2.4 Dinâmica, variáveis dinâmicas, Hamiltoniano, simetria da dinâmica.

Até agora não consideramos o comportamento temporal dos sistemas quânticos. Para o spin do átomo de prata isto seria de fato justificável se o spin for isolado de campos magnéticos. Sem campos magnéticos o significado físico das preparações e medições não depende do instante da preparação ou da medição.

Se aplicamos um campo magnético homogêneo [1] na direção z, observamos que átomos que no instante t tinham a polarização na direção $\hat{u}\uparrow$ no instante $t' > t$ têm a polarização $\uparrow$ em uma nova direção $\hat{u}'$, que se obtém de $\hat{u}$ por meio de uma rotação ao redor do eixo-z. Para medições feitas no instante t' o sistema spin, que foi preparado no instante t com polarização $\hat{u}\uparrow$ comporta-se igual que um que foi preparado no instante t' com polarização $\hat{u}'\uparrow$.

As últimas frases são aparentemente claras e não parecem conter nenhum problema mais profundo. Mas esta aparência engana. O que significa "medições feitas no instante t' " ? Uma medição é um processo que leva certo tempo e não é óbvio que se possa atribuir a tal processo um instante t'. De fato na física quântica relativística se encontra que medições instantâneas realmente não existem. Veremos mais tarde que no caso da mecânica quântica de uma partícula não relativística um instante de medição pode ser definido, mas esta questão é absolutamente não trivial. Então temos que tratar as questões espaço-temporais das medições mais detalhadamente. Para os processos de preparação vale o mesmo, mas a título de concisão vamos somente falar dos processos de medição.

Uma medição é caracterizada por uma estrutura interna $\mathscr{E}$ do correspondente aparato e do processo e por uma colocação espaço-temporal. Para poder descrever a colocação espaço-temporal escolhemos um referencial inercial e definimos coordenadas x, y, z, t no espaço-tempo da maneira usual, sendo x, y, z coordenadas Cartesianas no espaço do referencial, e t uma coordenada temporal, medida com um relógio em repouso no referencial e com a noção de simultaneidade do referencial. Para caracterizar a colocação espaço-temporal de um processo de medição podemos colocar três marcas não complanares $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$ no chassi do correspondente aparelho. Estes vetores de posição saem de uma origem escolhida no referencial. $\vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C$ podem também ser funções do tempo. O processo de medição leva certo tempo e, em geral, tem várias etapas. Podemos escolher algum evento marcante neste processo e usar a coordenada t_M deste evento como uma marca temporal. t_M não é o "instante da medição"! Um instante de medição, em geral, nem pode ser definido! Uma 5-upla $\langle \mathscr{E}, \vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C, t_M \rangle$ caracteriza um processo de medida de um observável $\hat{\mathscr{A}}$. Mas varias destas 5-uplas podem descrever o mesmo observável. Duas 5-uplas que caracterizam processos de medida devem ser considerados equivalentes se os resultados experimentais com qualquer estado foram todos iguais. O observável corresponde a uma classe de equivalência destas 5-uplas com esta relação de equivalência:

$$\hat{\mathscr{A}} \quad \leftrightarrow \quad \left[\langle \mathscr{E}, \vec{r}_A, \vec{r}_B, \vec{r}_C, t_M \rangle \right] \tag{2.4.1}$$

[1] Campos magnéticos não uniformes acoplam o spin com o movimento do átomo, como dentro no aparato do Stern-Gerlach, e o spin não pode ser mais tratado como sistema isolado.

onde denotamos a classe de equivalência que contém o 5-uplo $\left\langle \mathscr{E},\ \vec{r}_A\,, \vec{r}_B\,, \vec{r}_C\,, t_M \right\rangle$ com o colchete. Estamos interessados em simetrias cinemáticas que alterem certos observáveis básicos apenas na parte da colocação espaço-temporal e que mantenham a estrutura interna inalterada. Por exemplo, podemos estar interessados numa simetria que atua sobre um determinado observável $\widehat{\mathscr{A}}$ como uma rotação R no espaço. Esta simetria transformaria este observável no observável

$$\widehat{\mathscr{A}}' \quad \leftrightarrow \quad \left[\left\langle \mathscr{E},\ R\vec{r}_A\,, R\vec{r}_B\,, R\vec{r}_C\,, t_M \right\rangle\right] \tag{2.4.2}$$

onde $R\vec{r}_A\,, R\vec{r}_B\,, R\vec{r}_C$ são as posições rodadas. Este tipo de troca de observável pode, no entanto, encontrar obstáculos no mundo real. Imagine que a origem de coordenadas esteja dentro da região ocupada pelo aparelho de medida! Os dois processos de medida $\widehat{\mathscr{A}}$ e $\widehat{\mathscr{A}}'$ terão problemas de colisão tendo que ocupar uma mesma região espaço-temporal! Obviamente estamos imaginando que todo procedimento experimental seria repetido analogamente em outra hora e/ou outro local mantendo as mesmas relações relativas entre a colocação espaço-temporal da preparação e de um sistema de coordenas análogo.

Embora que seja difícil e até impossível dizer qual é o instante de uma medida ou de uma preparação podemos determinar intervalos de tempo nos quais estes processos ocorram no sentido que o sistema preparado seguramente não tenha nenhuma interação com o correspondente aparelho fora do intervalo. Vamos escolher nossas coordenadas sempre assim que os processos de preparação sempre ocorram no intervalo $\left(-\infty, 0\right)$ e as medições sempre no intervalo $\left(0, +\infty\right)$ da coordenada t. Com esta convenção vamos agora estudar um tipo especial de simetria cinemática que depende de um parâmetro τ que toma valores do intervalo $\left[0, +\infty\right)$ do espaço-valor dos lapsos de tempo. Para certo conjunto irredutível S de observáveis esta simetria cinemática $\mathbb{D}_\tau^{(S)}$ atua como um deslocamento temporal:

$$\begin{aligned} &\text{para} \quad \left[\left\langle \mathscr{E},\ R\vec{r}_A\,, R\vec{r}_B\,, R\vec{r}_C\,, t_M \right\rangle\right] \in S \\ &\mathbb{D}_\tau^{(S)}\left[\left\langle \mathscr{E},\ R\vec{r}_A\,, R\vec{r}_B\,, R\vec{r}_C\,, t_M \right\rangle\right] \quad = \\ &\qquad = \quad \left[\left\langle \mathscr{E},\ R\vec{r}_A\,, R\vec{r}_B\,, R\vec{r}_C\,, t_M + \tau \right\rangle\right] \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Como esta simetria atua sobre outros observáveis e sobre as preparações não interessa. O que importa é que exista alguma substituição de antigos estados por novos estados tal que todas as médias fiquem inalteradas. A questão se tal tipo de simetria realmente existe é não trivial. Sistemas que interagem com o ambiente de tal forma que se troca informação com o ambiente não possuem tal tipo de simetria. Aqui vamos tratar exclusivamente de sistemas que possuem este tipo de simetria.

Podemos formar famílias destas simetrias. Seja $\mathbb{D}_\tau^{(S)}S$ o conjunto de observáveis que resulta da aplicação da simetria $\mathbb{D}_\tau^{(S)}$ nos observáveis do conjunto S. Sejam τ_1 e τ_2 dois lapsos de tempo não-negativos. A concatenação da simetria $\mathbb{D}_{\tau_1}^{(S)}$ com a $\mathbb{D}_{\tau_2}^{\left(\mathbb{D}_{\tau_1}^{(S)}S\right)}$ é novamente uma simetria deste tipo:

$$\mathbb{D}_{\tau_2}^{\left(\mathscr{T}_{\tau_1}^{(S)}S\right)} \circ \mathbb{D}_{\tau_1}^{(S)} \quad = \quad \mathbb{D}_{\tau_1+\tau_2}^{(S)} \tag{2.4.4}$$

Vamos chamar tal tipo de família destas simetrias de uma *dinâmica* do sistema. Usamos a letra D para este operador para lembrar de "dinâmica".

Numa dada representação do sistema quântico os observáveis $\widehat{\mathscr{A}}$ seriam representados por operadores auto-adjuntos $\mathscr{A} = REP\left(\widehat{\mathscr{A}}\right)$ e as simetrias $\mathbb{D}_\tau^{(S)}$ por operadores unitários $\mathscr{D}_\tau^{(S)}$ tal que :

$$REP\left(\mathbb{D}_\tau^{(S)}\widehat{\mathscr{A}}\right) = \mathscr{D}_\tau^{(S)} REP\left(\widehat{\mathscr{A}}\right)\left(\mathscr{D}_\tau^{(S)}\right)^{-1} \tag{2.4.5}$$

Repare que, em geral, estes operadores $\mathscr{D}_\tau^{(S)}$ dependem do conjunto de observáveis S. Este conjunto é uma escolha que, para um dado sistema, pode ser mais ou menos natural. Uma vez feita a escolha de um conjunto irredutível de observáveis podemos ainda ter diferenças entre os operadores $\mathscr{D}_\tau^{(S)}$ e $\mathscr{D}_\tau^{\left(\mathbb{D}_{\tau_1}^{(S)}S\right)}$. Em muitos casos isto não acontecerá, mas em princípio o operador que descreve um deslocamento temporal dos observáveis de S pode ser diferente daquele que desloca ainda os observáveis já deslocados. Esta situação complicada acontece com sistemas sujeitos a campos externos (campos clássicos) variáveis no tempo. Este caso complicado é somente tratável se os observáveis do conjunto S puderem ser associados a um instante t como instante de medição. Neste caso podemos escrever os operadores da dinâmica como $\mathscr{D}_{t+\tau,t}$, que significa o operador que desloca do instante t para o instante $t+\tau$.

No caso mais comum de que $\mathscr{D}_\tau^{(S)}$ e $\mathscr{D}_\tau^{\left(\mathbb{D}_{\tau_1}^{(S)}S\right)}$ coincidam para todo τ_1, podemos admitir observáveis no conjunto S cujo instante de medição t não é definível. Mas é um tanto incômodo de trabalhar com a dinâmica com operadores que não são funções do tempo. Isto motiva a introdução de uma ferramenta, que chamaremos de *variáveis dinâmicas*.

> Variáveis dinâmicas são uma família de operadores $\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots\ldots, \xi_n(t)$ que dependam do tempo tal que o conjunto $\{\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots\ldots, \xi_n(t)\}$ seja um conjunto irredutível de operadores para todo valor de t, que $\xi_k(t+\tau) = \mathscr{D}_{t+\tau,t}^{(S)}\xi_k(t)\left(\mathscr{D}_{t+\tau,t}^{(S)}\right)^{-1}$, e que os operadores que representam os observáveis do conjunto S possam ser escritos como funções dos $\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots\ldots, \xi_n(t)$ sem dependências explícitas do tempo.

Caso que seja possível atribuir um instante de medição aos observáveis de S podemos tomar os próprios operadores que representam os observáveis de S como variáveis dinâmicas. Num caso mais geral um operador dos observáveis de S poderia, por exemplo, ter a forma:

επχσ eLB

$$\mathscr{A} = \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots\ldots, \xi_n(t)\right) f(t)\, dt \tag{2.4.6}$$

onde F é uma função de operadores e f uma função numérica de tempos. Imaginando $F\left(\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots\ldots, \xi_n(t)\right)$ como uma série de Taylor e introduzindo identidades na forma $\mathbf{1} = \left(\mathscr{D}_\tau^{(S)}\right)^{-1} \mathscr{D}_\tau^{(S)}$ entre os fatores de produtos dos operadores percebemos que

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_\tau^{(S)} F\left(\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots\ldots, \xi_n(t)\right)\left(\mathscr{D}_\tau^{(S)}\right)^{-1} &= \\ = F\left(\xi_1(t+\tau), \xi_2(t+\tau), \ldots\ldots, \xi_n(t+\tau)\right) & \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Então a conjugação de $\mathscr{A}$ com $\mathscr{D}_\tau^{(S)}$ resulta em

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_\tau^{(S)} \mathscr{A}\left(\mathscr{D}_\tau^{(S)}\right)^{-1} &= \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\xi_1(t+\tau), \xi_2(t+\tau), \ldots\ldots, \xi_n(t+\tau)\right) f(t)\, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots\ldots, \xi_n(t)\right) f(t-\tau)\, dt \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Isto corresponde a um deslocamento temporal do observável para o futuro com um lapso de tempo τ. Então as varáveis dinâmicas são algo como coordenadas no espaço dos operadores que permitam escrever o efeito da dinâmica de forma simples. Em teoria quântica de campos este conceito é ainda generalizado incluindo também as coordenadas espaciais. Neste caso os variáveis dinâmicas acabam sendo objetos mais complicados. Ao invés de serem simplesmente operadores eles são distribuições valor-operador[2].

Como no caso de outras simetria contínuas, podemos introduzir um gerador para a dinâmica. Neste caso ele é definido com o sinal oposto: para τ infinitesimal define-se o Hamiltoniano $\mathscr{H}(t)$ pela equação:

$$\mathscr{D}_{t+\tau,t}^{(S)} = 1 + i\tau\mathscr{H}(t) \tag{2.4.9}$$

Agora vamos tratar do fato importante que o significado físico de uma simetria pode, em geral, mudar com o tempo. Para simplificar vamos supor que os observáveis do conjunto S tenham um instante t de medida bem definido de tal forma que os operadores $\mathscr{A}_1(t), \mathscr{A}_2(t), \ldots\ldots \mathscr{A}_n(t)$ que representam os observáveis de S possam servir como variáveis dinâmicas. Os operadores

$$\mathscr{A}_k(t') = \mathscr{D}_{t'\,t} \mathscr{A}_k(t) \mathscr{D}_{t'\,t}^{-1} \tag{2.4.10}$$

representam medidas feitas com os mesmos aparatos usados para medir os observáveis do conjunto S, mas as medidas seriam feitas no instante $t' = t + \tau$. Vamos supor que exista uma simetria cinemática $\mathbb{S}_t$ cuja ação sobre os observáveis de S tenha uma interpretação geométrica simples, por exemplo uma rotação ou translação ou uma mudança de estado de movimento do aparato de medida. Queremos avaliar qual é o significado desta simetria para os observáveis que correspondem aos operadores $\mathscr{A}_k(t')$, ou seja aos observáveis de S temporalmente deslocados. Seja $\mathscr{S}_t$ o operador

[2] Muitas vezes se admitem também operadores não auto-adjuntos e neste caso a noção de conjunto irredutível tem que ser generalizado. ehcseLB

unitário que representa a simetria $\mathbb{S}_t$. A simetria $\mathbb{S}_t$ substitui $\mathscr{A}_k(t')$ por $\mathscr{S}_t\,\mathscr{A}_k(t')\,\mathscr{S}_t^{-1}$

$$\mathscr{A}_k(t') \;\overset{\mathbb{S}_t}{\to}\; \mathscr{S}_t\,\mathscr{A}_k(t')\,\mathscr{S}_t^{-1} \tag{2.4.11}$$

Para poder avaliar que tipo de aparato X mede o observável novo representado pelo operador $\mathscr{S}_t\,\mathscr{A}_k(t')\,\mathscr{S}_t^{-1}$ vamos calcular a conjugação deste operador com o inverso da dinâmica:

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_{t'\,t}^{-1}\,\mathscr{S}_t\,\mathscr{A}_k(t')\,\mathscr{S}_t^{-1}\,\mathscr{D}_{t'\,t} &= \mathscr{D}_{t'\,t}^{-1}\,\mathscr{S}_t\,\mathscr{D}_{t'\,t}\,\mathscr{A}_k(t)\,\mathscr{D}_{t'\,t}^{-1}\,\mathscr{S}_t^{-1}\,\mathscr{D}_{t'\,t} = \\ &= \left(\mathscr{D}_{t'\,t}^{-1}\,\mathscr{S}_t\,\mathscr{D}_{t'\,t}\right)\mathscr{A}_k(t)\left(\mathscr{D}_{t'\,t}^{-1}\,\mathscr{S}_t\,\mathscr{D}_{t'\,t}\right)^{-1} \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Se $\mathscr{S}_t$ e $\mathscr{D}_{t'\,t}$ não comutaram temos

$$\mathscr{D}_{t'\,t}^{-1}\,\mathscr{S}_t\,\mathscr{A}_k(t')\,\mathscr{S}_t^{-1}\,\mathscr{D}_{t'\,t} \;\neq\; \mathscr{S}_t\,\mathscr{A}_k(t)\left(\mathscr{S}_t\right)^{-1} \tag{2.4.13}$$

Então o observável que é representado pelo operador $\mathscr{D}_{t'\,t}^{-1}\,\mathscr{S}_t\,\mathscr{A}_k(t')\,\mathscr{S}_t^{-1}\,\mathscr{D}_{t'\,t}$ não coincide com o observável que resulta da aplicação da simetria $\mathbb{S}_t$ no observável original do conjunto S. Isto significa que o significado da dinâmica inversa atuando sobre os observáveis do conjunto $\mathbb{D}_\tau^{(S)}S$ não é mais um deslocamento temporal para trás ou que o significado da simetria para os observáveis do conjunto $\mathbb{D}_\tau^{(S)}S$ não é mais aquele significado simples que $\mathbb{S}_t$ tinha para os observáveis do conjunto S Então vimos:

Geralmente simetrias cinemáticas são definidas pela sua ação sobre alguns observáveis num instante t. Elas atuam também sobre observáveis medidos em outros instantes, mas em geral, o significado físico da simetria será outro quando aplicada a observáveis de outros instante ou o significado da dinâmica é outro quando aplicado à observáveis que foram submetidos à simetria.

Porém, em casos especiais o significado físico de uma simetria pode ser independente do tempo e ela pode também não alterar o significado da dinâmica. Neste caso vamos chamar esta simetria de *simetria da dinâmica*. Pela fórmula (2.4.12) percebemos que uma simetria cinemática é simetria da dinâmica se os operadores $\mathscr{S}_t$ da simetria comutam com os operadores $\mathscr{D}_{t'\,t}$ da dinâmica:

$$\mathbb{S}_t \text{ é simetria da dinâmica} \;\Leftrightarrow\; \left[\mathscr{D}_{t'\,t}\,,\mathscr{S}_t\right] = 0 \tag{2.4.14}$$

Especialmente para uma simetria infinitesimal da dinâmica obtemos

$$\mathscr{S}_t = \mathbf{1} - is\mathscr{G}(t) = \mathscr{D}_{t'\,t}\left(\mathbf{1} - is\mathscr{G}(t)\right)\mathscr{D}_{t'\,t}^{-1} = \mathbf{1} - is\mathscr{G}(t') \tag{2.4.15}$$

Então

$$\mathscr{G}(t) = \mathscr{G}(t') \tag{2.4.16}$$

Isto significa:

O gerador de uma simetria da dinâmica é uma grandeza conservada.