3.2 Os momenta, o Hamiltoniano e transformações de calibre

O momento linear e, de fato também o Hamiltoniano, não foram ainda definidos de forma completa. Isto devido ao fato que os $\mathcal{X}^1(t_0), \mathcal{X}^2(t_0), \mathcal{X}^3(t_0)$ não formam um conjunto irredutível e portanto não são suficientes para determinar simetrias de forma única. Podemos imaginar que existam outros observáveis $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3$ que formem junto com os $\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \mathcal{X}^3$ um conjunto irredutível e tal que a ação da simetria $\mathbb{T}_{\vec{\theta}}$ usada na definição de posição também consiste numa translação de aparatos para estes observáveis. Mas, não sabemos quais observáveis são estes. Então podem existir várias simetrias diferentes de translação e consequentemente diferentes momentos lineares. A noção de momento linear não é única. Temos que investigar em que aspectos duas possíveis noções de momento linear podem diferir.

Imagine então que um outro fisco fizesse toda nossa construção de novo, mas usando outra simetria de translação que teria outros geradores $\mathcal{P}_l'$. Estes teriam que satisfazer também uma fórmula do tipo (3.1.31):

$$\mathcal{P}_k'(t_0) \;=\; \delta_{ka}\, m' \dot{\mathcal{X}}^a(t_0) \;+\; \mathcal{A}_k'\left(\mathcal{X}^1(t_0), \mathcal{X}^2(t_0), \mathcal{X}^3(t_0), t_0\right) \tag{3.2.1}$$

De fato, a massa tem que ser a mesma, $m' = m$, porque ela aparece na equação (3.1.28) de forma completamente independente da escolha da noção de translação. A questão é em que as funções $\mathcal{A}_k'$ e $\mathcal{A}_k$ podem diferir? As componentes da velocidade são grandezas independentes da escolha da noção de translação.

$$\dot{\mathcal{X}}^l \;=\; \frac{1}{m}\delta^{la}\left(\mathcal{P}_a - \mathcal{A}_a\right) \;=\; \frac{1}{m}\delta^{la}\left(\mathcal{P}_a' - \mathcal{A}_a'\right) \tag{3.2.2}$$

e consequentemente os comutadores destes componentes são independentes desta escolha:

$$\begin{aligned}
\left[\dot{\mathcal{X}}^l, \dot{\mathcal{X}}^k\right] \;&=\; \frac{1}{m^2}\delta^{la}\delta^{kb}\left[\left(\mathcal{P}_a - \mathcal{A}_a\right), \left(\mathcal{P}_b - \mathcal{A}_b\right)\right] \;= \\
&=\; -\frac{i}{m^2}\delta^{la}\delta^{kb}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_a}{\partial \mathcal{X}^b} - \frac{\partial \mathcal{A}_b}{\partial \mathcal{X}^a}\right) \;= \\
&=\; -\frac{i}{m^2}\delta^{la}\delta^{kb}\left(\frac{\partial \mathcal{A}_a'}{\partial \mathcal{X}^b} - \frac{\partial \mathcal{A}_b'}{\partial \mathcal{X}^a}\right)
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Então as funções vetoriais $\vec{\mathcal{A}} \;=\; \hat{e}_k\,\delta^{kn}\mathcal{A}_n$ e $\vec{\mathcal{A}}' \;=\; \hat{e}_k\,\delta^{kn}\mathcal{A}_n'$ necessariamente têm que ter o mesmo rotacional. Eles podem diferir por um gradiente de alguma função escalar dos $\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \mathcal{X}^3$. Para poder caracterizar esta condição podemos definir uma função vetorial $\vec{\beta}$

$$\vec{\beta} \;\underset{def.}{=}\; \operatorname{rot}\vec{\mathcal{A}} \tag{3.2.4}$$

e dizer que todas as funções $\mathcal{A}_n$ que possam aparecer no relacionamento ente momento linear e velocidade precisam ter a mesma função $\vec{\beta}$.

A passagem de uma escolha de noção de translação para outra corresponde a uma transformação de calibre[1] no formalismo canônico tradicional.

O momento linear da partícula não é invariante sob mudanças de calibre. Josef M. Jauch no seu livro "Foundations of Quantum Mechanics"[2] , seduzido pelo formalismo canônico, afirma portanto que o momento linear da partícula não seria observável. Mas, esta conclusão não é adequada. Bem, claro que não podemos observar algo que não foi definido ainda. Mas nada impede que façamos uma escolha da noção de translação e teremos uma noção de momento linear bem definida. Este momento linear pode, em principio, ser medido da maneira como isto foi discutido no caso geral para geradores. Falamos "em princípio". Infelizmente a situação na prática é bem complicada, a não ser que o rotacional do $\vec{\mathcal{A}}$ seja zero. Neste caso podemos encontrar uma noção de translação que atua sobre um grande número de observáveis no laboratório real como um simples deslocamento espacial e a nossa prescrição de medida de gerador pode ser realizada na prática. Mas quando o rotacional de $\vec{\mathcal{A}}$ for diferente de zero a atuação das simetrias de translação sobre os observáveis disponíveis no laboratório será em geral muito complicada.

Finalmente falta completar a definição do Hamiltoniano. Como os $\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \mathcal{X}^3$ não formam um conjunto irredutível, a fórmula (3.1.32) sozinha não fixa o Hamiltoniano. Temos que aumentar o conjunto $\left\{\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \mathcal{X}^3\right\}$ para formar um conjunto irredutível. Escolhe-se para este fim os operadores $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ e se completa a definição do Hamiltoniano pela exigência que

$$\dot{\mathcal{P}}_k \;=\; i\left[\mathcal{H}, \mathcal{P}_k\right] \tag{3.2.5}$$

Poderíamos ter usado outros operadores para completar a definição de $\mathcal{H}$? Por exemplo as velocidades no lugar dos momenta? Para o caso mais geral, quando $\operatorname{rot}\vec{\mathcal{A}} \neq 0$, uma equação do tipo $\ddot{\mathcal{X}}^k \;=\; i\left[\mathcal{H}, \dot{\mathcal{X}}^k\right]$ levaria a inconsistências. Os momentos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ têm a virtude de cumprir com os operadores de posição $\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \mathcal{X}^3$ regras de comutação que são invariantes sob conjugação unitária com a dinâmica. A dinâmica unitária induzida pelas fórmulas (3.2.5) e (3.1.32) respeita a regra $\left[\mathcal{P}_k, \mathcal{X}^l\right] \;=\; -i\,\delta_k^l\,\mathbf{1}$ e não leva a contradições. Então podemos usar o conjunto de operadores $\left\{\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \mathcal{X}^3, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3\right\}$ como variáveis dinâmicas do sistema partícula.

Como a definição do Hamiltoniano envolve com a (3.2.5) os momenta, o Hamiltoniano também não é invariante quando mudarmos o sentido da noção de translação. Seja $\mathcal{P}_k'$ um outro momento linear que difere do antigo $\mathcal{P}_k$ por uma derivada de uma função dos $\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \mathcal{X}^3$.

$$\mathcal{P}_k'(t) \;=\; \mathcal{P}_k(t) \;+\; \frac{\partial\Phi\left(\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \mathcal{X}^3, t\right)}{\partial\mathcal{X}^k} \tag{3.2.6}$$

Para os $\mathcal{P}_k'$ vale

[1] O nome calibre é totalmente inadequado e se deve a um mero acidente histórico. Mas, ele está tão enraizado que parece ser difícil de substituí-lo por outro.

[2] J.M. Jauch, *Foundations of quantum mechanics*, Addison-Wesley Publ. Cy., Reading, Mass., 1968.

$$\dot{\mathcal{P}}'_k \;=\; i\left[\mathcal{H}', \mathcal{P}'_k\right] \tag{3.2.7}$$

Por outro lado temos

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}'_k &= \dot{\mathcal{P}}_k + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\mathcal{X}^k\partial\mathcal{X}^n}\dot{\mathcal{X}}^n + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\mathcal{X}^k\partial t} = \\ &= i\left[\mathcal{H}, \mathcal{P}_k\right] + i\left[\mathcal{H}, \frac{\partial\Phi}{\partial\mathcal{X}^k}\right] + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\mathcal{X}^k\partial t} \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

O Hamiltoniano novo também têm a forma $\mathcal{H}' = \frac{m}{2}\dot{\mathcal{X}}^a\dot{\mathcal{X}}^b\delta_{ab} + \mathcal{U}'$. Então $\mathcal{H}'$ e $\mathcal{H}$ diferem apenas por uma função de $\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \mathcal{X}^3$ e t. Temos $\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \delta\mathcal{U}$. Com isto o lado direito da (3.2.7) fica

$$i\left[\mathcal{H}', \mathcal{P}'_k\right] \;=\; i\left[\mathcal{H}, \mathcal{P}_k\right] + i\left[\mathcal{H}, \frac{\partial\Phi}{\partial\mathcal{X}^k}\right] + i\left[\delta\mathcal{U}, \mathcal{P}_k\right] + i\left[\delta\mathcal{U}, \frac{\partial\Phi}{\partial\mathcal{X}^k}\right] \tag{3.2.9}$$

O último termo é zero, já que ambos os operadores são meramente funções da posição. Substituindo isto na (3.2.7) e usando a (3.2.8) obtemos

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\mathcal{X}^k\partial t} \;=\; i\left[\delta\mathcal{U}, \mathcal{P}_k\right] \;=\; -\frac{\partial\,\delta\mathcal{U}}{\partial\mathcal{X}^k} \tag{3.2.10}$$

Fora de uma constante sem importância podemos afirmar que

$$\delta\mathcal{U} \;=\; -\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{3.2.11}$$

Da mesma forma como caracterizamos a lei de transformação dos momenta numa mudanças de noção de translação usando a função $\vec{\beta}$, que deve ficar inalterada, podemos caracterizar a lei de transformação do Hamiltoniano com uma função que deve ficar invariante:

$$\vec{\varepsilon} \;\underset{def.}{=}\; -\operatorname{grad}\left(\mathcal{U}\right) - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{3.2.12}$$

Pelas definições (3.2.4) e (3.2.12) as funções invariantes sob mudanças de noção de translação obedecem as seguintes equações:

$$\operatorname{div}\left(\vec{\beta}\right) \;=\; 0 \tag{3.2.13}$$

$$\operatorname{rot}\left(\vec{\varepsilon}\right) + \frac{\partial\vec{\beta}}{\partial t} \;=\; 0 \tag{3.2.14}$$

Reconhecemos as equações homogêneas de Maxwell nestas equações.