idêntica que relacione duas representações inequivalentes.

[2] Os engenheiros americanos usam 2μ , os físicos usam normalmente 2η .

$$
(\vec{\sigma})_{\cdot\cdot} = \begin{pmatrix} -P+\left(\mu_V-\frac{2\mu}{3}\right)div(\vec{v}) & 0 & 0 \\ 0 & -P+\left(\mu_V-\frac{2\mu}{3}\right)div(\vec{v}) & 0 \\ 0 & 0 & -P+\left(\mu_V-\frac{2\mu}{3}\right)div(\vec{v}) \end{pmatrix}
$$

$$
+\mu\begin{pmatrix} 2\frac{\partial v_x}{\partial x} & \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & 2\frac{\partial v_y}{\partial y} & \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & 2\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}
\tag{1.58}
$$

Precisamos da divergência deste tensor. Vamos calcular a componente 1 (componente x). As outras componentes podem então ser adivinhadas facilmente:

$$
\begin{aligned}
div(\sigma_{x\cdot}) = {} & \frac{\partial}{\partial x}\left\{-P+\left(\mu_V-\frac{2\mu}{3}\right)div(\vec{v})\right\} + \frac{\partial}{\partial y}0 + \frac{\partial}{\partial z}0 \\
& +\mu 2\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)
\end{aligned}
\tag{1.59}
$$

$$
= -\frac{\partial P}{\partial x} + \left(\mu_V+\frac{\mu}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x}div(\vec{v}) + \mu\,\Delta v_x
$$

Adivinhando as outras componentes podemos escrever o resultado em forma vetorial:

$$
div(\vec{\sigma}) = -grad(P) + \left(\mu_V+\frac{\mu}{3}\right)grad\left(div(\vec{v})\right) + \mu\,\Delta\vec{v} \tag{1.60}
$$

Nesta equação e em futuras equações escrevemos de forma curta apenas P para a função espaço-temporal $P\left(\rho(\vec{r},t),T(\vec{r},t)\right)$ abusando do símbolo da função termodinâmica $P(\rho,T)$.

Com isto podemos escrever a forma final da equação de conservação de momento linear:

$$
\boxed{\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\right]\vec{v} = -\nabla P + \left(\mu_V+\frac{\mu}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\vec{v}) + \mu\,\Delta\vec{v} + \vec{f}_{FLA}} \tag{1.61}
$$

ou com o símbolo da derivada convectiva:

$$
\rho\mathbb{D}\,\vec{v} = -\nabla P + \left(\mu_V+\frac{\mu}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\vec{v}) + \mu\,\Delta\vec{v} + \vec{f}_{FLA} \tag{1.62}
$$

Esta é a famosa equação de Navier Stokes. Esta equação sozinha não determina ainda a dinâmica do fluido. A equação, sendo uma equação vetorial, tem três componentes. Então podemos contá-la como três equações diferenciais. Mas temos as incógnitas v_x, v_y, v_z, ρ e *T*. Além disso a pressão P e os coeficientes de viscosidade devem ser conhecidas funções de ρ e *T*. Precisamos então de mais duas equações para formar um conjunto com um número de equações que iguala o número de incógnitas. Uma equação podemos escrever prontamente; a equação de conservação de massa:

$$div\left(\rho\vec{v}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \tag{1.63}$$

A última equação que falta para completar o sistema é a equação de conservação de energia.

Obviamente existem formas de energia que não aparecem como energias mecânicas associadas ao movimento macroscópico do fluido. Uma molécula pode ter uma velocidade $\vec{w}$ consideravelmente diferente da velocidade macroscópica $\vec{v}$ e consequentemente ela forneceria uma contribuição para a energia cinética diferente do termo $\vec{v}^2 m/2$. Mas infelizmente um tratamento microscópico das energias é bem complicado pois a parte de energia potencial das partículas precisaria de uma densidade no espaço de posições e velocidades de duas partículas; $f^{(2)}\left(\vec{r}_1,\vec{w}_1,\vec{r}_2,\vec{w}_2,t\right)$. Por esta razão vamos adotar logo uma descrição fenomenológica da energia. Na termodinâmica de equilíbrio considera-se esta possibilidade de energias que não se manifestam na forma mecânica macroscópica pela introdução da *energia interna* *U*. Para uma dada quantidade de fluido em equilíbrio termodinâmico pode-se determinar esta grandeza como função da densidade e da temperatura. Porém U é determinado somente até uma constante aditiva de livre escolha. Podemos introduzir agora uma energia interna específica ε dividindo os valores de U pela massa M da quantidade de fluido usada na determinação de *U*. Isto faz sentido desde que a quantidade seja suficientemente grande de tal forma que contribuições de superfície possam ser desprezadas e U possa ser considerada uma função proporcional à massa.

$$\varepsilon\left(\rho,T\right) \underset{def.}{=} \frac{U\left(\rho,T\right)}{M} \tag{1.64}$$

O que acontece com a constante arbitrária da energia interna? Se mudarmos U para $\tilde{U}=U+U_0$ a energia interna específica ganharia uma constante U_0/M. Mais tarde veremos que esta arbitrariedade não perturba na formulação da conservação de energia. Se podemos, de forma aproximada, associar temperaturas aos diversos locais no fluido em movimento, podemos formar uma densidade de energia interna

$$\rho_U\left(\vec{r},t\right) = \rho\left(\vec{r},t\right)\varepsilon\left(\rho\left(\vec{r},t\right),T\left(\vec{r},t\right)\right) \tag{1.65}$$

Além desta densidade de energia temos a densidade de energia cinética do movimento macroscópico:

$$\rho_{ECmacros}\left(\vec{r},t\right) = \frac{\rho\left(\vec{r},t\right)}{2}\left[\vec{v}\left(\vec{r},t\right)\right]^2 \tag{1.66}$$

O movimento macroscópico do fluido acarreta naturalmente um transporte destas energias com uma densidade de fluxo de energia correspondente:

$$\vec{j}_{Energ,\,convectivo} = \left[\frac{\rho}{2}\vec{v}^2 + \rho\varepsilon\right]\vec{v} \tag{1.67}$$

Mas evidentemente existem outras densidades de fluxo de energia. Os movimentos individuais das partículas, que podem desviar da velocidade média $\vec{v}$, contribuem para um transporte difusivo da energia. E forças que atuam sobre as partículas transferem energia. Na tentativa de descrever estes fluxos de energia fenomenologicamente usa-se uma abordagem termodinâmica: primeiramente separa-se uma parcela que do ponto de vista da mecânica macroscópica seria trabalho de forças. Se adotarmos um ponto de vista macroscópico que ignora a existência de partículas atômicas e olharmos a equação de Navier-Stokes na forma (1.33) devemos dar aos termos do lado direito $div\left[\vec{\vec{\sigma}}\right] + \vec{f}_{FLA}$ a interpretação de densidade de força. Pois o lado esquerdo

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\right]\vec{v}$$

seria uma densidade de massa vezes aceleração, já que $\left[\partial/\partial t + \left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\right]\vec{v}$ é a aceleração de uma fração do fluido. Do ponto de vista microscópico sabemos que esta interpretação está errada porque dentro do termo $div\left[\vec{\vec{\sigma}}\right]$ existem parcelas que não correspondem a forças. Mas do ponto de vista macroscópico vamos contar isto como força. Consequentemente consideraríamos

$$\oiint_{\partial V} \vec{v}\left(\vec{r},t\right)\cdot\vec{\vec{\sigma}}\cdot d\vec{S} + \iiint_V \vec{v}\left(\vec{r},t\right)\cdot\vec{f}_{FLA}\left(\vec{r},t\right)d^3\vec{r} \tag{1.68}$$

como trabalho macroscópico que partes fora de um volume V fazem sobre as partículas dentro de *V*. Desta forma a conservação de energia teria a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho}{2}\vec{v}^2 + \rho\varepsilon\right]d^3\vec{r} + \oiint_{\partial V}\left[\frac{\rho}{2}\vec{v}^2 + \rho\varepsilon\right]\vec{v}\cdot d\vec{S} + \oiint_{\partial V}\vec{j}_{energ,difusiva}\cdot d\vec{S} &= \\ = \oiint_{\partial V}\vec{v}\left(\vec{r},t\right)\cdot\vec{\vec{\sigma}}\cdot d\vec{S} + \iiint_V \vec{v}\left(\vec{r},t\right)\cdot\vec{f}_{FLA}\left(\vec{r},t\right)d^3\vec{r}&\end{aligned} \tag{1.69}$$

onde V é um volume arbitrário e $\vec{j}_{energ,difusiva}$ seria uma densidade difusiva de corrente de energia interna. Com o teorema de Gauss podemos escrever isto em forma local:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho}{2}\vec{v}^2 + \rho\varepsilon\right] + div\left\{\left[\frac{\rho}{2}\vec{v}^2 + \rho\varepsilon\right]\vec{v}\right\} + div\left\{\vec{j}_{energ,difusiva}\right\} &= \\ = div\left\{\vec{v}\cdot\vec{\vec{\sigma}}\right\} + \vec{v}\cdot\vec{f}_{FLA}&\end{aligned} \tag{1.70}$$

Se mudássemos a constante arbitrária na definição de ε, a conservação de massa garantiria que nada mudasse nesta equação de conservação de energia.

Para a densidade de corrente difusiva de energia interna vamos supor uma descrição aproximada pela lei de Fourier

$$\vec{j}_{energ,difusiva}\left(\vec{r},t\right) = -k\left(T\left(\vec{r},t\right),\rho\left(\vec{r},t\right)\right)grad\left(T\left(\vec{r},t\right)\right) \tag{1.71}$$

onde k é uma característica do fluido chamada *condutividade térmica*. Podemos ainda retirar da equação de conservação de energia uma parte de energias macroscópicas. Para isto vamos multiplicar a equação (1.33) escalarmente pela velocidade macroscópica:

$$\frac{\rho}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\right]\vec{v}^{2} \quad = \quad \vec{v}\cdot div[\ddot{\sigma}]+\vec{v}\cdot\vec{f}_{FLA} \tag{1.72}$$

onde usamos $\vec{v}\cdot derivada\ de\ \vec{v} = derivada\ de\ \vec{v}^2/2$. Subtraindo a equação (1.72) da (1.70) obtemos

$$\frac{\vec{v}^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}[\rho\varepsilon]+\frac{\vec{v}^2}{2}div\{\rho\vec{v}\}+div\{[\rho\varepsilon]\vec{v}\}+div\{-k\ grad\,T\} \quad = \quad div\{\vec{v}\cdot\ddot{\sigma}\}-\vec{v}\cdot div\{\ddot{\sigma}\} \tag{1.73}$$

Com a conservação de massa (1.63) isto se simplifica ainda:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho\varepsilon]+div\{[\rho\varepsilon]\vec{v}\}+div\{-k\ grad\,T\} \quad = \quad div\{\vec{v}\cdot\ddot{\sigma}\}-\vec{v}\cdot div\{\ddot{\sigma}\} \tag{1.74}$$

Do lado direito sobram apenas os termos de derivada do campo $\vec{v}$. Vamos escrever o resultado com as componentes cartesianas:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho\varepsilon]+div\{[\rho\varepsilon]\vec{v}\}+div\{-k\ grad\,T\} \quad = \quad \sum_{lk}\sigma_{lk}\frac{\partial v_l}{\partial x_k} \tag{1.75}$$

Agora podemos inserir a forma explícita do tensor $\ddot{\sigma}$ da equação (1.58):

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho\varepsilon]+div\{[\rho\varepsilon]\vec{v}\}+div\{-k\ grad\,T\} \quad = \quad -P div(\vec{v})+\left(\mu_V+\frac{4\mu}{3}\right)\left[div(\vec{v})\right]^2+\mu\sum_{l\neq k}\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_l}\right)\frac{\partial v_l}{\partial x_k} \tag{1.76}$$

Vamos escrever o termo da pressão do lado esquerdo da equação, o termo da condução de calor do lado direito e vamos usar a regra de produto (Leibniz) para os produtos $\rho\cdot\varepsilon$ e $[\rho\vec{v}]\cdot\varepsilon$:

$$\underbrace{\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\{\rho\}+\varepsilon div\{\rho\vec{v}\}}_{=0\text{ (consevação de massa)}}+\rho\frac{\partial}{\partial t}[\varepsilon]+\rho\vec{v}\cdot\nabla[\varepsilon]+P div(\vec{v}) \quad = \quad div\{k\ grad\,T\}+\left(\mu_V+\frac{4\mu}{3}\right)\left[div(\vec{v})\right]^2+\mu\sum_{l\neq k}\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_l}\right)\frac{\partial v_l}{\partial x_k} \tag{1.77}$$

Para tratar do termo da pressão utilizaremos a conservação de massa (1.63):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\rho+\rho\ div(\vec{v})=0 \tag{1.78}$$

o que permite escrever

$$div(\vec{v}) = -\frac{1}{\rho}\mathbb{D}\rho \tag{1.79}$$

Inserindo isto na (1.77) obtemos

$$\begin{aligned} \rho\mathbb{D}[\varepsilon] \quad -\frac{P}{\rho}\mathbb{D}[\rho] \quad &= \\ = \quad & div\{k\, grad\, T\} + \left(\mu_V + \frac{4\mu}{3}\right)\left[div(\vec{v})\right]^2 + \mu\sum_{l\neq k}\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\right)\frac{\partial v_l}{\partial x_k} \end{aligned} \tag{1.80}$$

Com a regra de produto de Leibniz podemos escrever

$$\begin{aligned} \rho\mathbb{D}[\varepsilon] \quad -\mathbb{D}[P] \quad + \rho\mathbb{D}\left[\frac{P}{\rho}\right] &= \\ = \quad & div\{k\, grad\, T\} + \left(\mu_V + \frac{4\mu}{3}\right)\left[div(\vec{v})\right]^2 + \mu\sum_{l\neq k}\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\right)\frac{\partial v_l}{\partial x_k} \end{aligned} \tag{1.81}$$

Em analogia com a energia interna específica (energia interna por massa) podemos definir uma entalpia específica (entalpia por massa):

$$\eta \underset{def.}{=} \frac{U + PV}{M} = \varepsilon + \frac{P}{\rho} \tag{1.82}$$

Com esta grandeza a equação (1.81) toma a forma:

$$\rho\mathbb{D}[\eta] \quad -\mathbb{D}[P] \quad = \quad div\{k\, grad\, T\} + \left(\mu_V + \frac{4\mu}{3}\right)\left[div(\vec{v})\right]^2 + \mu\sum_{l\neq k}\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\right)\frac{\partial v_l}{\partial x_k} \tag{1.83}$$

A derivada convectiva da entalpia específica é

$$\mathbb{D}[\eta] = \left(\frac{\partial\eta}{\partial T}\right)_P \mathbb{D}[T] + \left(\frac{\partial\eta}{\partial P}\right)_T \mathbb{D}[P] \tag{1.84}$$

$(\partial\eta/\partial T)_P$ é o calor específico da substância à pressão constante; $(\partial\eta/\partial T)_P = c_p$. A outra derivada parcial $(\partial\eta/\partial P)_T$ seria exatamente zero para um gás ideal. Para um fluido qualquer podemos mostrar, com a segunda lei da termodinâmica, que

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial P}\right)_T = \frac{1 - T\alpha}{\rho} \tag{1.85}$$

onde α é o coeficiente de expansão térmica do fluido, definido como

$$\alpha \underset{def.}{=} \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{1.86}.$$

Demonstração: Vale para a entalpia H

$$dH = TdS + VdP = T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T dP + T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P dT + VdP \tag{1.87}$$

então

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T + V \tag{1.88}$$

Por outro lado temos para a diferencial da entalpia livre G:

$$dG = d\left(U + PV - TS\right) = dU + PdV + VdP - SdT - \bar{Q} \tag{1.89}$$

onde $\bar{Q}$ é a forma diferencial do calor reversível. Usando $dU - \bar{Q} = \bar{W} = -PdV$ obtemos

$$dG = VdP - SdT \tag{1.90}$$

Igualando derivadas segundas mistas obtemos então

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{1.91}$$

Inserindo isto na equação (1.88) e dividindo pela massa do sistema obtemos

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{M}\left\{V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right\} = \frac{1}{M}\left\{V - \frac{TV}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right\} = \frac{1 - T\alpha}{\rho} \tag{1.92}$$

Isto completa a demonstração da equação (1.85). Inserindo este resultado na equação de balanço de energia obtemos

$$\rho c_p \mathbb{D}[T] \quad - T\alpha\mathbb{D}[P] \quad = \quad div\{k\, grad\, T\} + \left(\mu_V + \frac{4\mu}{3}\right)\left[div(\vec{v})\right]^2 + \mu\sum_{l\neq k}\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\right)\frac{\partial v_l}{\partial x_k} \tag{1.93}$$

Neste ponto podemos resumir os resultados das três equações que determinam a dinâmica do fluido:
Equação de Navier-Stokes:

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\right]\vec{v} \quad = \quad -\nabla P \quad + \quad \left(\mu_V + \frac{\mu}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\vec{v}) \quad + \quad \mu\,\Delta\vec{v} \quad + \quad \vec{f}_{FLA}} \tag{1.94}$$

Conservação de massa:

$$\boxed{div(\rho\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0} \tag{1.95}$$

Conservação de energia:

$$\boxed{\begin{aligned}&\rho c_p \mathbb{D}[T] \quad - T\alpha\mathbb{D}[P] \quad = \\ &= \quad div\{k\, grad\, T\} + \left(\mu_V + \frac{4\mu}{3}\right)\left[div(\vec{v})\right]^2 + \mu\sum_{l\neq k}\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\right)\frac{\partial v_l}{\partial x_k}\end{aligned}} \tag{1.96}$$

Estas equações precisam ainda de relações termodinâmicas: isto é P, μ, μ_V, α e c_p como funções de T e ρ. Infelizmente este sistema é extremamente difícil de resolver. A equação de Navier Stokes é não linear! Mesmo as outras equações (1.95), (1.96) contém produtos das incógnitas como $\vec{v} \cdot \nabla T$ ou $\rho \vec{v}$.

Alguns comentários sobre a equação de balanço de energia parecem adequados: primeiramente observamos que a equação se simplifica no caso do gás ideal. Para o gás ideal vale $\alpha = T^{-1}$. Segundo, é interessante considerar situações onde todos os efeitos dissipativos são desprezíveis. Neste caso todo o lado direito da equação (1.96) seria zero. Neste caso sobra

$$\rho c_p \mathbb{D}[T] \quad - T\alpha \mathbb{D}[P] \quad = \quad 0 \tag{1.97}$$

Esta equação diz que, ao longo das linhas de universo que seguem o movimento macroscópico do fluido, a temperatura e a pressão variam de tal forma que o par (T, P) se mantém numa curva adiabática do diagrama T, P.

No caso sem dissipação vale ainda a pena voltar para a equação de balanço de energia antes de subtrair a parte de movimento macroscópico (equação (1.72). Tínhamos (equação (1.70))

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho}{2}\vec{v}^2 + \rho\varepsilon\right] + div\left\{\left[\frac{\rho}{2}\vec{v}^2 + \rho\varepsilon\right]\vec{v}\right\} + div\left\{\vec{j}_{energ,difusiva}\right\} =$$

$$= \quad div\left\{\vec{v} \cdot \ddot{\sigma}\right\} \quad + \vec{v} \cdot \vec{f}_{FLA}$$

Se desprezarmos todos os efeitos dissipativos sobra

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho}{2}\vec{v}^2 + \rho\varepsilon\right] + div\left\{\left[\frac{\rho}{2}\vec{v}^2 + \rho\varepsilon\right]\vec{v}\right\} \quad = \quad -div\left\{\vec{v}P\right\} \quad + \vec{v} \cdot \vec{f}_{FLA} \tag{1.98}$$

Com as mesmas transformações que fizemos antes (equações (1.77) e (1.79)) obtemos

$$\rho \mathbb{D}\left[\frac{\vec{v}^2}{2} + \eta\right] - \frac{\partial P}{\partial t} \quad = \quad \vec{v} \cdot \vec{f}_{FLA} \tag{1.99}$$

Vamos supor que as forcas de longo alcance possam ser obtidas de um potencial e a densidade de força de longo alcance possa ser escrita como

$$\vec{f}_{FLA} = -\rho \; grad\phi \tag{1.100}$$

Supondo agora um escoamento estacionário, obtemos de (1.99) a equação de Bernoulli

$$\vec{v} \cdot \nabla\left[\frac{\vec{v}^2}{2} + \phi + \eta\right] = 0 \tag{1.101}$$

que seria válida desde que todos os efeitos dissipativos pudessem ser desprezados e num regime estacionário.