General Aspects of Relativistic Quantum Field Theory*

Jens Mund

Notas de Aula, DF-UFJF 14/02/2011

Conteúdo

1 Mecânica Quântica, Simetrias, Espectro de Energia-Momento 3
1.1 Fundamentos . . . 3
1.2 Symmetries . . . 7
1.3 Energy-Momentum Spectrum . . . 8

2 Quantum Fields: Wightman Axioms 11
2.1 Introduction . . . 12
2.2 Some General Theorems in QFT . . . 19
2.3 Euclidean quantum field theory . . . 19

3 Haag-Kastler Axioms 19
3.1 The Axioms . . . 22
3.2 Charges, Global Gauge Group and Field Algebra . . . 22
3.3 Haag-Ruelle Scattering Theory . . . 22

A Espaços de Hilbert; Operadores. 22
A.1 Espaços de Hilbert. . . . 22
A.2 Operadores. . . . 25

B C* Algebras 26
B.1 Álgebras . . . 26
B.2 Estados . . . 28
B.3 Representações . . . 31

C Distributions 36

Introdução.

A Teoria Quântica de Campos abrange a relatividade restrita e a física quântica. Esta síntese de duas teorias se provou tal restringente que até hoje em dia nenhum modelo não-trivial (em 4 dimensões) foi construido numa maneira matematicamente rigorosa. Isto

*These are incomplete notes of a one-semester course given for graduate students at the Physics Department, Universidade Federal de Juiz de Fora, Brazil.

motivou os físicos teóricos, a partir dos anos '60, a destilar certos princípios físicos fundamentais e implementar eles por "axiomas"[1] claramente especificados na estrutura da teoria. Estes são os seguintes princípios:

- Localidade de observáveis (observáveis são medíveis em laboratórios finitas e durante intervalos de tempo finitas),
- Causalidade (não existe propagação de sinais com velocidade maior do que a do luz),
- Covariância relativística (Experimentos com aparelhos identicos em sistemas inerciais diferentes têm os mesmos resultados),
- Estabilidade (positividade de energia).

Os axiomas têm consequências profundas, independente de modelo, que concordam qualitativamente com caracteristicas da física de partículas. Ao mesmo tempo, eles indicam certas obstruções na construção de modelos. Alguns consequências são:

- Em quase todos estados (inclusive o vácuo) existem correlações[2] tipo Einstein-Podolski-Rosen entre medidas em regiões causalmente separadas (Teorema de Reeh-Schlieder);
- O conceito de partícula é não-local; Não existe um operador local de número de partículas (Teorema de Reeh-Schlieder);
- Cada tipo de partícula tem uma anti-partícula com a mesma massa e spin (e carga oposta); a inversão simultánea de carga, espaço e tempo é uma simetria fundamental (Teorema CPT);
- Teorema de spin-estatística;
- Existência de estados de multi-partículas (Teoria de espalhamento de Haag-Ruelle);
- Existência de um grupo compacto de simetrias internas (grupo de calibre global) e quantização de cargas em teorias massivas (Doplicher-Haag-Roberts);
- Certos conceitos usados tradicionalmente na construção de modelos interagentes são exclusos: Por exemplo o *interaction picture* (Teorema de Haag);
- O campo Dirac em QED pode ser localizado só em regiões infinitas.

Serão apresentadas duas abordagens: de Garding-Wightman e de Haag-Kastler. Na última abordagem, também chamada de *algebraic quantum field theory*, a teoria é formulada puramente em termos dos observáveis, sem necessidade de selecionar um estado ou setor discriminado ("o vácuo"). Isto admite a discussão de setores de superseleção – regiões de estados fisicamente disjuntos, no sentido que eles não podem ser relacionados por uma operação fisicamente realizável. Estes setores são distinguidos por "cargas". Em teorias massivas, os axiomas implicam a existência de um grupo compacto de simetrias internas como objeto dual às cargas – em particular, as cargas são discretas. A abordagem algébrica é profícuo na discussão da quebra espontânea de simetria (também no contexto não-relativístico, como supra-fluidez ou magnetização), da TQC com temperatura positiva, e da TQC no espaço-tempo curvo, onde não existe estado discriminado de vácuo.

[1] A terminologia "axioma" não quer dizer que se trata de postulados rígidos, inalteráveis. Eles são hipóteses que servem como ponto de partida, e deveriam ser substituidos assim que um melhor entendimento da teoria indica isso.

[2] Porem, elas decaem rapidamente com grande separação — esta chamada popriedade de *cluster* é a base da teoria de espalhamento.

1 Mecânica Quântica, Simetrias, Espectro de Energia-Momento

1.1 Fundamentos

No domínio quântico, resultados de medições são necessariamente variáveis estochásticas. No formalismo matemático da MQ eles são relacionados com a decomposição espectral de operadores auto-adjuntos. Revisamos esses noções.

O resultado da medição de um observável (mesmo se o sistema estivesse (??) num estado puro) é uma *variável estochástica*, X, com valores em $\mathbb{R}$: X não "possui" um valor, mas só uma distribuição de probabilidades para os possíveis valores. As probabilidades são (numa posição pragmática) as frequências relativas dos valores, encontradas num *ensemble* de sistemas identicamente preparadas. X pode ser identificado com esta distribuição.

Supomos primeiro que X tem valores discretos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, com probabilidades $p_1, p_2, \ldots$ respectivamente: $p_i = N_i/N$, onde N é a cardinalidade do ensemble (número de experiências) e N_i é o número de vezes da ocorrência do resultado λ_i nas N experiências. Denotando o resultado da ν-esima experiência de x_ν, $\nu = 1, \ldots, N$, o valor esperado é dado por

$$\langle X \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} x_\nu. \tag{1}$$

No somatório nos fazemos para cada i a soma sobre todos resultados x_ν com $x_\nu = \lambda_i$, que dá justamente $N_i \lambda_i$, e depois somamos sobre os i. Isto dá

$$\langle X \rangle = \frac{1}{N} \sum_i \sum_{\nu : x_\nu = \lambda_i} \lambda_i = \sum_i \frac{N_i}{N} \lambda_i,$$

ou seja,

$$\langle X \rangle = \sum_i \lambda_i \, p_i. \tag{2}$$

Mais geralmente, os possíveis valores de X são contínuos. Neste caso, X corresponde (bijetivamente) a uma medida μ na reta real com a seguinte interpretação: Para cada subconjunto (Borel) Δ da reta real, $\mu(\Delta)$ é a probabilidade de encontrar um valor de X em Δ. O valor esperado de X, denotado por $\langle X \rangle$, é dado pela generalização de (2):

$$\langle X \rangle = \int \lambda \, d\mu(\lambda). \tag{3}$$

Verifiquamos que o caso discreto considerado acima realmente é um caso especial. Se X tem valores discretos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, com probabilidades $p_1, p_2, \ldots$ respectivamente, a medida correspondente é $\mu(\Delta) = \sum_{i:\lambda_i \in \Delta} p_i$ (soma sobre todas indices i t.q. $\lambda_i \in \Delta$). Então a integral encima e evaluada como o seguinte. Nos escolhemos intervalos Δ_i, $i = 1, 2, \ldots$, tal que $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\mathbb{R} = \cup_i \Delta_i$ (uma chamada *partição da reta real*), e tal que em Δ_i se encontra exatamente um dos possíveis valores de X, a saber λ_i. Então a integral em eq. (3) é realmente dada pela soma (2).

Exemplo 1.1 Consideramos o exemplo $X :=$ número de pontos encontrados após jogar um dado. Aquí, $\lambda_i = i$ e $p_i = 1/6$ para $i = 1, \ldots, 6$, e $\mu(\Delta) = k/6$ se Δ contem k elementos de $\{1, \ldots, 6\}$. O valor esperado é $\sum_{i=1}^{6} i \times 1/6 = 3,5$. $\square$

Dada uma função (Borel, limitada) f na reta real, podemos definir uma nova variável estochástica, $f(X)$, a saber a (unica) variável correspondente à medida

$$\mu_f(\Delta) := \mu(f^{-1}\Delta),$$

onde $f^{-1}\Delta$ é a imagem inversa de Δ sob f. (Interpretação: Para cada membro do ensemble, pegue o valor encontrado de X e aplique f. Então a probabilidade de encontrar $f(X)$ num intervalo Δ é igual à probabilidade de encontrar X em $f^{-1}\Delta$.) Para o valor esperado de $f(X)$ nos obtemos

$$\langle f(X)\rangle \equiv \int \lambda'\, d\mu_f(\lambda') = \int f(\lambda)\, d\mu(\lambda).$$

No caso da função charaterística[3] χ_Δ de um intervalo Δ nos obtemos

$$\langle \chi_\Delta(X)\rangle = \int_\Delta d\mu(\lambda) \equiv \mu(\Delta).$$

Então, não somente os valores esperados são fixados pela medida, mas tambem a medida pode ser reconstruida pelos valores esperados de funções de X:

Proposição 1.2 *"A medida μ é fixada pelos valores esperados $\langle f(X)\rangle$ de todas funções f de X."*

(Aspas por que deve ser especificada a classe de funções f. Para funções contínuas que caiem para zero no infinito, a Proposição encima se chama de *Teorema de Riesz-Markov.*)

Dispersão e Correlaçãoes. O número

$$(\Delta X)^2 := \big\langle \big(X - \langle X\rangle\big)^2 \big\rangle \equiv \langle X^2\rangle - \langle X\rangle^2 \tag{4}$$

é chamado de *dispersão*. Consideramos agora duas variáveis estochásticas X_1, X_2 (em $\mathbb{R}$), com medidas correspondentes na reta real μ_1 e μ_2. Recordamos que $\mu_i(\Delta)$ é a probabilidade de encontrar um valor de X_i em $\Delta \subset \mathbb{R}$. O par (X_1, X_2) é uma nova variável estochastica (com valores em $\mathbb{R}^2$), correspondente a uma medida μ em $\mathbb{R}^2$ com a seguinte interpretação: Para $\Delta_1, \Delta_2 \subset \mathbb{R}$, o número $\mu(\Delta_1 \times \Delta_2)$ é a probabilidade de encontrar um valor de X_1 em Δ_1 e de X_2 em Δ_2. X_1 e X_2 são chamadas de *independentes* se isto é o produto das duas probabilidades:

$$\mu(\Delta_1 \times \Delta_2) = \mu_1(\Delta_1)\, \mu_2(\Delta_2). \tag{5}$$

(Neste caso, a medida μ é chamado de produto das medidas μ_1 e μ_2.) Para uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Borel e limitada, $f(X_1, X_2)$ é uma nova variável estochastica (com valores em $\mathbb{R}$), com valor esperado $\langle f(X_1, X_2)\rangle = \int f(\lambda_1, \lambda_2)\, d\mu(\lambda_1, \lambda_2)$. Isto se aplica em particular para o produto $f(X_1, X_2) := X_1 X_2$. Se X_1 e X_2 são independentes, a Eq. (5) implica

$$\begin{aligned}
\langle X_1 X_2\rangle &= \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_1\lambda_2\, d\mu(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda_1\lambda_2\, d\mu_1(\lambda_1) d\mu_2(\lambda_2) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda_1\, d\mu_1(\lambda_1) \int_{\mathbb{R}} \lambda_2 d\mu_2(\lambda_2) = \langle X_1\rangle\, \langle X_2\rangle.
\end{aligned}$$

Nos temos então a seguinte condição necessária para independência.

[3] χ_Δ é definido por

$$\chi_\Delta(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \Delta, \\ 0, & \text{se } x \notin \Delta. \end{cases} \quad .$$

Proposição 1.3 *Se X_1 e X_2 são independentes, então vale*

$$\langle X_1 X_2 \rangle = \langle X_1 \rangle \, \langle X_2 \rangle. \tag{6}$$

(O reciproco só vale sob condições adicionais.) Vale a pena mencionar que (no caso $\Delta(X_i) \neq 0$) o número

$$\frac{\big\langle (X_1 - \langle X_1 \rangle)(X_2 - \langle X_2 \rangle) \big\rangle}{\Delta(X_1)\Delta(X_2)} \equiv \frac{\langle X_1 X_2 \rangle - \langle X_1 \rangle \langle X_2 \rangle}{\Delta(X_1)\Delta(X_2)} \tag{7}$$

é chamado de *coeficiente de correlação* de X_1, X_2, e tem valores entre -1 e 1. Ele é uma medida para a correlação *linear*: Se ele é igual ± 1, X_1 e X_2 são perfeitamente linearmente correladas.[4] Se ele é zero, X_1 e X_2 são chamadas de não-correladas. (Então, a proposição acima afirma que "independentes" implica "não-correladas".) Agora podemos resumir os

Postulados da MQ tradicional.

1. A cada sistema corresponde um espaço Hilbert $\mathcal{H}$. Os estados puros correspondem, bijetivamente, aos raios $\mathbb{C}\psi$, $\psi \in \mathcal{H}$.

2. Observáveis correspondem, bijetivamente, aos operadores auto-adjuntos em $\mathcal{H}$.[5]

3. Seja $p_{A,\psi}(\Delta)$ a probabilidade que a medição de um observável A resulta num valor no intervalo $\Delta \subset \mathbb{R}$, se o sistema for preparado no estado correspondente a $\psi \in \mathcal{H}$. Essa probabilidade é dada por

$$p_{A,\psi}(\Delta) = \langle\, \psi, E_A(\Delta)\psi \,\rangle / \|\psi\|^2. \tag{8}$$

4. ("Postulado de projeção"). Se a medição (ideal) de A no estado ψ resultou num valor no intervalo $\Delta \subset \mathbb{R}$, então logo depois da medição o estado corresponde a $E_A(\Delta)\psi$.

5. (Dinámica continua.) Sem interações com aparelhos macroscópicos, a dinámica do sistema (fechado) é continua.

Com respeito ao item 5, recordamos que no chamado "cenârio de Schrödinger" a dinámica se refere aos vetores, que evoluam no tempo de acordo com a equação de Schrödinger, $\psi_t = U_t \psi_0$, U_t unitário com $i\frac{d}{dt}U_t = HU_t$, e os observáveis são independente de tempo. No "cenârio de Heisenberg", a dependência do tempo é transferida aos observáveis, $A_t = U_t^{-1} A U_t$, e os estados são independete do tempo. Um vetor descreve então o estado do sistema na sua extensão inteira quadridimendional. (Os dois cenârios são equivalentes, pois

$$\langle \psi_t, A\psi_t \rangle = \langle U_t\psi, AU_t\psi \rangle = \langle \psi, U_t^{-1} A U_t \psi \rangle = \langle \psi, A_t \psi \rangle.$$

Nos vamos usar principalmente o cenârio de Heisenberg.)

Observações. i) As especificações "bijetivamente" em 1. e 2. foram feitas por von Neumann, e foram desprezados depois para admitir setores de superseleção.
ii) Postulado 3 implica que os possíveis valores encontrados na medida de um observavel são exatamente o espectro do operador correspondente.
iii) *Propriedades* correspondem a projetores orthogonais, i.e. operadores auto-adjuntos P satisfazendo $P^2 = P$.

[4] I.e., existem números a e b tal que a dispersão de $X_1 - a - bX_2$ é nula.
[5] Nos vamos frequentemente identificar estados com vetores, e observaveis com operadores.

É importante observar que o postulado 3 pode ser substituido por um axioma referente às valores esperados. As probabilidades $p_{A,\psi}(\Delta)$ definidas no postulado 3 têm as propriedades de uma medida. O valor esperado correspondente, definido como na eq. (3), seja denotado por $\langle A \rangle_\psi$. Usando eqs. (85) e (8), nos obtemos

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\psi &:= \|\psi\|^{-2} \int \lambda \, dp_{A,\psi}(\lambda) = \|\psi\|^{-2} \int \lambda \, d\langle \, \psi, E_A(\lambda)\psi \, \rangle \\ &= \|\psi\|^{-2} \langle \, \psi, A\psi \, \rangle. \end{aligned} \tag{9}$$

Assim, as probabilidades do postulado 3. implicam os valores esperados. Mas como nos vimos na Proposição 1.2, o converso vale tambem: A distribuição de probabilidades pode ser reconstruida pelos valores esperados. (Neste caso, a reconstrução funciona assím: No calculo funcional podem ser construido funções $f(A)$ de um operador auto-adjunto A, e $E_A(\Delta)$ é nada mais do que a função caraterística $\chi_\Delta(A)$ de A. Então a probabilidade na eq. (8) é o valor esperado do operador $\chi_\Delta(A)$.)

Proposição 1.4 *O postulado 3 é equivalente com: O valor esperado de um observavel, se o sistema for preparado no estado $\psi \in \mathcal{H}$, é dado por*

$$\langle \, \psi, A\psi \, \rangle / \|\psi\|^2. \tag{10}$$

Observa que para um projetor ortogonal (correspondente fisicamente a uma propriedade), o valor esperado coincede com a probabilidade de encontrar o valor 1:

$$\langle P \rangle_\psi \equiv \|\psi\|^{-2} \langle \psi, P\psi \rangle = \|\psi\|^{-2} \langle \psi, E_P(\{1\})\psi \rangle = p_{P,\psi}(\{1\}).$$

(Na segunda equação usamos a Eq. (86).)

Um observavel particular é a propriedade "o sistema se encontra no estado ϕ", representada pela projeção P_ϕ para $\mathbb{C}\phi$,

$$P_\phi \, \psi = \frac{\langle \, \phi, \psi \, \rangle}{\|\phi\|^2} \, \phi.$$

O valor esperado deste observavel no estado ψ é dado por

$$\langle P_\phi \rangle_\psi \equiv \frac{\langle \, \psi, P_\phi \psi \, \rangle}{\|\psi\|^2} = \frac{|\langle \, \phi, \psi \, \rangle|^2}{\|\phi\|^2 \, \|\psi\|^2} \tag{11}$$

e é chamado de *probabilidade de transição* entre os estados ϕ e ψ.

Postulados da Mecânica Quântica Algébrica. Os observáveis de um sistema correspondem aos elementos auto-adjuntos de uma algebra-* $\mathcal{A}$. Os estados correspondem aos funcionais positivos e normalizados.

Observações. Como no caso da MQ tradicional, os valores espectrais são os possiveis resultados de medidas. (Isso é uma *Consequência* dos postulados, se $\mathcal{A}$ é uma algebra C^*, ver abaixo!) Se $\mathcal{A}$ é uma algebra-*, o espectro de A^* é o conjugado do espectro de A, veja Lema A.8, então o espectro de uma observável (=auto-adjunto) é real. Ademais, uma observável positiva tem espectro positivo.[6] Por isso, o valor esperado $\omega(A)$ de A deve ser positivo. Finalmente, o valor esperado do observavel $\mathbb{1}$ (que tem, por definição, o valor 1 em qualquer medição), é claramente 1. Por isso ω deve ser normalizado.

[6] Comprovante: !

1.2 Symmetries

As is clear from Eqs. (9) and (10), a state corresponds not to a vector $\psi \in \mathcal{H}$, but to a *ray*, i.e., a one-dimensional subspace of the form $\hat{\psi} := \mathbb{C}\psi$. The transition probalility (11) between ϕ and ψ depends only on the corresponding rays, and is also called the transition probalility[7] between $\hat{\phi}$ and $\hat{\psi}$:

$$|\langle \hat{\phi}, \hat{\psi} \rangle|^2 := \frac{|\langle \phi, \psi \rangle|^2}{\|\phi\|^2 \, \|\psi\|^2}. \tag{12}$$

All information of the system can, in principle, be recovered from the knowledge of all transition probabilities. Therefore, a *symmetry operation* of the quantum mechanical system described by $\mathcal{H}$ should correspond mathematically to a transformation $\hat{U}$ of the rays of $\mathcal{H}$ which preserves the transition probabilities,

$$|\langle \hat{U}\hat{\phi}, \hat{U}\hat{\psi} \rangle|^2 = |\langle \hat{\phi}, \hat{\psi} \rangle|^2. \tag{13}$$

(As usual, we identify such transformation with a symmetry transformation.) There holds

Theorem 1.5 (Wigner) *Let $\hat{U}$ be an invertible transformation of the rays in $\mathcal{H}$ which preserves all transition probabilities. Then there is an invertible map $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ satisfying $\widehat{U\psi} = \hat{U}\hat{\psi}$. U is unique up to a factor of modulus 1 and is either unitary or anti-unitary.*

(For a proof, see [14].) Note that if $\hat{U}$ has the form of a square, $\hat{U} = (\hat{U}_1)^2$, then U is unitary (and not anti-unitary).

An example for a physical symmetry operation is a transformation of our entire laboratory to another inertial system by a space-time translation, rotation, Lorentz transformation, generally: by a Poincaré transformation L.[8] Therefore, each Poincaré transformation $L \in P_+^\uparrow$ must be "represented" by a symmetry operation $\hat{U}_L$. Interpretation in quantum mechanics:

If the state prepared by a specific apparatus in the original laboratory corresponds mathematically to $\hat{\psi}$, then the state prepared by the same apparatus, but in the transformed laboratory, corresponds mathematically to $\hat{U}_L\hat{\psi}$.

A short calculation shows that the projection onto $\hat{U}_L\hat{\phi}$ is

$$P_{\hat{U}_L\hat{\phi}} = U_L P_{\hat{\phi}} U_L^{-1},$$

where the unitary[9] operator U_L is any one of the unitaries which implement $\hat{U}_L$ in the sense of Thm. 1.5. Since the projections generate (in some sense to be specified) all observables, this shows:

If an observable measured by a specific measuring apparatus in the original laboratory corresponds mathematically the operator A, then the observable measured by the same apparatus, but in the transformed laboratory, corresponds mathematically to

$$U_L A U_L^{-1}. \tag{14}$$

In particular, if u is a time-like unit vector, then the family of unitaries $U_t := U_{(tu,\mathbb{1})}$ implements an automorphism group $A \mapsto U_t A U_t^{-1}$ which is interpreted as the *dynamics* as seen in the reference system u.

[7] or ray product

[8] This holds of course only if the gravitational field can be neglected.

[9] An anti-unitary U_L is excluded for the reasons mentioned later.

The concatination of L_1 and L_2 should be represented by the concatination of $\hat{U}_{L_1}$ and $\hat{U}_{L_2}$, i.e.,

$$\hat{U}_{L_1}\hat{U}_{L_2} = \hat{U}_{L_1 L_2}.$$

(We then call $L \mapsto \hat{U}_L$ a ray representation, or projective representation, of $P_+^\uparrow$.) For the operators U_{L_1}, U_{L_2}, this implies

$$U_{L_1}U_{L_2} = e^{i\omega(L_1,L_2)}\, U_{L_1L_2}, \qquad \omega(L_1,L_2) \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Picking a different $U'_L := e^{i\alpha(L)}U_L$ which corresponds to $\hat{U}_L$ yields a different ω', namely,

$$\omega'(L_1,L_2) = \omega(L_1,L_2) + \alpha(L_1) + \alpha(L_2) - \alpha(L_1L_2).$$

The question arises whether a proper choice of $\alpha(\cdot)$ yields vanishing ω' and thus a proper representation. If the ray representation is continuous in the sense that

$$|\langle\, \hat{\phi}, \hat{U}_L\hat{\psi}\,\rangle| \to |\langle\, \hat{\phi}, \hat{\psi}\,\rangle| \qquad \text{for } L \to 1, \tag{16}$$

then this question is settled by the following theorem due to Wigner and Bargman.

Theorem 1.6 (Bargman, Wigner) *To every continuous ray representation $L \mapsto \hat{U}_L$ of the Poincaré group $P_+^\uparrow$ there exists a strongly*[10] *continuous unitary representation $(a,A) \mapsto U(a,A)$ of the universal covering group*[11] *of $P_+^\uparrow$ such that*

$$\hat{U}_{(a,\Lambda(A))}\hat{\phi} = \widehat{U(a,A)\phi}.$$

(For a proof, see [14].) An analogous statement holds for the ray representations of the rotation group $SO(3)$ (with universal covering group $SU(2)$) and the euclidean group $\mathbb{R}^3 \rtimes SO(3)$ (with covering group $\mathbb{R}^3 \rtimes SU(2)$).

1.3 Energy-Momentum Spectrum

Let U be a strongly continuous unitary representation of $\tilde{P}_+^\uparrow$ in some Hilbert space $\mathcal{H}$. We consider first the restriction of U to the translations, $a \mapsto U(a) \doteq U(a, \mathbf{1})$. This representation characterizes 4 self-adjoint, mutually commuting operators $P_0, ..., P_3$,

$$U(a) = e^{iP\cdot a} \qquad P\cdot a := P_\mu a^\mu,$$

which are interpreted as the operators corresponding to the total energy, P_0, and momentum, $\boldsymbol{P} = (P_1, P_2, P_3)$, as measured in the reference system $\{e_{(0)}, \ldots, e_{(3)}\}$ to which the coordinates a^μ refer, $a = \sum_\mu a^\mu e_{(\mu)}$. In particular, P_0 is the generator of the dynamics

[10] In fact, in the case of a unitary representation, weak continuity (or even weak measurability) already implies strong continuity [10, Thm. VIII.9].

[11] $P_+^\uparrow$ is the semidirect product of the translations and the Lorentz group, $P_+^\uparrow = \mathbb{R}^4 \rtimes L_+^\uparrow$. The universal covering group of the Lorentz group is $SL(2,\mathbb{C})$, hence the universal covering group of $P_+^\uparrow$ is the semidirect product $\tilde{P}_+^\uparrow = \mathbb{R}^4 \rtimes SL(2,\mathbb{C})$. The covering projection $SL(2,\mathbb{C}) \to L_+^\uparrow$, $A \mapsto \Lambda(A)$ is characterized by

$$A\underline{x}A^* = \underline{\Lambda(A)x},$$

where $x \mapsto \underline{x} \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})^h$ is the linear isomorphism from $\mathbb{R}^n$ onto the hermitean 2 by 2 matrices given by

$$\underline{x} := x^0 + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \sum_\mu x^\mu \sigma_\mu, \quad \sigma_0 := \mathbf{1}\,.$$

$t \mapsto U(te_{(0)})$ as seen in this reference system. (More generally, in a reference system described by a time-like unit vector u, the dynamics is implemented by $t \mapsto U(tu) = e^{itP\cdot u}$ according to the remark after Eq. (14), so the energy operator in this reference system should be $P \cdot u$. We shall see now that this is consistent.) The relation

$$U(A)U(a)U(A)^{-1} = U(\Lambda(A)a), \quad A \in SL(2, \mathbb{C})$$

follows from the condition that U is a representation and implies

$$U(A)\,(P \cdot a)\,U(A)^{-1} = P \cdot \Lambda(A)a. \tag{17}$$

Thus, the quadruple $(P_0, \ldots, P_3)$ transforms as a covector, and consequently the *mass operator* $M := (P \cdot P)^{\frac{1}{2}}$ transforms as a scalar,

$$U(A)MU(A)^{-1} = M. \tag{18}$$

This shows in particular that the interpretation (14) is consistent in the case of the energy operator $P \cdot u$ in a reference system u and the mass operator M: By Eq. (14), the energy in a transformed reference system Λu should be described by

$$U(A)(P \cdot u)U(A)^{-1}, \qquad \Lambda = \Lambda(A),$$

which due Eq. (17) coincides with the correct expression $P \cdot \Lambda u$. Similarly, the mass operator in the transformed system should be $U(A)MU(A)^{-1}$ according to Eq. (14), which due to Eq. (18) coincides with M: The mass is independent of the reference system. The joint spectrum of the 4 generators P_μ is the closed subset of $\mathbb{R}^4$,

$$\mathrm{Sp}P := \{(p_0, p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^4 \mid p_\mu \in \mathrm{Sp}P_\mu, \mu = 0, ..., 3\}, \tag{19}$$
$$= \{p \in \mathbb{R}^4 \mid p \cdot a \in \mathrm{Sp}(P \cdot a)\ \forall a \in \mathbb{R}^4\}, \tag{20}$$

called the *energy-momentum spectrum*. By the spectral theorem the P_μ have a family of joint spectral projections[12] $E_P(\Delta)$, $\Delta \subset \mathbb{R}^4$, such that

$$U(a) = \int_{\mathrm{Sp}P \subset \mathbb{R}^4} e^{iq\cdot a}\, dE_P(q). \tag{22}$$

(See Thm. 8.8 and Eq. (4) thereafter in [11] for a proof in the case of a numerical product measure.) If ϕ is in the image of $E_P(\Delta)$, $E_P(\Delta)\phi = \phi$, we say that ϕ has total energy-momentum contained in Δ. In more detail, we call *spectral support* of ϕ, $\mathrm{supp}_P(\phi)$, the complement of the union over all open sets Δ such that $E_P(\Delta)\phi = 0$. It coincides with the support of the *spectral measure* μ_ϕ associated with ϕ,

$$\mu_\phi(\Delta) := \langle\, \phi, E_P(\Delta)\phi\,\rangle.$$

Physically, it is the set of possible measurement results for the total energy-momentum in the state corresponding to ϕ.[13] Note that two vectors with disjoint spectral supports are orthogonal since $\langle\, E_{\Delta_1}\phi_1, E_{\Delta_2}\phi_2\,\rangle = \langle\, \phi_1, E_{\Delta_1}E_{\Delta_2}\phi_2\,\rangle = 0$ if $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$.

---

[12]For a cartesian product, the joint spectral projection is given by

$$E_P(\Delta_0 \times \ldots \times \Delta_3) = E_{P_0}(\Delta_0) \cdots E_{P_3}(\Delta_3). \tag{21}$$

[13]Clearly, the spectral support of a vector is contained in the energy-momentum spectrum.

We now discuss the form of the energy-momentum spectrum in quantum field theory. Eq. (17) implies that SpP is Lorentz invariant. Let us first look at the point spectrum. If ϕ is a joint eigenvector of $P \cdot a$, $a \in \mathbb{M}$, with eigenvalues $p \cdot a$, then $U(A)\phi$ is an eigenvector of $P \cdot \Lambda(A)a$ with eigenvalues $p \cdot a$, or, equivalently, an eigenvector of $P \cdot a$ with eigenvalues $p \cdot \Lambda(A^{-1})a$. But eigenvectors of self-adjoint operators with different eigenvalues are orthogonal. Hence only the eigenvalue $p = 0$ is compatible with the assumed continuity of the representation U. In fact, a vector Ω is a joint eigenvector of P with eigenvalue 0 (or has energy-momentum 0) if, and only if, it is translation invariant,

$$U(a)\Omega = \Omega \qquad \text{for all } a \in \mathbb{R}^4.$$

Such a vector obviously corresponds to a homogenous state. The only such state should be the vacuum, and therefore such vector Ω is called the *vacuum vector.* It is assumed to be unique, that is, to be the only eigenvector of P (up to a factor).

A single free relativistic particle of mass m satisfies the energy-momentum dispersion relation $p \cdot p = m^2$. Quantum mechanically, we define a *single particle vetor* to be an eigenvector of the mass operator with eigenvalue m, $(P \cdot P)\ \psi = m^2\,\psi$. Equivalently (exercise!), the spectral support of such ψ is contained in the mass hyperboloid

$$H_m^+ := \{p \in \mathbb{R}^4 \ \mid\ p \cdot p = m^2\}. \tag{23}$$

A reasonable physical requirement is that the vacuum be the state with lowest energy, that is to say, it is impossible to extract energy from the vacuum. Now the notion "energy" is observer dependent in a relativistic theory. If energy and momentum in a given reference system $e_{(\mu)}$ are described by P_0 and $\boldsymbol{P}$ then, by Eq. (17), in a system which moves with velocity $\boldsymbol{v}$ with respect to the original one, energy is described by the operator $P_0' = P \cdot \Lambda_{\boldsymbol{v}} e_{(0)}$, where $\Lambda_{\boldsymbol{v}}$ is the corresponding boost. Thus,

$$\begin{aligned} P_0' &= (1 - \|\boldsymbol{v}\|^2)^{-1/2}\left(P_0 + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{P}\right) \\ &= \sqrt{1 + \|\boldsymbol{u}\|^2}\, P_0 + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{P}, \qquad\qquad \boldsymbol{u} = (1 - \|\boldsymbol{v}\|^2)^{-1/2}\,\boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

If we demand that the vacuum has lowest energy in any reference system, then the simultaneous eigenvalues $p = (p_0, \boldsymbol{p})$ of $P = (P_0, \boldsymbol{P})$ have to satisfy

$$\sqrt{1 + \|\boldsymbol{u}\|^2}\, p_0 + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{p} \geq 0$$

for all $\boldsymbol{u}$ with $\|\boldsymbol{u}\| \leq 1$. The set of $p \in \mathbb{R}^4$ wich satisfy this condition is just the *closed forward light cone* $\overline{V}_+$,

$$\overline{V}_+ := \{p \in \mathbb{R}^4 \ \mid\ p \cdot p \geq 0,\ p_0 \geq 00\}.$$

So our requirement ammounts to

$$\mathrm{Sp}P \subset \overline{V}_+. \tag{24}$$

If the spectrum contains an isolated mass shell H_m^+ as lower bound (apart from possibly the zero eigenvalue corresponding to the vacuum),

$$H_m^+ \ \subset\ \mathrm{Sp}P \ \subset\ \{0\} \cup H_m^+ \cup \{p \in \mathbb{R}^4 \ \mid\ p \cdot p \geq (m + \mu)^2\},$$

we call the theory *purely massive.* In the theory of a free field of mass m the spectrum has this form. If there are several free fields with (partially) distinct masses, some mass hyperboloids may be submerged into the continuum above the two-particle threshold of other particle types. In the case of free fields, one can show that the spectral measures (associated with vectors orthogonal to the vacuum) are absolutely continuous with respect to some Lorentz invariant measure on the closed forward light cone. Before making this precise, let us recall the Lorentz invariant measures on $\overline{V_+}$. Every point $p \in \overline{V_+}$ is on a unique mass hyperbloid H_m^+ and can (after choosing a reference system) be uniquely written as $p = (\omega_m(\boldsymbol{p}), \boldsymbol{p})$, where $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3$ and

$$\omega_m(\boldsymbol{p}) := \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}.$$

On the mass shell H_m^+, there is a unique (up to a factor) Lorentz invariant measure,

$$d\mu_m(p) := \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2\omega_m(\boldsymbol{p})}, \qquad p \in H_m^+. \tag{25}$$

Furthermore, every Lorentz-invariant (and polynomially bounded) measure on $\overline{V_+}$ is of the form [10, Thm. IX.33]

$$c\delta(0)d^4p + d\rho(m)d\mu_m(p), \tag{26}$$

where ρ is a (polynomially bounded) measure on $\mathbb{R}_0^+$.[14] Now a folklore theorem asserts:

Conjecture 1.7 *In a free field theory the spectral measure associated with any vector orthogonal to the vacuum is absolutely continuous to some Lorentz invariant measure on the closed forward light cone. In other words, for any $\psi \in \mathcal{H}$ there is some measure ρ on $\mathbb{R}_0^+$ and a locally L^1 function h on $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^3$ such that*

$$\langle\, \psi, U(x)\psi \,\rangle = \langle\, \psi, P_\Omega \psi \,\rangle + \int_0^\infty d\rho(m) \int_{H_m^+} d\mu_m(\boldsymbol{p}) h(m, \boldsymbol{p})\, e^{ip\cdot x}|_{p_0=\omega_m(\boldsymbol{p})}. \tag{27}$$

The pure points of the measure ρ (i.e., points $m \in \mathbb{R}_0^+$ with $\rho(\{m\}) \neq 0$) are precisely the eigenvalues of the mass operator.

In a theory which satisfies *asymptotic completeness* (the scattering states for $t \to \pm\infty$ are dense in $\mathcal{H}$), it can be shown that the representation of $\tilde{P}_+^\uparrow$ is unitarily equivalent to that of a free field theory, and then the above statement also holds. As a consequence of this property (and the Riemann-Lebesgue Lemma), the translation $U(a)$ converges weakly to zero on the orthogonal complement of the vacuum if a goes to space-like infinity. More precisely, for any space-like vector a and any $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ there holds

$$\langle\, \psi, U(\lambda a)\, \phi \,\rangle \to \langle\, \psi, P_\Omega\, \phi \,\rangle \quad \text{if } \lambda \to \infty. \tag{28}$$

2 Quantum Fields: Wightman Axioms

Conventions: The Fourier transform of a function $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$ is defined as in Eq.(127), with $p \cdot x := \sum_{k=1}^n p_k \cdot x_k = \sum_{k=1}^n (p_k)_\mu (x_k)^\mu$. (Here each $x_k \in \mathbb{R}^4$ is interpreted as an event in space-time (rather, a Minkowski vector), and $p_k \in \mathbb{R}^4$ as an energy-momentum vector.)

[14] This notation means that for every μ-integrable function f there holds

$$\int f d\mu = cf(0) + \int_0^\infty d\rho(m) \int_{H_m^+} d\mu_m(p)\, f(p).$$

2.1 Introduction

The axioms. Free field as a model. See [12, Ch. 3-1, 3-2] and [13].
Properties of the Wightman functions [12, Chap. 3-3].
Källen-Lehmann representation of the two-point function; UV Singularities. [13, Ch. 1.2].
Reconstruction theorem [12, Chap. 3-4].

Wightman Axioms. Covariance:

$$U(a,A)\,\varphi_i(x)\,U(a,A)^{-1} = S(A^{-1})_{ij}\,\varphi_j(a+\Lambda x). \tag{29}$$

Causality: Whenever x and y are causally separated, then

$$[\varphi_i(x),\varphi_j(y)]_\pm = 0. \tag{30}$$

Cyclicity:

$$D_0 := \mathrm{span}\{\Omega, \varphi_{i_1}(f_1)\cdots\varphi_{i_n}(f_n)\Omega \mid n>0\} \quad \text{is dense in } \mathcal{H}. \tag{31}$$

Etc. (!)

Theorem 2.1 (Källen-Lehmann) *The two-point function of any scalar Wightman field is of the form*

$$w(x,y) = c^2 + \int_0^\infty d\rho(m)\Delta_m^+(x-y), \tag{32}$$

where ρ is a measure on $\mathbb{R}_0^+$ and Δ_m^+ is the two-point fuction of the free scalar field,

$$\Delta_m^+(\xi) = (2\pi)^{-3}\int_{H_m^+} d\mu_m(\boldsymbol{p})e^{-ip\cdot\xi}. \tag{33}$$

If the one-point functions are all zero, i.e. $\langle\,\Omega,\varphi(f)\Omega\,\rangle = 0$ for all f, then the constant c^2 in Eq. (32) *is zero.*

Corollary 2.2 (Existence of UV singularities) *Suppose there is an open set $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^4$ such that $\varphi(x_0)$ is a* function *for all $x_0\in\mathcal{O}$. Then the Hilbert space is one-dimensional and $\varphi(x) = c\mathbb{1}$ for all $x\in\mathbb{R}^4$. (In other words, the theory is trivial and cannot even describe single particle states.)*

The corollary implies that in a non-trivial theory one unavoidably has the contributions Δ_m^+ to the two-point function, see Eq. (32). But these are divergent for $\xi\to 0$ as $|\xi|^{-2}$. Hence the two-point function $w(x,y)$ unavoidably is singular for $x-y\to 0$ (i.e., for high energies).

Energy-Momentum Transfer of the Fields.

Lemma 2.3 *$\varphi_i(f)$ changes the energy-momentum of a state by vectors in* $\mathrm{supp}\hat f$. *More precisely, Let $\psi\in D$ with spectral support contained in some set Δ. Then the spectral support of $\varphi_i(f)\psi$ is contained in $\Delta+\mathrm{supp}\hat f$.*

Proof. We treat first the scalar case. By covariance, we have $U(a)\varphi(f)U(a)^{-1} = \varphi(f_a)$ where $f_a(x) = f(x-a)$. The inverse Fourier transform of f_a (see Eq. (128)) is given by $(\check f_a)(p) = e^{-ip\cdot a}\,\check f(p)$. Thus we have for any $h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$,

$$\begin{aligned}\hat h(P)\,\varphi(f)\psi &= \int d^4x\,h(x)U(x)\hat\varphi(\check f)\psi = \int d^4x\,h(x)\,\hat\varphi_p\big((e^{-ip\cdot x}\check f(p)\big)U(x)\psi\\ &= \int_{q\in\overline{V_+}}\int d^4x h(x)\hat\varphi_p\big((e^{i(q-p)\cdot x}\check f(p)\big)dE(q)\psi = \int_{q\in\Delta}\hat\varphi_p\big(\hat h(q-p)\check f(p)\big)dE(q)\psi.\end{aligned}$$

(We have taken the x-integral into the argument of $\hat{\varphi}$ by virtue of Lemma C.3.) Note that only momenta $q \in \Delta$ contribute to the last integral due to the spectral support properties of ψ. Now suppose that $\hat{h}(q-p) = 0$ for all $q \in \Delta$ and $p \in \mathrm{supp}\check{f}$. Then $\hat{h}(q-p)\check{f}(p) = 0$ for all $q \in \Delta$ and the last expression vanishes. We have thus shown: If *supp* $\hat{h}$ is disjoint from $\Delta - \mathrm{supp}\check{f}$ then $\hat{h}(P)\,\varphi(f)\psi = 0$. Noting that $\mathrm{supp}\check{f} = -\mathrm{supp}\hat{f}$, this implies that the spectral support of $\varphi(f)\psi$ is contained in $\Delta + \mathrm{supp}\hat{f}$, as claimed. The general, non-scalar, case works analogously. □

Wightman Functions. The so-called n-point "functions", or Wightman functions, are defined by

$$w_{i_1\cdots i_n}(x_1,\ldots,x_n) := \langle\, \Omega, \varphi_{i_1}(x_1)\cdots\varphi_{i_n}(x_n)\Omega\,\rangle.$$

By covariance, Eq. (39) below, they depend only on the relative coordinates $\xi_k = x_k - x_{k+1}$, allowing for the definition of the tempered distributions $\mathcal{W}$:

$$\mathcal{W}_{i_1\cdots i_n}(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) := w_{i_1\cdots i_n}(x_1,\ldots,x_n), \qquad \xi_k = x_k - x_{k+1}.$$

To write this rigorously in terms of distributions, let ϕ be the transformation form $\mathbb{R}^{4n}$ onto itself which takes a vector to the relative and center-of-mass vectors:

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = (\xi_1,\ldots,\xi_{n-1},X), \qquad \xi_k = x_k - x_{k+1},\ X := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

This induces naturally a transformation of $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$, the so-called pull-back: for $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$, let $T_\phi f := f\circ\phi^{-1}$. Then for $g = g(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{4(n-1)})$, $\mathcal{W}$ is given by

$$\mathcal{W}(g) = w\big(T_{\phi^{-1}}(g\otimes h_0)\big), \tag{34}$$

where $h_0 = h_0(X)$ is any function in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ satisfying $\int d^4X\, h_0(X) = 1$ (see Exercise!).[15] The Wightman axioms imply that the Wightman functions are tempered distributions satisfying certain properties. To formulate them, we shall introduce some notation. Firstly, we assume that the set of fields $\{\varphi_i, i \in \{1,\ldots,N\}\}$ contains with each $\varphi_i(x)$ its adjoint[16] $\varphi_i(x)^\dagger$. This defines a conjugation $i \mapsto \bar{i}$ of the index set via $\varphi_{\bar{i}}(x) = \varphi_i(x)^\dagger$. Secondly: Let $T\mathcal{S}$ be the space of finite sequences $f = (f_0, f_1, \ldots, f_n, 0, 0, 0, \ldots)$ with $f_0 \in \mathbb{C}$ and $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4k})$ for $k > 0$. We define a conjugation $f \mapsto f^*$ on $T\mathcal{S}$ by

$$(f^*)_n(x_1,\ldots,x_n) := \bar{f}_n(x_n,\ldots,x_1), \tag{36}$$

where the bar denotes pointwise conjugation.

Theorem 2.4 *The Wightman functions satisfy the following properties.*

1. *Hermiticity: There holds*

$$\overline{w_{i_1\cdots i_n}(x_1,\ldots,x_n)} = w_{\bar{i}_n\cdots\bar{i}_1}(x_n,\ldots,x_1). \tag{37}$$

[15] For arbitrary h, we have then

$$w\big(T_{\phi^{-1}}(g\otimes h)\big) = \mathcal{W}(g)\int d^4X\, h(X). \tag{35}$$

The right hand side can be written $\int d^4X\, \mathcal{W}_\xi\big((g\otimes h)(\xi,X)\big)$. In other words, for f of the form $f = T_{\phi^{-1}}(g\otimes h)$ there holds

$$w(f) = \int d^4X\ \mathcal{W}_\xi\big((T_\phi f)(\xi,X))\big).$$

By linearity and continuity, this formula holds for all $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$.

[16] The dagger means $A^\dagger := (A^*)|_D$.

2. *Positivity:*

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} w_{n+m}((f^*)_n \otimes f_m) \geq 0. \tag{38}$$

3. *Covariance: For $(a, A) \in \tilde{P}_+^{\uparrow}$ there holds*

$$w_{i_1 \cdots i_n}(x_1, \ldots, x_n) = S(A^{-1})_{i_1 j_1} \cdots S(A^{-1})_{i_1 j_1} w_{j_1 \cdots j_n}(a + \Lambda x_1, \ldots, a + \Lambda x_n). \tag{39}$$

4. *Causality: If x_k and x_{k+1} are causally separated, then*

$$w_{i_1 \cdots i_n}(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = w_{i_1 \cdots i_n}(x_1, \ldots, x_{k+1}, x_k, , \ldots x_n). \tag{40}$$

5. *Spectral property: The support of the Fourier transform of $\mathcal{W}_{i_1 \cdots i_n}$ is contained in $(\overline{V_+})^{\times(n-1)}$,*

$$\mathrm{supp} \mathcal{W}_{i_1 \cdots i_n} \subset (\overline{V_+})^{\times(n-1)}. \tag{41}$$

6. *Cluster property: If a is a space-like vector, then*

$$w_n(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1} + \lambda a, \ldots, x_n + \lambda a) \to w_k(x_1, \ldots, x_k)\, w_{n-k}(x_{k+1}, \ldots, x_n) \tag{42}$$

if λ goes to infinity.

Proof. Let us prove the spectral property in the scalar neutral case. Lemma 2.3 implies that

$$\langle\, \Omega, \varphi(f_1) \cdots \varphi(f_n)\Omega \,\rangle = 0 \tag{43}$$

if for some ν, $\mathrm{supp}\hat{f}_\nu + \cdots + \mathrm{supp}\hat{f}_n$ is disjoint from $\overline{V_+}$ or if $\mathrm{supp}\hat{f}_1 + \cdots + \mathrm{supp}\hat{f}_n$ does not contain the zero. Since $w(f) = \hat{w}(\check{f})$ and $\mathrm{supp}\check{f} = -\mathrm{supp}\hat{f}$, this implies that (in sloppy notation)

$$\hat{w}(p_1, \cdots, p_n) = 0 \quad \text{if } -p_\nu - \cdots - p_n \notin \overline{V_+} \text{ for some } \nu. \tag{44}$$

To relate this with $\mathcal{W}$ we use Eq. (35) which implies

$$w\big(T_{\phi^{-1}}(g \otimes h)\big) = (2\pi)^4 \check{h}(0) \mathcal{W}(g), \tag{45}$$

where h is any function with $\check{h}(0) \neq 0$. (We have used that $\int d^4X h(X) = (2\pi)^4 \check{h}(0)$.) Let us denote $f := T_{\phi^{-1}}(g \otimes h)$. In order to exploit our knowledge (44) about the support of w, we need to relate the inverse Fourier transform of f with that of g and h. To this end, note that the momentum space transformation

$$\psi : (p_1, \ldots, p_n) \mapsto (q_1, \ldots, q_{n-1}, P), \qquad P := \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu, \quad q_\nu := p_1 + \ldots + p_\nu - \frac{\nu}{n} P,$$

is just contragredient to ϕ (it is the transpose of ϕ^{-1}), that is, it satisfies $\psi(p) \cdot \phi(x) = p \cdot x$ for all $p, x \in \mathbb{R}^{4n}$. This implies that $\mathcal{F}^{-1} \circ T_{\phi^{-1}} = T_{\psi^{-1}} \circ \mathcal{F}^{-1}$, in particular

$$\check{f}(p_1, \ldots, p_n) = \check{g}(q_1, \ldots q_{n-1})\, \check{h}(P), \tag{46}$$

with $(q_1, \ldots q_{n-1}, P) = \psi(p_1, \ldots, p_n)$. Thus Eq. (45), namely $\hat{w}(\check{f}) = (2\pi)^4 \check{h}(0) \hat{\mathcal{W}}(\check{g})$, implies that $\hat{w}(p_1, \ldots, p_n) = (2\pi)^4 \delta(P) \hat{\mathcal{W}}(q_1, \cdots, q_{n-1})$. Dropping the terms $\frac{\nu}{n} P$ in the argument of $\hat{\mathcal{W}}$ (which is justified due to the δ function), we arrive at

$$\begin{aligned} \hat{w}(p_1, \ldots, p_n) &= (2\pi)^4 \delta(P)\, \hat{\mathcal{W}}(p_1, p_1 + p_2, \cdots, p_1 + \cdots p_{n-1}) && (47) \\ &= (2\pi)^4 \delta(P)\, \hat{\mathcal{W}}(-p_2 - \cdots - p_n, \cdots, -p_n). && (48) \end{aligned}$$

Now Eq. (44) implies that $\hat{\mathcal{W}}(k_1, \cdots, k_{n-1}) = 0$ if $k_\nu \notin \overline{V_+}$ for some ν, in other words: The support of $\mathcal{W}$ is contained in $(\overline{V_+})^{\times(n-1)}$, as claimed.[17] □

Reconstruction Theorem. The family of Wightman functions $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniquely determines the quantum field and the representation U under which it is covariant. We first consider uniqueness (Proposition 2.5) and then existence, that is, the reconstruction of the field from its Wightman functions (Theorem 2.6).

Proposition 2.5 (Uniqueness) *Let $\mathcal{H}$ and $\hat{\mathcal{H}}$ be Hilbert spaces carrying unitary representations U and $\hat{U}$ of $\tilde{P}_+^\uparrow$, respetively, with unique vacua Ω and $\hat{\Omega}$. Let $\varphi_i(x)$ and $\hat{\varphi}_i(x)$ be quantum fields acting in $\mathcal{H}$ and $\hat{\mathcal{H}}$, transforming under U and $\hat{U}$ according to the* same *representation D of $SL(2,\mathbb{C})$. Suppose the fields have the same Wightman functions,*

$$\langle\, \Omega, \varphi_{i_1}(x_1)\cdots\varphi_{i_n}(x_n)\Omega\,\rangle = \langle\, \hat{\Omega}, \hat{\varphi}_{i_1}(x_1)\cdots\hat{\varphi}_{i_n}(x_n)\hat{\Omega}\,\rangle. \tag{50}$$

Then the fields, as well as the representations, are unitarily equivalent. In other words, there is a unitary $V : \mathcal{H} \to \hat{\mathcal{H}}$ such that

$$\hat{\varphi}_i(x) = V\,\varphi_i(x)V^* \qquad \text{for all } x \in \mathbb{R}^4, i = 1, \ldots, N, \tag{51}$$

$$\hat{U}(g) = V\,U(g)V^* \qquad \text{for all } g \in \tilde{P}_+^\uparrow, \tag{52}$$

$$\hat{\Omega} = V\,\Omega. \tag{53}$$

Proof.

□

We now turn to the reconstruction of the fields and the representation U from the Wightman functions. For notational simplicity, we shall consider only the hermitean scalar case (only one field $\varphi(x) = \varphi(x)^*$).

Theorem 2.6 (Reconstruction Theorem) *Let $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a family of distributions, $w_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4n})$, satisfying hermiticity* (37)*, positivity* (38)*, covariance* (39)*, causality* (40)*, and the the spectral and cluster properties* (41)*,* (42)*.*

Then there is a Hilbert space $\mathcal{H}$, a continuous unitary representation U of $P_+^\uparrow$ in $\mathcal{H}$ satisfying the spectrum condition (24) *with a "unique" invariant vector Ω, and a hermitean scalar Wightman field $\varphi(x) = \varphi(x)^*$ which is covariant under U, whose n-point Wightman function coincides with w_n,*

$$\langle\, \Omega, \varphi(f_1), \ldots, \varphi(f_n)\Omega\,\rangle = w_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n). \tag{54}$$

---

[17] Let us do the same proof without the informal notation $\hat{w}(p_1, \ldots, p_n)$. The observation at Eq. (43) implies that, for $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$,

$$w(f) = 0 \text{ if for all } p \in \operatorname{supp}\hat{f}\ \exists \nu : p_\nu + \cdots + p_n \notin \overline{V_+} \tag{49}$$

or $p_1 + \cdots + p_n \neq 0$. Consider now a function $g = g(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ whose inverse Fourier transform $\check{g}$ has compact support disjoint from $(\overline{V_+})^{\times(n-1)}$. We have to show that then $\mathcal{W}(g) = 0$. To this end, let $f := T_{\phi^{-1}}(g \otimes h)$ as before, and let $p \in \operatorname{supp}\hat{f}$, that is, $-p \in \operatorname{supp}\check{f}$. Then, by Eq. (46), $(-q_1, \ldots, -q_{n-1}) \in \operatorname{supp}\check{g}$ and $P \in \operatorname{supp}\check{h}$. By hypothesis, this implies that there is some ν such that $-q_\nu$ is not in $\overline{V_+}$. Now we can choose the support of $\check{h}$ sufficiently small about the origin such that $-q_\nu + (1-\nu/n)P \equiv p_{\nu+1} + \cdots + p_n$ is still not in $\overline{V_+}$. (Namely, choose $\operatorname{supp}\check{h}$ such that $\operatorname{supp}\check{g} + (\operatorname{supp}\check{h})^{\times(n-1)}$ still is disjoint from $(\overline{V_+})^{\times(n-1)}$.) Summarizing: For all $p \in \operatorname{supp}\hat{f}$ there is some ν such that $p_{\nu+1} + \cdots + p_n \notin \overline{V_+}$. But this implies by Eq. (49) that $w(f) = 0$ and hence, by Eq. (45), that $\mathcal{W}(g) = 0$.

Note that the field and the representation U are unique up to unitary equivalence by the previous Proposition.

Proof. We consider the space $T\mathcal{S}$ of sequences of test functions as a $*$-algebra[18] , endowed with the product

$$(fg)_n := \sum_{k=0}^{n} f_k \otimes g_{n-k}$$

and with the involution defined in Eq. (36). This is the so-called Borchers-Uhlmann algebra. We further consider the family of Wightman functions as a functional W on this algebra, that is as a linear map $W : T\mathcal{S} \to \mathbb{C}$, by setting

$$W(f) := \sum_{n=0}^{\infty} w_n(f_n).$$

(We put $w_0(f_0) := f_0 \in \mathbb{C}$.) As a consequence of Eq. (38) it is positive,

$$W(f^* f) \geq 0. \tag{55}$$

The reconstruction then ammounts to the following problem. Given a positive functional W on a $*$-algebra $T\mathcal{S}$, construct a Hilbert space $\mathcal{H}$ and a $*$-representation[18] π of $T\mathcal{S}$ with cyclic[18] vector Ω, such that

$$W(f) = \langle \Omega, \pi(f)\Omega \rangle, \quad f \in T\mathcal{S}. \tag{56}$$

The solution to this problem is known as the GNS construction (Gelfand, Neimark, Segal) and will be outlined below (see e.g. [1, Thm. 2.3.16]). We also consider the natural action of Poincaré transformations L on $T\mathcal{S}$,

$$\big(\alpha_L(f)\big)_n(x_1, \ldots, x_n) := f_n(L^{-1}x_1, \ldots, L^{-1}x_n).$$

Each α_L is a $*$-automorphism of $T\mathcal{S}$, that is, $\alpha_L(f)\alpha_L(g) = \alpha_L(fg)$ and $\big(\alpha_L(f)\big)^* = \alpha_L(f^*)$. The functional W turns out to be invariant under these automorphisms, $W \circ \alpha_L = W$, as a consequence of covariance (39). This implies that an operator $U(L)$ is well-defined by

$$U(L)\pi(f)\Omega := \pi\big(\alpha_L(f)\big)\Omega$$

and unitary. (To wit:

$$\|U(L)\pi(f)\Omega\|^2 = W\big(\alpha_L(f^* f)\big) = W(f^* f) = \|\pi(f)\Omega\|^2.$$

Putting $f = f_1 - f_2$ this also shows that $\pi(f_1)\Omega = \pi(f_2)\Omega$ implies $\pi\big(\alpha_L(f_1)\big)\Omega = \pi\big(\alpha_L(f_2)\big)\Omega$, hence $U(L)$ is well-defined.) Since obviously $\alpha_L \circ \alpha_{L'}$ coincides with $\alpha_{LL'}$, we get a unitary representation $L \mapsto U(L)$, which leaves Ω invariant. Further, the operators $U(L)$ in $\mathcal{H}$ obviously implement the automorphisms α_L in the sense that

$$U(L)\, \pi(f)\, U(L)^{-1} = \pi\big(\alpha_L(f)\big). \tag{57}$$

[18] Let us recall some algebraic notions used here.
A $*$-algebra is an algebra which has an *involution*, that is an anti-linear bijection $f \mapsto f^*$ which satisfies $(fg)^* = g^* f^*$ and is involutive, $(f^*)^* = f$.
A representation π of a $*$-algebra by operators in some Hilbert space is called a $*$-representation if $\pi(f^*)$ coincides with the adjoint operator $\pi(f)^*$.
A vector Ω is *cyclic* for a representation π of $T\mathcal{S}$ if $\pi(T\mathcal{S})\Omega$ is dense in $\mathcal{H}$.

(This is a standard construction in the GNS setting [1, Cor. 2.3.17].) Uniqueness of the vacuum follows from the cluster property (!). The spectral condition (24) follows from the support property (41) of the Fourier transforms of the Wightman functions (!).

After these constructions (whose details are given below), one defines for $f_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ the field as the operator

$$\varphi(f_1) := \pi\big((0, f_1, 0, 0 \ldots)\big)$$

acting on the dense subspace $D := \pi(T\mathcal{S})\Omega$. Ω is cyclic in the sense of Eq. (31) since it is cyclic for $\pi(T\mathcal{S})$, see footnote 18. The matrix elements of $\varphi(\cdot)$ between vectors in D are tempered distributions by construction. The fact that $\pi(f)^* = \pi(f^*)$ reduces to $\varphi(f_1)^* = \varphi(\bar{f}_1)$, that is φ is hermitean. Similarly, Eq. (56) reduces to Eq. (54), that is w_n are just the n-point functions of φ. Eq. (57) reduces to (29), that is the field is covariant (with S the trivial representation). The causality property (40) of the Wightman functions implies that for $\mathrm{supp} f$, $\mathrm{supp} g$ causally separated there holds

$$\langle\, \psi, \varphi(f)\varphi(g)\, \phi\, \rangle = \langle\, \psi, \varphi(g)\varphi(f)\, \phi\, \rangle,$$

whenever ψ and ϕ are of the form $\psi = \varphi(f_1)\cdots\varphi(f_n)\Omega$ and $\phi = \varphi(g_1)\cdots\varphi(g_m)\Omega$, respectively. This implies causality (30) of the field.

We now fill in the details of the construction of $\mathcal{H}$, Ω and π. We try to introduce a scalar product in $T\mathcal{S}$ by the sesquilinear map $W(f^*g)$. It has all relevant properties apart from positive definiteness. Let N be the kernel of the corresponding semi-norm,

$$N := \{f \in T\mathcal{S} :\ W(f^*f) = 0\}.$$

Using the Cauchy-Schwartz inequality

$$|W(f^*g)|^2 \leq W(f^*f)\, W(g^*g),$$

we find that N is a linear space and define the quotient space $D := T\mathcal{S}/N$. The Cauchy-Schwartz inequality also implies that for $f \in T\mathcal{S}, g \in N$ there holds $fg \in N$. To wit:

$$|W\big((fg)^*fg\big)| = |W(g^*f^*fg)| \leq W\big((g^*f^*f)^*g^*f^*f\big)^{\frac{1}{2}} W(g^*g)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

(That is to say, N is a left ideal: $T\mathcal{S} \cdot N \subset N$.) This implies that the sesquilinear form

$$\langle\, f + N, g + N\, \rangle := W(f^*g)$$

is well defined. By construction it is also positive definite, hence a scalar product on D. We now define $\mathcal{H}$ to be the completion of D with respect to the corresponding norm. Now let

$$\pi(f)\,(g + N) := fg + N.$$

This is well-defined due to the fact that N is a left ideal, $T\mathcal{S} \cdot N \subset N$. It satisfies by construction the representation property $\pi(f) \circ \pi(g) = \pi(fg)$. Further, there holds

$$\langle\, h + N, \pi(f)(g + N)\, \rangle = W(h^*fg) = W\big((f^*h)^*g\big) = \langle\, \pi(f^*)(h + N), g + N\, \rangle,$$

which shows that $\pi(f)^* = \pi(f^*)$. Thus, π is a $*$-representation of the $*$-algebra $T\mathcal{S}$. Putting $\Omega := \mathtt{1} + N$, where $\mathtt{1} := (1, 0, 0, \ldots)$ is the unit in the algebra $T\mathcal{S}$, one easily verifies Eq. (56). $\square$

Analyticity Properties of the Wightman functions. Let u be a Schwartz function such that $\hat{u}$ has support in $\mathbb{R}_0^+$. Then u can obviously be extended into the upper complex half plane via

$$u(x+iy) := (2\pi)^{-1} \int_0^\infty dp\, e^{ip(x+iy)}\, \hat{u}(p), \tag{58}$$

and it is holomorphic in $\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$. Let now χ be a smooth function such that $\chi(p) = 1$ for $p \geq 0$ and $\chi(p) = 0$ for $p < -\varepsilon$ for some $\varepsilon > 0$, and let

$$b_z(p) := (2\pi)^{-1}\, \chi(p) e^{ipz} = \begin{cases} (2\pi)^{-1}\, e^{ipz} & p \geq 0 \\ 0 & p < -\varepsilon. \end{cases}$$

For $y > 0$, the function $p \mapsto b_{x+iy}(p)$ is Schwartz. Due to the support properties we can then write

$$u(x+iy) = \int_{\mathbb{R}} dp\, b_{x+iy}(p)\, \hat{u}(p) \equiv \hat{u}(b_{x+iy}). \tag{59}$$

Let now u be a tempered distribution whose Fourier transform has support in $\mathbb{R}_0^+$. Then we use the above equation, to *define* a function

$$u(x+iy) := \hat{u}(b_{x+iy}) \tag{60}$$

on $\mathbb{R} + i\mathbb{R}_0^+$. One shows (exercise!) that if $z \to z_0$ in $\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$ then

$$b_z \to b_{z_0} \quad \text{and} \quad \frac{1}{z - z_0}\,(b_z - b_{z_0}) \to ip\, b_{z_0}(p)$$

in the Schwartz topology (independent of the direction in which z approaches z_0). Therefore the function $u(z)$ is actually holomorphic in the open upper complex half plane. Using Lemma C.3, we have

$$\int dx f(x) u(x+iy) \equiv \int dx f(x) \hat{u}(b_{x+iy}) = \hat{u}\Big(\int dx f(x) b_{x+iy}\Big) = \hat{u}(a_y \cdot \check{f}),$$

where $a_y(p) := e^{-py}\chi(p)$. (We have used that $\int dx f(x) b_{x+iy}(p) = a_y(p)\check{f}(p)$.) But $a_y(p) \to \chi(p)$ when $y \to 0$, and therefore $\hat{u}(a_y \cdot \check{f})$ goes to $\hat{u}(\chi \cdot \check{f}) \equiv \hat{u}(\check{f}) \equiv u(f)$ if $y \to 0$ in $\mathbb{R}^+$. We have

$$\int dx f(x) u(x+iy) \to u(f) \quad \text{for } y \to 0 \text{ in } \mathbb{R}^+. \tag{61}$$

To summarize:

Lemma 2.7 *Let u be a tempered distribution in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ whose Fourier transform has support in $\mathbb{R}_0^+$. Then u is the boundary value, in the sense of distributions, of a function which is holomorphic in the upper complex half plane. More precisely, there is a function $u(x+iy)$, holomorphic in $\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+$, so that for every test function f there holds Eq.* (61).

This fact can be generalized to $\mathbb{R}^{4n}$, where the roles of $\mathbb{R}_0^+$ and the upper half space are now played by the closed forward light cone and a the so-called *tube*

$$\mathcal{T}_-^n := (\mathbb{R}^4 - iV_+)^{\times n}, \tag{62}$$

The following theorem applies to the Wightman function $\mathcal{W}_n$ in n relative coordinates, which has support in $\overline{V_+}^{\times n}$.

Theorem 2.8 *Let u be a tempered distribution in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4n})$ whose Fourier transform has support in $\overline{V_+}^{\times n}$. Then u is the boundary value, in the sense of distributions, of a holomorphic function. More precisely, there is a function $u(x+iy)$, holomorphic in the tube $\mathcal{T}_-^n$, so that for every test function $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{4n})$ there holds*[19]

$$\int d^{4n}x\, f(x)u(x-iy) \to u(f) \quad \text{for } y \to 0 \text{ in } (V_+)^{\times n}. \tag{63}$$

Further, there hold the following estimates. There is a polynomial P and, for every given compact set $K \subset (V_+)^{\times n}$, a polynomial P_K such that

$$|u(x-iy)| \leq |P_K(x)| \quad \text{for all } y \in K, \quad \text{and} \tag{64}$$

$$|u(x-iy)| \leq |P(x-iy)| \left(1 + dist(y, \partial\overline{V_+}^{\times n})^{-N}\right) \quad \text{for some } N > 0. \tag{65}$$

Proof. Instead of a proof we relate the claim to some theorems in the book of Streater and Wightman [12]. (See also Thm. IX.16 in [10].) Formally, we have

$$u(x-iy) = (2\pi)^{-4n} \int d^{4n}p\, e^{-ip\cdot(x-iy)}\hat{u}(p).$$

By hypothesis, $e^{-p\cdot y}\,\hat{u}(p)$ is still in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{4n})$ for $y \in (V_+)^{\times n}$. Hence our distribution $\hat{u}$ satisfies the hypothesis of Thm. 2-6 in [12], with $\Gamma = (V_+)^{\times n}$. This theorem then asserts that for $y \in (V_+)^{\times n}$ the inverse Fourier transform of $e^{-p\cdot y}\hat{u}(p)$ is actually given by a function $u(x-iy)$ which satisfies the bound (64) and is holomorphic for y in $(V_+)^{\times n}$. Thm. 2-9 in [12] asserts that this function converges to u in the sense of distributions, as claimed. The estimate (65) is contained in Thm. IX.16 in [10]. □

We shall use the so-called *edge of the wedge* theorem [12, Thm. 2-16] and its consequence [12, Thm. 2-17].

2.2 Some General Theorems in QFT

Reeh-Schlieder Theorem [12, p. 138]; Jost-Schroer Theorem [12, Thm. 4-15];
CPT Theorem [12, p. 146]; Spin-statistics [12, p. 142].
Haag's Theorem [12, p. 163].

2.3 Euclidean quantum field theory

Osterwalder-Schrader axioms.

3 Haag-Kastler Axioms

Unsatisfying features of the traditional quantum field theory setting (including the Wightman approach):

- Unobservable elements, for example unobservable fields (charged fields[20], Fermi fields).

[19] The limit $y \to 0$ in Eq. (63) must be taken inside some (arbitrary) closed cone in $\overline{V_+}^{\times n}$.

[20] A charged field creates or annihilates charge, and therefore cannot correspond to a physical operation: Since charge is conserved, by a physical operation one can create only a pair particle/anti-particle. Then one has to send one of them "behind the moon" (not physical).

- The Bose-Fermi alternative (fields localized in causally separated regions either commute or anti-commute) is an assumption without physical foundation.
- The transformation law of fields (covariance) is motivated from classical field theory and lacks direct physical motivation.

To fix ideas, let us consider the free charged field

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p) \{ e^{-ip\cdot x} a_1^*(p) + e^{ip\cdot x} a_2(p) \},$$

where a_1^* creates a particle of type 1 and a_2 annihilates a particle of type 2 (the anti-particle). The charge operator is $Q := N_1 - N_2$, where N_i is the total number operator of particle type i. The charge operator generates the so-called gauge transformations

$$\alpha_s(A) := e^{isQ} A e^{-isQ}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Since Q has spectrum $\mathbb{Z}$ (the set of possibel charges), $\alpha_{s+2\pi} = \alpha_s$, and hence $s \mapsto \alpha_s$ is a representation of the group $U(1)$, the so-called *internal symmetry group* of the model. (It is precisely the dual to the group of charges, in our model $\mathbb{Z}$.) Since the field creates exactly one unit of charge, it has the commutation relations $[Q, \varphi(x)] = \varphi(x)$, hence

$$e^{isQ} \varphi(x) e^{-isQ} = e^{is} \varphi(x). \tag{66}$$

Observables localized in a space-time region $\mathcal{O}$ are those operators in the algebra generated by the fields localized in $\mathcal{O}$ which commute with Q, or equivalently, which are invariant under the gauge transformations:

$$e^{isQ} A e^{-isQ} = A. \tag{67}$$

One then sees that state vectors with different charges cannot be coherently superposed, that is to say, their linear combinations give rise to *mixed*, not pure, states on the algebra of observables. (Equivalently, their relative phase cannot be detected.) For let ψ_1 and ψ_2 have charge $q_1 \neq q_2$, respectively, that is, $Q\psi_i = q_i \psi_i$. Then there holds for all $s \in \mathbb{R}$

$$\langle \psi_1, A\psi_2 \rangle = \langle \psi_1, e^{isQ} A e^{-isQ} \psi_2 \rangle = e^{is(q_1 - q_2)} \langle \psi_1, A\psi_2 \rangle,$$

which implies that $\langle \psi_1, A\psi_2 \rangle = 0$. Hence for $c \in \mathbb{C}$ there holds

$$\langle \psi_1 + c\psi_2, A(\psi_1 + c\psi_2) \rangle = \langle \psi_1, A\psi_1 \rangle + |c|^2 \langle \psi_2, A\psi_2 \rangle :$$

The state is mixed (see Appendix B.2), and the phase of c cannot be measured. So the Hilbert space decomposes into *superselection sectors* (namely, the eigen-spaces of the charge operator),

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_q,$$

which are invariant under the observables. A vector corresponds to a pure state only if it is in one sector (if it has definite charge). The restriction to a given sector $\mathcal{H}_q$ defines a (unitary irreducible) representation of the observable algebra, $\pi_q(A) := A|_{\mathcal{H}_q}$, and it can be shown that for $q \neq q'$ these representations are unitarily inequivalent. (To this end one uses the fact that the charge operator can be written as

$$Q = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\boldsymbol{x}\, j_0(0, \boldsymbol{x}), \quad j_0(x) = \frac{1}{2i} \big(:\varphi^* \partial_0 \varphi: - :(\partial_0 \varphi^*)\varphi: \big)(x), \tag{68}$$

and is the weak limit of observables $Q_R = \int_{\|\boldsymbol{x}\| \leq R} d^3\boldsymbol{x}\, j_0(0, \boldsymbol{x})$.)

Summarizing the scenario and abstracting somewhat from the model, we have a compact group of internal symmetries (the "global gauge group", here $U(1)$), represented by unitaries $\exp(isQ)$ whose adjoint action leaves each polynomial algebra $\mathcal{P}(\mathcal{O})$ invariant (see Eq. (66)). The representation decomposes into a direct sum of irreducible representations λ_q modulo degeneracy,[21] i.e.,

$$e^{isQ}|_{\mathcal{H}_q} = \lambda_q(s)\,\mathbb{1}\,, \quad q \in \hat{G},$$

where $\hat{G}$ denotes the dual of G, the set of equivalence classes of irreducible representations, denoted above by λ_q. (In our case $G = U(1)$ the dual can be identified with $\mathbb{Z}$ via $\lambda_q(s) := \exp isq$, $q \in \mathbb{Z}$.) In other words, the Hilbert space decomposes into a direct sum of subspaces $\mathcal{H}_q$, labelled by the elements $q \in \hat{G}$, such that $\exp(isQ)$ acts as $\lambda_q(s)$ times the identity in $\mathcal{H}_q$. The subspaces $\mathcal{H}_q$ are called superselection sectors of charge sectors. The field $\varphi(x)$ transforms under G according to some specific irreducible representation λ_q, in our model with $q = 1$, see Eq. (66),[22] while the observables are characterized by being invariant under G (or transform according to the trivial representation $q = 0$, see Eq. (67)). The decomposition into charge sectors $\mathcal{H}_q$ coincides with the decomposition of the observable algebra into inequivalent irreducible representations $\pi_q(A) = A|_{\mathcal{H}_q}$. The vectors within one irreducible representation (or sector) correspond to pure states, while linear combinations of vectors from different sectors are mixed states.

The aim of Haag and Kastler was to put the theory entirely on physical grounds, by starting only from the observables which have to satisfy some physically motivated axioms. The observable algebra describes the physical system. Inequivalent representations of the observable algebra describe sets of states of the system which cannot be related by physical operations. The inequivalent representations (or sometimes the corresponding sets of states) are called superselection sectors or charge sectors. The observable algebra, together with certain selection criteria for the representations which describe physically meangingful states, should entirely fix the observable content of the theory. This is indeed the case: For example, these data allow for the construction of the S-matrix (Haag-Ruelle scattering theory). In addition, it has turned out in the 70's – 90's by the work of Doplicher, Haag and Roberts [3–7] that the non-observable structure which we have encountered in the above model (gauge transformations, charge-carrying fields, Bose-Fermi alternative) can be reconstructed from these data. Namely, starting from the observable algebra and a set of irreducible mutually inequivalent representations Σ of it satisfying certain selection criteria [8][23], they construct a compact "global gauge" group G, whose dual $\hat{G}$ corresponds 1-1 to the set of charge sectors Σ. Furthermore, they construct for every $q \in \hat{G}$ charge carrying field operators transforming under the gauge group according to the representation λ_q of G, analogously as in Eq. (66). These fields satisfy the Bose-Fermi alternative: They either satisy Bose- or Fermi para-statistics.

[21] This is the so-called factorial decomposition of the representation.

[22] The same equation shows that the adjoint $\varphi^*(x)$ transforms under the so-called conjugate representation, λ_{-1}.

[23] It must be mentioned, however, that these criteria are not general enough as to include QED.

3.1 The Axioms

For every double cone[24] $\mathcal{O}$ there is a C^*-algebra[25] $\mathcal{A}(\mathcal{O})$, whose self-adjoint elements are interpreted as the observables measurable in $\mathcal{O}$. The assignment $\mathcal{O} \to \mathcal{A}(\mathcal{O})$ satisfies
i) Isotony: $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ implies $\mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$. (Then the set

$$\mathcal{A}_{\rm loc} := \bigcup_{\mathcal{O}} \mathcal{A}(O),$$

where the union goes over all double cones, is an algebra.)
ii) Locality or Einstein Causality: If $\mathcal{O}_1$ and $\mathcal{O}_2$ are causally separated, then

$$\mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)'.$$

iii) Covariance: There is a representation of the Poincaré group by automorphisms of $\mathcal{A}_{\rm loc}$, $L \mapsto \alpha_L$, such that

$$\alpha_L : \mathcal{A}(O) \to \mathcal{A}(LO).$$

One considers the norm-completion $\mathcal{A}$ of $\mathcal{A}_{\rm loc}$ (more precisely, the so-called inductive limit of the net $(\mathcal{A}(\mathcal{O})_{\mathcal{O}})$, and calls it the algebra of all quasilocal observables.

Literature: Sections III.3 and III.4 of [8].

3.2 Charges, Global Gauge Group and Field Algebra

Literature: Sections IV.1 through IV.4 of [8].

3.3 Haag-Ruelle Scattering Theory

Literature: Section II.4 of [8].

A Espaços de Hilbert; Operadores.

A.1 Espaços de Hilbert.

Seja $\mathcal{H}$ um espaço linear. Uma *forma sesquilinear* é uma applicação $S : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, antilinear e linear no primeiro e segundo argumento, respetivamente, e hermiteano no sentido

$$S(\phi, \psi) = \overline{S(\psi, \phi)} \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}. \tag{69}$$

Ela é chamada de semi-positiva (positiva semi-definido?) se $S(\phi, \phi) \geq 0$ para todo $\phi \in \mathcal{H}$. Uma aplicação $N : \mathcal{H} \to \mathbb{R}_0^+$ é chamada de uma *semi-norma* se ela satisfaz $N(\lambda\psi) = |\lambda|\, N(\psi)$ para $\lambda \in \mathbb{C}$, $\psi \in \mathcal{H}$, e a desigualdade do triângulo: $N(\psi + \phi) \leq N(\psi) + N(\phi)$. Dada uma forma sesquilinear S semi-positiva, ela induz uma semi-norma N via

$$N(\psi) \doteq \sqrt{S(\psi, \psi)}. \tag{70}$$

Se N provém de uma forma sesquilinear neste sentido, N satisfaz a *identidade do paralelogramo*

$$N(\psi + \phi)^2 + N(\psi - \phi)^2 = 2\big(N(\psi)^2 + N(\phi)^2\big). \tag{71}$$

[24]A double cone is an open space-time region of the form $\mathcal{O} = x + V_+ \cap y - V_+$. The time-like unit vector $u := (y - x)/|y - x|$ corresponds to the reference frame of an observer, and in this frame $\mathcal{O}$ is the causal completion of a ball in the rest space of u. The ball corresponds to the laboratory at a given instant of time.

[25]We recall some notions from the theory of C^*-algebras and their states and representations in Appendix B.

Também, neste caso S pode ser reconstruido por N via a chamada *identidade de polarização*:

$$S(\psi,\phi) = \frac{1}{4}\{N(\psi+\phi)^2 - N(\psi-\phi)^2 - i(N(\psi+i\phi)^2 - N(\psi-i\phi)^2)\}$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^{-n} N(\psi + i^n\phi)^2. \tag{72}$$

Na verdade, o reciproco também vale:

Lema A.1 *Seja N uma semi-norma contínua que satisfaz a identidade do paralelogramo* (71)*. Neste caso N provém de uma forma sesquilinear contínua S no sentido da Eq.* (70)*. S é únicamente determinada pela identidade de polarização* (72)*.*

Demonstração. Define S pela Eq. (72). 1. Verifique-se facilmente que S é hermiteano no sentido da Eq. (69). 2. A linearidade no segundo argumento é mostrado pela seguinte estratégia: Mostre primeiro a additividade, $S(\phi,\psi_1+\psi_2) = S(\phi,\psi_1) + S(\phi,\psi_2)$, depois $S(\phi,\lambda\psi) = \lambda S(\phi,\psi)$ sucessivamente para $\lambda \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Os detalhes se encontram (no caso de uma norma num espaço de Hilbert real), no livro [2, p. 120]. (Infelizmente, este livro tem um erro de sinal na identidade do paralelogramo.) 3. A anti-linearidade no primeiro argumento é consequência de 1 e 2. □

Uma forma sesquilinear $\psi,\phi \mapsto \langle\,\psi,\phi\,\rangle$ é chamado de *positivo semidefinido* se

$$\langle\,\psi,\psi\,\rangle \geq 0 \quad \forall\psi \in \mathcal{H}, \tag{73}$$

e de *positivo definido* se na desigualdade encima vale igualdade "=" somente se $\psi = 0$. Tal forma é chamada de *produto escalar* em $\mathcal{H}$. Um espaço linear com um produto escalar é chamado de um *espaço de Hilbert* se ele é completo com respeito a norma

$$\|\psi\| := \sqrt{\langle\,\psi,\psi\,\rangle}. \tag{74}$$

Como antes, vale a *identidade de polarização*

$$\langle\,\psi,\phi\,\rangle = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} i^{-n}\|\psi + i^n\phi\| \tag{75}$$

que determina o produto escalar em termos da norma. Uma sequência ψ_n, $n \in \mathbb{N}$, em $\mathcal{H}$ *converge (fortemente)* para $\psi \in \mathcal{H}$ se

$$\|\psi_n - \psi\| \to 0 \quad \text{se} \quad n \to \infty.$$

A sequência ψ_n *converge fracamente* para $\psi \in \mathcal{H}$ sse para todos $\phi \in \mathcal{H}$ vale

$$\langle\,\phi,\psi_n - \psi\,\rangle \to 0 \quad \text{se} \quad n \to \infty.$$

Pythagoras, Bessel e Cauchy-Schwarz. Um projetor é um operador P com $P^2 = P$. ($P^2 := P \circ P$.) Um *projetor orthogonal* é um projetor auto-adjunto. Seja P um tal projetor, e $\mathcal{H}_0$ a sua imagem, $\mathcal{H}_0 := P\mathcal{H}$. Então $\mathcal{H}_0$ é um subespaço fechado, onde P age como a identidade. Em seu complemento orthogonal, definido por

$$(\mathcal{H}_0)^\perp := \{\psi \in \mathcal{H} :\ \langle\,\phi,\psi\,\rangle = 0\ \forall\phi \in \mathcal{H}_0\},$$

P age como o operador zero. Reciprocamente, vale o seguinte importante fato:

Lema A.2 *Seja $\mathcal{H}_0$ um sub-espaço fechado. Cada $\psi \in \mathcal{H}$ possui uma unica decomposição*

$$\psi = \psi_0 + \psi_1, \quad \textit{onde} \;\; \psi_0 \in \mathcal{H}_0 \;\; \textit{e} \;\; \psi_1 \in (\mathcal{H}_0)^\perp.$$

A applicação $\psi \mapsto \psi_0$, então, define um operador P que é um projetor orthogonal com imagem $\mathcal{H}_0$. Esse projetor é chamado do projetor *sobre* $\mathcal{H}_0$. (O projetor sobre $(\mathcal{H}_0)^\perp$, então, é dado por $\mathbb{1} - P$.) Assim, existe uma correspondência 1:1 de subespaços fechados de $\mathcal{H}$ e projetores orthogonais.

Seja $\{\varphi_i,\ i = 1, \ldots, n\}$ um sistema orthonormal (não completo) em $\mathcal{H}$, i.e. $\langle\, \varphi_i, \varphi_j \,\rangle = \delta_{i,j}$, e seja $\mathcal{H}_n$ o *span* desse conjunto, i.e. o espaço de combinações lineares $\sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$. Então o projetor sobre $\mathcal{H}_n$ é dado por

$$P_n \psi = \sum_{i=1}^n \langle\, \varphi_i, \psi \,\rangle\, \varphi_i.$$

Dado qualquer $\psi \in \mathcal{H}$, a mencionada decomposição de ψ com respeito a $\mathcal{H}_n$ é dado por $\psi = P_n \psi + (\mathbb{1} - P)\psi$. Em particular, esses dois termos são orthogonais. Isso implica o **Teorema de Pythagoras**:

$$\|\psi\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle\, \varphi_i, \psi \,\rangle|^2 \; + \; \|\psi - \sum_{i=1}^n \langle\, \varphi_i, \psi \,\rangle\, \varphi_i\|^2. \tag{76}$$

Como consequência, vale a **Desigualdade de Bessel**:

$$\sum_{i=1}^n |\langle\, \varphi_i, \psi \,\rangle|^2 \leq \|\psi\|^2 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}. \tag{77}$$

Essa desigualdade implica a desigualdade de Cauchy e Schwarz:

Lema A.3 (Cauchy-Schwarz) *Para qualquer ψ, ϕ in $\mathcal{H}$ vale*

$$|\langle\, \phi, \psi \,\rangle| \leq \|\phi\| \; \|\psi\|. \tag{78}$$

Demonstração. Se $\phi = 0$, a desigualdade é trivial. Então, seja $\phi \neq 0$. Neste caso, $\phi / \|\phi\|$ é um sistema orthonormal, e a desigualdade de Bessel (77) implica

$$\|\phi\|^{-1} \; \langle\, \phi, \psi \,\rangle| \leq \|\psi\|,$$

que dá (78). □

Lema A.4 (Riesz) *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $F : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ um funcional contínuo. Então existe um vetor (único) ϕ_F t.q.*

$$F(\psi) = \langle\, \phi_F, \psi \,\rangle \qquad \textit{para todos } \psi \in \mathcal{H}. \tag{79}$$

Demonstração. Seja $\mathcal{N}_F := \{\psi \in \mathcal{H} : F(\psi) = 0\}$. Isso é um subespaço linear, e fechado (como F é contínuo). Se $\mathcal{N}_F$ for o espaço $\mathcal{H}$ inteiro, então $F = 0$ e nós podemos pôr $\Phi_F := 0$. Seja então $\mathcal{N}_F \subset \mathcal{H}$. Como $\mathcal{N}_F$ é fechado, $\mathcal{N}_F$ também não é denso em $\mathcal{H}$. Por isso o complemento ortogonal, $\mathcal{N}_F^\perp$, de $\mathcal{N}_F$ e não-trivial (é maior do que $\{0\}$). Vamos pegar qualquer $\chi \neq 0$ em $\mathcal{N}_F$. Verifique-se que o vetor $F(\chi)\psi - F(\psi)\chi$ é em $\mathcal{N}_F$ para cada $\psi \in \mathcal{H}$, então ortogonal a χ. Então $F(\chi)(\chi, \psi) = F(\psi)\|\chi\|^2$. Isso implica que o vetor

$$\phi_F := \frac{\overline{F(\chi)}}{\|\chi\|^2}\, \chi \tag{80}$$

satisfaz a eq. (79). □

Corollary A.5 *Seja $B : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ uma aplicação sesqui-linear (anti-linear na primeira, linear na segunda variável) e contínua,*

$$|B(\phi, \psi)| \le M \, \|\phi\| \, \|\psi\|. \tag{81}$$

Então existe um único operator limitado $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$B(\phi, \psi) = \langle \, T\phi, \psi \, \rangle. \tag{82}$$

Demonstração. Para ϕ fixo a aplicação linear $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ dada por $\psi \mapsto B(\phi, \psi)$ é bem-definida e contínua pela desigualdade (81). O Lema de Riesz então implica que existe um vetor χ (dependente de ϕ), t.q. $B(\phi, \psi) = (\chi, \psi)$. Definimos agora um operador T por $T\phi := \chi$. Ele é bem-definido, por que $\phi = 0$ implica $B(\phi, \psi) = 0$ para todos $\psi \in \mathcal{H}$ pela desigualdade (81), então $\chi = 0$. Ademais, temos a relação (82) por construção. Esta equação implica que T é contínuo, por que

$$\|T\phi\| = \sup_{\psi \neq 0} \frac{|(T\phi, \psi)|}{\|\psi\|} \le M \, \|\phi\|$$

pela desigualdade de (81). □

Lema A.6 *Seja $\mathcal{D} \in \mathcal{H}$ um subespaco linear denso. Então*

$$\|\psi\| = \sup_{\phi \in \mathcal{D}, \phi \neq 0} \frac{|\langle \, \phi, \psi \, \rangle|}{\|\phi\|}.$$

A.2 Operadores.

Lema A.7 *Sejam X e Y espaços lineares normados, e $T : X \to Y$ uma aplicação linear. São equivalentes:*

i) T é contínuo;

ii) T é contínuo no ponto 0;

iii) Existe $M > 0$ tal que para todos $x \in X$ vale

$$\|Tx\| \le M \, \|x\|.$$

Se T é contínuo, a *norma* $\|T\|$ de T é definido como

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{83}$$

Agora revisamos a decomposição espectral de operadores auto-adjuntos. Seja $\mathcal{H}$ um espaço Hilbert. Os operadores contínuos (=limitados) em $\mathcal{H}$ nos denotamos por $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. O *adjunto* de um operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, denotado A^*, é definido pela propriedade

$$\langle \, \psi, A\phi \, \rangle = \langle \, A^*\psi, \phi \, \rangle \quad \text{para qualquer } \psi, \phi \in \mathcal{H}.$$

$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é chamado de *auto-adjunto* se $A = A^*$. O *espectro* SpA de um operador A é o conjunto de números $\lambda \in \mathbb{C}$ para quais o operador $A - \lambda \mathbb{1}$ não tem um inverso contínuo. Exemplos de valores espetrais são os auto-valores. $\lambda \in \mathbb{C}$ é chamado de *auto-valor* (AV) de A se existe um vetor $\psi \neq 0$ em $\mathcal{H}$ tal que $A\psi = \lambda\psi$. Neste caso, ψ é chamado de *auto-vetor*. (Ele é no núcleo de $A - \lambda$, então $A - \lambda$ não tem inverso.) Nos temos

Lema A.8 *i) $Sp(A^*) = \overline{SpA}$. Em particular, o espéctro de um operador auto-adjunto e contido na reta real.*
ii) Se $A = A^*$ (auto-adjunto): Auto-vectores para auto-valores diferentes são orthogonais.

Demonstração. Exercício. □

Os auto-vetores para o mesmo auto-valor λ formam um sub-espaço linear fechado, o chamado auto-espaço de A para auto-valor λ. A correspondente projeção nos denotamos por

$$E_A(\{\lambda\}).$$

Se $\mathcal{H}$ tem dimensão finita, cada operador auto-adjunto tem uma base ortogonal de auto-vetores. Consequentamente, A pode ser decomposto como

$$A = \sum_i \lambda_i \, E_A(\{\lambda_i\}), \quad \lambda_i \in \mathrm{Sp}A. \tag{84}$$

Esse é a chamada *decomposição espectral*. No caso de espaços com dimensão infinita, vale uma decomposição analoga. Neste caso, o espectro de A não precisa ser discreto, mas pode ser contínuo, i.e. conter intervalos abertos. Para cada intervalo Δ na reta real, tem um projetor $E_A(\Delta)$ tal que a familia $E_A(\Delta)$ tem as propriedades de uma medida de probabilidade, e $E_A(\Delta) = 0$ se $\Delta \cap \mathrm{Sp}A = \emptyset$. Ademais, para qualquer $\lambda \in \Delta$ vale

$$\|(A - \lambda)E_A(\Delta)\psi\| \leq |\Delta| \, \|\psi\|,$$

onde $|\Delta|$ é o diámetro do intervalo Δ. Neste caso geral, o operador auto-adjunto tem a decomposição espectral

$$A = \int_{\lambda \in \mathrm{Sp}A} \lambda \, dE_A(\lambda). \tag{85}$$

Exemplo A.9 Se o espectro de A é discreto, i.e. consiste de auto-valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, então $E_A(\Delta)$ é dado por $E_A(\Delta) = \sum_{i:\lambda_i \in \Delta} E_A(\lambda_i)$. Calculando a integral (85) como no Exemplo 1.1, ver eq. (2), dá exatamente a expressão (84). □

Exemplo A.10 Um projetor ortogonal P possui auto-valores 1 e 0, com $E_P(\{1\}) = P$ e $E_P(\{0\}) = \mathbb{1} - P$, e consequentemente a decomposição espectral

$$P = 1 \cdot E_P(\{1\}) + 0 \cdot E_P(\{0\}), \quad E_P(\{1\}) = P, \; E_P(\{0\}) = \mathbb{1} - P. \tag{86}$$

□

B C* Algebras

B.1 Álgebras

Definição B.1 Seja $\mathcal{A}$ um espaço linear. $\mathcal{A}$ é chamado de *álgebra* se existe um produto associativo e distributivo. Um produto é uma aplicação bilinear $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $A, B \mapsto AB$. Associatividade significa $(AB)C = A(BC)$, e distributividade significa $A(B + C) = AC + BC$ e $\alpha\beta(AB) = (\alpha A)(\beta B)$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. $\mathcal{A}$ é chamado de *álgebra-** se existe uma chamada involução $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $A \mapsto A^*$, com os seguintes propriedades:

$$(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B^* \qquad \text{(Antilinear)} \tag{87}$$

$$(A^*)^* = A \qquad \text{(Involução)} \tag{88}$$

$$(AB)^* = B^* A^*. \tag{89}$$

$\mathcal{A}$ é uma álgebra C* se existe uma norma $\|.\|$ t.q. $\mathcal{A}$ é completo, e para todos A, B $\in \mathcal{A}$ vale:

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \tag{90}$$

$$\|A^*A\| = \|A\|^2 \tag{91}$$

□

$A \in \mathcal{A}$ é chamado de *auto-adjunto* se $A^* = A$. A é *positivo* se existe um $B \in \mathcal{A}$ t.q. $A = B^*B$. Nesse caso, escrevemos $A \geq 0$. Observa que cada elemento A de uma álgebra-* é a soma de dois elementos auto-adjuntos, a saber:

$$A = A_1 + iA_2, \quad A_1 := \frac{1}{2}(A + A^*), \; A_2 := \frac{1}{2i}(A - A^*). \tag{92}$$

Observe que (91) implica $\|A^*\| = \|A\|$. Pois $\|A\|^2 = \|A^*A\| = \|A^*\| \, \|A\|$, então $\|A\| \leq \|A^*\|$. Trocando A com A^* mostra $\|A^*\| = \|A\|$. A eq. (90) significa que o produto é contínuo. A eq. (91) é uma restrição muito grave na norma; na verdade, ela fixa a norma unicamente (dado a álgebra-* $\mathcal{A}$). Para exemplificar isso, consideramos um *projetor ortogonal*, i.e., $P^2 = P = P^*$. P deve ter norma 1, pois $\|P\| = \left\|P^2\right\| = \|P^*P\| = \|P\|^2$, então $\|P\| = 1$ se P$\neq 0$. (Em particular, $\|\mathbb{1}\| = 1$). Outro exemplo: se $U \in \mathcal{A}$ é *unitário*, i.e. $U^* = U^{-1}$, então U deve ter norma 1, por que $\|U\|^2 = \|U^*U\| = \|\mathbb{1}\| = 1$.

Exemplo B.2 i) O exemplo típico (e na verdade único) de uma álgebra-C* comutativa é o espaço linear de funções contínuas de um compacto K para os números complexos, $C(K)$. O produto é definido puntiformemente, $(fg)(\lambda) = f(\lambda)\, g(\lambda)$, e a involução é dada por $(f^*)(\lambda) := \overline{f(\lambda)}$.

ii) O exemplo principal de uma álgebra-C não-comutativa é $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$: O produto de operadores é simplesmente a aplicação “em sequencia”. A^* é o operador adjunto. Uma *álgebra de operadores* é uma sub-álgebra de um $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. A norma de operadores (83) satisfaz eqs. (90) e (91), e torna $\mathcal{A}$ numa álgebra C*. (Demonstração: **Exercício**.) □

Como mencionado, a norma que torna uma álgebra-* numa álgebra C* (se existe) é única, e desda maneira ela é uma propriedade intrínseca de $\mathcal{A}$. Essa caracterização intrínseca (=algébrica) se realiza pelo espectro. Embora conheçamos essa noção somente para operadores, o espectro pode ser definido para elementos de qualquer álgebra $\mathcal{A}$: O espectro de $A \in \mathcal{A}$ é definido por:

$$\mathrm{Sp}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \text{ não tem inverso em } \mathcal{A}\}. \tag{93}$$

Ademais, o *raio espectral*, $\rho(A)$, de A é definido por

$$\varrho(A) := \sup\{|\lambda| \, , \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}. \tag{94}$$

O raio espectral é relacionado com a norma. Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra-* normada, i.e. com norma que satisfaz (90), então vale $\varrho(A) \leq \|A\|$ para todo $A \in \mathcal{A}$. No case de uma álgebra-C*, a norma até é completamente fixada pelo raio espectral:

Teorema B.1 *Numa álgebra C* $\mathcal{A}$ vale $\rho(A) = \|A\|$ para todos elementos auto-adjuntos. Consequentemente, vale*

$$\|A\|^2 = \varrho(A^*A) \tag{95}$$

para todos $A \in \mathcal{A}$.

O ponto importante deste teorema é que a norma é completamente fixada pelo espectro, que por sua vez é completamente fixado pela estrutura álgebrica (linear, produto, involução). Isto implica por exemplo que um isomorphismo linear entre álgebras-C* que preserve toda estrutura algébrica (isomorfismo de álgebras-*) automaticamente é isometrico.

Existe o cálculo funcional contínuo para elementos normais de álgebras-C* ($A \in \mathcal{A}$ é *normal* se $A^*A = AA^*$; por exemplo se $A = A^*$):

Teorema B.2 (Cálculo funcional contínuo) *Seja A um elemento normal de uma álgebra-C*. Então existe um $*$-homomorfismo ϕ_A de álgebras entre $C(Sp(A))$ e a sub-álgebra comutativa de $\mathcal{A}$ gerada por $\mathbb{1}, A, A^*$. Ele é únicamente caracterizado por*

$$1 \mapsto \mathbb{1}, \quad \mathrm{id} \mapsto A,$$

onde 1 *e* id *são as funções* $1(\lambda) = 1 = cte.$ *e* $\mathrm{id}(\lambda) = \lambda$.

Este homomorfismo é chamado de homomorfismo de Gelfand. Denotamos ele por $f \mapsto f(A)$ (em vez de $f \mapsto \phi_A(f)$). "$*$-homomorfismo de álgebras" significa que ele satisfaz $(\alpha f + \beta g)(A) = \alpha f(A) + \beta g(A)$, $(fg)(A) = f(A)g(A)$, $(\bar{f})(A) = (f(A))^*$. Observe que

$$\mathrm{Sp}(f(A)) = f(\mathrm{Sp}(A))$$

pois ϕ_A é um homomorfismo!

Proposição B.3 *Para $A \in \mathcal{A}$ as seguintes condições são equivalentes:*
i) A é positivo, i.e. existe um $B \in \mathcal{A}$ t.q. $A = B^*B$,
ii) O espéctro de A é positivo, i.e. $SpA \subset \mathbb{R}_0^+$,
iii) Existe $C = C^* \in \mathcal{A}$ t.q. $A = C^2$.

Demonstração. Ad $iii) \Rightarrow ii)$: Sejam $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{C}$ com $\lambda_0^2 = \lambda$. Então $C^2 - \lambda = (C + \lambda_0)(C - \lambda_0)$. Então $C^2 - \lambda$ tem um inverso se e somente se ambos $C \pm \lambda_0$ têm inversos. Então $\lambda \in \mathrm{Sp}(C^2) \Leftrightarrow \lambda_0$ ou $-\lambda_0 \in \mathrm{Sp}C \Leftrightarrow \lambda_0^2 \equiv \lambda \in (\mathrm{Sp}C)^2$, ou seja:

$$\mathrm{Sp}(C^2) = (\mathrm{Sp}C)^2.$$

Em particular o espectro de C^2 é positivo. Ad $ii \Rightarrow iii)$: Ver [1, Thm. 2.2.10]; alternativamente: Se A é normal, pode usar o cálculo funcional contínuo e definir $C := \sqrt{A}$. $iii) \Rightarrow i)$ é claro. $i) \Rightarrow iii)$: $A = B^*B$ implica que A é auto-adjunto. Então pelo cálculo funcional contínuo existe $C := \sqrt{A}$. □

B.2 Estados

Precisamos uma caraterização de estados como valores esperados, independente de uma realização de $\mathcal{A}$ por operadores. Na física quântica, os valores espectrais de observáveis são os possiveis resultados de medidas. Um observável positivo, ou seja, com espectro positivo, deve claramente ter um valor esperado positivo. Ademais, o valor esperado do observavel $\mathbb{1}$ (que tem, por definição, o valor 1 em qualquer medição), é claramente 1. Isto leva à seguinte definição.

Definição B.4 Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra-*. Um *estado* em $\mathcal{A}$ é um funcional (=aplicação linear) $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ que é

$$\textit{positivo}: \qquad \omega(A^*A) \geq 0 \ \text{ e} \tag{96}$$

$$\textit{normalizado}: \qquad \omega(\mathbb{1}) = 1. \tag{97}$$

□

Vale mencionar que positividade implica que $\omega(A) \in \mathbb{R}$ se A é auto-adjunto (os valores esperados de observáveis são reais) – ver Eq. (98) – e que no caso de uma álgebra C^* a positividade implica continuidade:

Proposição B.5 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra-*, e ω um funcional positivo.*
i) ω é hermiteano e satisfaz a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\omega(A^*) = \overline{\omega(A)} \tag{98}$$
$$|\omega(A^*B)|^2 \leq \omega(A^*A)\,\omega(B^*B) \tag{99}$$

ii) Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra-C^*, ω é automaticamente contínuo, com $\|\omega\| = \omega(\mathbb{1})$.

Demonstração. A positividade de ω implica que para todo $z \in \mathbb{C}$ vale

$$0 \leq \omega\big((zA+B)^*(zA+B)\big) \equiv \omega(A^*A)|z|^2 + \omega(B^*A)z + \omega(A^*B)\bar{z} + \omega(B^*B).$$

Em particular, os 2 termos lineares devem ser reais, o que implica $\omega(A^*B) = \overline{\omega(B^*A)}$ e a Eq. (98). Com isso, a desigualdade tem a forma

$$0 \leq a|z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(bz) + c \equiv a\left|z + \frac{b}{a}\right|^2 + c - \frac{|b|^2}{a},$$

com $a = \omega(A^*A) \geq 0, b = \omega(B^*A), c = \omega(B^*B)$. Isto implica que $|b|^2 \leq ac$, que é justamente a desigualdade (99).

Ad *ii*) O fato que $\|A^*A\|\mathbb{1} - A^*A$ é positivo (!) implca a desigualdade

$$\omega(A^*A) \leq \|A^*A\|\,\omega(\mathbb{1}).$$

Usando a desiguialdade de Cauchy-Schwarz (99) para $B = \mathbb{1}$, isto por sua vez implica

$$|\omega(A)|^2 \leq \omega(A^*A)\,\omega(\mathbb{1}) \leq \|A^*A\|\,\omega(\mathbb{1})^2 \equiv \|A\|^2\,\omega(\mathbb{1})^2.$$

Então a norma de ω, definida por $\|\omega\| = \sup\{|\omega(A)|/\|A\|,\ A \neq 0\}$, é menor ou igual a $\omega(\mathbb{1})$. Botando $A = \mathbb{1}$, vê-se que temos de fato igualidade. □

Se ω_1 e ω_2 são estados e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, então a como combinação convexa

$$\omega := \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \tag{100}$$

também é um estado. Se λ_1 e λ_2 ambos são não-nulos, este estado é chamado de *misto*, ou uma mistura de ω_1 e ω_2. Observa que $\rho := \lambda_1\omega_1$ é um funcional positivo e $\omega - \rho \equiv \lambda_2\omega_2$ também é positivo; ou seja, vale

$$\omega - \rho \geq 0.$$

Um tal funcional ρ é chamado de *componente* e ω. Se um estado ω não pode ser escrito como combinação convexa (100) não-trivial (i.e., com λ_1 e λ_2 não-nulos), o estado ω é chamado de *puro*. Equivalentemente, ω não possui componente "genuína":

Lema B.6 *Um estado ω é puro se, e somente se, os únicos componentes de ω são da forma $\rho = \lambda\omega$ com $\lambda \in [0, 1]$.*

Demonstração. Supomos que ω não é puro, ou seja, existe uma decomposição (100) com $\lambda_i \neq 0$. Então o funcional positivo $\rho := \lambda_1\omega_1$ não é da forma $\lambda\omega$, e satisfaz $\omega - \rho \equiv \lambda_2\omega_2 \geq 0$. Para mostrar a outra direção, seja ρ um funcional positivo que satisfaz $\omega - \rho \geq 0$ mas que não é da forma $\rho = \lambda\omega$. Enta ao $\lambda_1 := \rho(\mathbb{1})$ é diferente de zero e $\omega_1 := \lambda_1^{-1}\rho$ é um estado. Por hypotese, $\hat{\rho} := \omega - \rho$ é um funcional positivo e vale $\hat{\rho}(\mathbb{1}) = 1 - \lambda_1 =: \lambda_2 \neq 0$. Definido agora $\omega_2 := \lambda_2^{-1}\hat{\rho}$, temos $\omega = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2$ com $\lambda_i \neq 0$, ou seja, ω não é puro. □

Uma *matriz-densidade* em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um operador ρ positivo classe-traço, que tem traço um:

$$\rho \geq 0, \quad \mathrm{Tr}(\rho) = 1.$$

Teorema B.3 (Estados em $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ são matrizes-densidade.) *Qualquer estado sobre a álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ é da forma*

$$\omega(A) = Tr(\rho A), \tag{101}$$

onde ρ é uma matriz-densidade em $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$. Um estado ω sobre $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ é puro se e somente ele é da forma

$$\omega(A) = \langle\, \phi, A\phi \,\rangle \tag{102}$$

para um $\phi \in \mathbb{C}^n$.

Num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com dimensão infinita, as afirmações análogas valem só em restrição aos estados que satisfazem uma certa condição de continuidade, os chamados estados normais.

Demonstração. $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar:

$$(A, B) := Tr(A^* B) \tag{103}$$

Como ω é um funcional (linear e contínuo), o Lema de Riesz (Lema A.4) implica que existe um $\rho \in \mathcal{A}$ t.q.

$$\omega(A) = (\rho, A) = Tr(\rho^* A), \quad \forall A \in \mathcal{A}. \tag{104}$$

Seja ϕ qualquer vetor em $\mathbb{C}^n$ e P_ϕ o projetor sobre ϕ. A positividade de ω e do operador $P_\phi \equiv P_\phi^* P_\phi$ implica que $\omega(P_\phi)$ é positivo, então:

$$\omega(P_\phi) \equiv Tr(\rho^* P_\phi) = (\phi, \rho^*\phi) \geq 0. \tag{105}$$

Isso implica que ρ é um operador positivo (em particular, auto-adjunto). Finalmente, temos $1 = \omega(\mathbb{1}) = Tr(\rho)$. Então ρ é uma matriz-densidade e nós temos demonstrado a primeira parte. Para mostrar a segunda parte, seja ω um estado da forma (101), com ρ positivo. Com uma BON $\{\varphi_i, i = 1, \dots n\}$ de auto-vetores da matriz ρ, ela possui a decomposição espectral

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i \tag{106}$$

onde $P_i \equiv P_{\varphi_i}$ é o projetor sobre φ_i. Se dois ou mais autovalores λ_i são não-nulos, ω é obviamente não puro. Por isso, ω puro implica que só um dos λ's é diferente de zero, digamos λ_{i_0}. $Tr\rho = 1$ implica $\lambda_{i_0} = 1$, então, $\rho = P_{i_0}$, então:

$$\omega(A) = Tr(P_{i_0} A) = (\varphi_{i_0}, A\varphi_{i_0}). \tag{107}$$

Isso mostra a segunda parte do teorema. □

È interessante determinar as matrizes-densidade no $\mathbb{C}^2$:

Exemplo B.7 : Matrizes-densidade em $\mathbb{C}^2$. Qualquer operador auto-adjunto em $\mathbb{C}^2$ é uma combinação linear real da unidade $\mathbb{1}$ e as matrizes σ_1, σ_2 e σ_3 de Pauli. Então, as matrizes-densidade são da forma

$$\rho = c(\mathbb{1} + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) := c(\mathbb{1} + \sum_{i=1}^{3} n_i \sigma_i), \quad \vec{n} \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R}.$$

Como as matrizes de Pauli têm traço zero, a condição $\mathrm{Tr}\rho = 1$ implica $c = 1/2$. A determinante de ρ então é $(1 - \vec{n}^2)/4$. Mas a condição da positividade $\rho \geq 0$ implica que a determinante seja positiva, então $\|\vec{n}\| \leq 1$. Em summário, as matrizes-densidade são precisamente os operadores da forma

$$\rho_{\vec{n}} := \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n_3 & n_1 - i n_2 \\ n_1 + i n_2 & 1 - n_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} \in \mathbb{R}^3, \ \|\vec{n}\| \leq 1. \tag{108}$$

Denotamos por $\omega_{\vec{n}}$ o estado correspondente, $\omega_{\vec{n}}(A) = \mathrm{Tr}(\rho_{\vec{n}} A)$. Observando que $\lambda_1 \omega_{\vec{n}_1} + \lambda_2 \omega_{\vec{n}_2}$ coincede com $\omega_{\lambda_2 \vec{n}_1 + \lambda_2 \vec{n}_2}$, nos concluimos que as matrizes-densidade em $\mathbb{C}^2$ são, como conjunto convexo, isomorphico com a bola unitária no $\mathbb{R}^3$, $\{\vec{n} : \ \|\vec{n}\| \leq 1\}$. Os estados puros, como pontos extremais, correspondem ao contorno, a saber à esfera $\{\|\vec{n}\| = 1\}$.

Uma propriedade importante deste conjunto convexo é que a decomposição de um ponto no interior em pontos extremais obviamente *não é unica.* Isso é tipico para os estados da MQ, e em contraste com a mecânica clássica, onde a decomposição de estados mistos em termos de estados puros é unica. Por isso, na MQ a interpretação do estado (100) como "o estado é ρ_1 com probabilidade λ_1 e ρ_2 com probabilidade λ_2" (i.e., Born's interpretação de ignorância) não é válida. □

B.3 Representações

Seja $\mathcal{M}$ um conjunto de operadores limitados em $\mathcal{H}$. $\mathcal{M}$ é chamado de *irredutivel* se não existe subespaço fechado não-trivial de $\mathcal{H}$ invariante sob todos operadores $A \in \mathcal{M}$. A *comutante* $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ é o conjunto de todos operadores em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que comutam com todos $A \in \mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ é chamado de *auto-adjunto* se $A \in \mathcal{M}$ implica $A^* \in \mathcal{M}$. Um vetor $\psi \in \mathcal{H}$ é chamado de *cíclico* para $\mathcal{M}$ se $\mathcal{M}\psi$ é total em $\mathcal{H}$ (i.e., as combinaçãoes lineares são densos em $\mathcal{H}$).

Lema B.8 *Seja $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um conjunto auto-adjunto de operadores limitados, e seja $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ um subespaço fechado com projetor ortogonal correspondente P_0. Então $\mathcal{H}_0$ é invariante sob $\mathcal{M}$ se, e somente se, $P_0 \in \mathcal{M}'$.*

Demonstração. Verifique-se facilmente que $\mathcal{H}_0$ é invariante sob $\mathcal{M}$ se, e somente se,

$$P_0 A P_0 = A P_0 \quad \forall A \in \mathcal{M}. \tag{109}$$

Isto implica

$$P_0 A \equiv (A^* P_0)^* = (P_0 A^* P_0)^* = P_0 A P_0 = A P_0$$

para todos $A \in \mathcal{M}$, então $\mathcal{H}_0$ invariante implica $P_0 \in \mathcal{M}'$. Reciprocamente, $P_0 \in \mathcal{M}'$ obviamente implica a Eq. (109), então implica $\mathcal{H}_0$ invariante. □

Proposição B.9 (Lema de Schur) *Seja $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um conjunto auto-adjunto de operadores limitados em $\mathcal{H}$ que é auto-adjunto, e seja $\mathbb{1} \in \mathcal{M}$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

i) $\mathcal{M}$ é irredutível;

ii) A comutante de $\mathcal{M}$ consiste nos múltiplos da unidade. (Lema de Schur).

iii) Todo vetor não-nulo em $\mathcal{H}$ é cíclico para $\mathcal{M}$.

Demonstração. "*ii*) $\Rightarrow$ *i*)": Pelo Lema B.8, $\mathcal{H}_0$ invariante implica que o projetor correspondente P_0 está em $\mathcal{M}'$. Mas se $\mathcal{M}$ é irredutível, isto implica que $P_0 = 0$ ou $\mathbb{1}$, ou seja, que $\mathcal{H}_0$ coincede com $\{0\}$ ou $\mathcal{H}$. "*i*) $\Rightarrow$ *iii*) é óbvio, pois para qualquer ψ o espaço $\mathcal{M}\psi$ é invariante sob $\mathcal{M}$. "*iii*) $\Rightarrow$ *ii*)": $T \in \mathcal{M}'$ implica $T + T^*$ e $T - T^*$ em $\mathcal{M}'$. Então se $\mathcal{M}' \neq \mathbb{C}\mathbb{1}$, existe um operador auto-adjunto $S \in \mathcal{M}'$, $S \notin \mathbb{C}\mathbb{1}$. Com isso, todos projetores espectrais de S são em $\mathcal{M}'$. Seja E um tal projetor e ψ na imagem de E. Então ψ não pode ser cíclico para $\mathcal{M}$, pois $\mathcal{M}\psi = \mathcal{M}E\psi = E\mathcal{M}\psi$. □

Uma *representação* de $\mathcal{A}$ num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é uma aplicação linear $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que é um homomorfismo de álgebras-*: $\pi(AB) = \pi(A) \circ \pi(B)$ e $\pi(A^*) = \pi(A)^*$. Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra C* isto já implica que π é contínuo, mais precisamente vale [1, Prop. 2.3.1]

$$\|\pi(A)\| \leq \|A\|.$$

A representação π é *irredutível* se o conjunto $\pi(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é irredutivel.

Teorema B.4 (Estados puros e Irreducibilidade) *Seja π uma representação de uma álgebra-C* $\mathcal{A}$ num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*
i) π é irredutível.
ii) Para cada vetor $\psi \in \mathcal{H}$ o estado correspondente dado por

$$\omega_\psi(A) := \langle\, \psi, \pi(A)\psi \,\rangle \tag{110}$$

é puro.

Demonstração. "*i*) $\Rightarrow$ *ii*)": Seja π irredutível, e seja ρ uma componente de ω, i.e., $\rho \geq 0$ e $\omega - \rho \geq 0$. Então vale $\rho(C) \leq \omega_\psi(C)$ para $C \geq 0$. Isso implica:

$$|\rho(A^*B)|^2 \leq \rho(A^*A)\rho(B^*B) \leq \omega_\psi(A^*A)\omega_\psi(B^*B) = \|\pi(A)\psi\|^2\|\pi(B)\psi\|^2. \tag{111}$$

(A primeira desigualdade é a de Cauchy-Schwarz). Por isso, a forma sesqui-linear $\mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ dada por

$$\pi(A)\psi,\ \pi(B)\psi \ \mapsto\ \rho(A^*B)$$

é bem-definida e contínua. Pelo Corolário A.5, existe um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que vale a relação

$$\langle\, T\pi(A)\psi, \pi(B)\psi \,\rangle = \rho(A^*B) \tag{112}$$

para todos $A, B \in \mathcal{A}$. Vamos mostrar que $T \in \pi(\mathcal{A})'$: Seja $C \in \mathcal{A}$. Pela eq. (112), temos:

$$\langle\, T\pi(C)\,\pi(A)\psi, \pi(B)\psi \,\rangle = \rho(A^*C^*B).$$

Por outro lado, temos também:

$$\langle\, \pi(C)T\,\pi(A)\psi, \pi(B)\psi \,\rangle = \rho(A^*C^*B).$$

Em outras palavras, os elementos de matriz $\langle\, [T,\pi(C)]\phi, \chi \,\rangle$ do comutador $[T,\pi(C)]$ são zero para vetores ϕ, χ em $\pi(\mathcal{A})\psi$. Como o espaço $\pi(\mathcal{A})\psi$ é denso, isso implica que o comutador $[T,\pi(C)]$ é zero. Ou seja, T está na comutante de $\pi(\mathcal{A})$ e deve ser um multíplo da unidade por que π é irredutível: $T = \lambda\mathbb{1}$. Substituindo isso na (112), temos:

$$\rho(A^*B) = \lambda\, \langle\, \pi(A)\psi, \pi(B)\psi \,\rangle = \lambda\omega_\psi(A^*B),$$

ou seja: $\rho = \lambda\omega_\psi$. Então ω_ψ é puro pelo Lema B.6, mostrando "*i*) $\Rightarrow$ *ii*)". Para mostrar "*ii*) $\Rightarrow$ *i*)", supomos que π *não* é irredutivel. Então existe um operador $T \in \pi(\mathcal{A})'$ que não é um multiplo da unidade, $T \notin \mathbb{C}\mathbb{1}$. Então, o operador auto-adjunto $S := T + T^*$ também é em $\pi(\mathcal{A})'$, e o mesmo vale para os projetores espectrais dele, $E_S(\Delta)$. Como $S \notin \mathbb{C}\mathbb{1}$, existe um Δ tal que tal $E := E_S(\Delta) \in \pi(A)'$ é não-trivial, i.e. $E \neq 0, \mathbb{1}$. Definimos $\rho(A) := \langle E\psi, \pi(A)\psi \rangle$. Como $E \in \pi(\mathcal{A})'$, ρ coincede com

$$\rho(A) = \langle E\psi, \pi(A)E\psi \rangle$$

e por isso é positivo. Ademais, $\hat{\rho} := \omega - \rho$ também é positivo, por que

$$\omega(A^*A) - \rho(A^*A) = \langle \pi(A)\Omega, (\mathbb{1} - E)\pi(A)\Omega \rangle \geq 0.$$

É facil verificar que ρ não é um multiplo de ω. Então ω não é puro. □

Agora vamos mostrar que a álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ tem só uma representação irredutível (módulo equivalência). Isto é uma consequência do Teorema B.3.

Teorema B.5 (Irrep's de $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$) *Cada representação irredutível, π, da álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ é unitariamente equivalente à representação canônica* id, $\mathrm{id}(A) := A$, *em $\mathbb{C}^n$. Em outras palavras, se π age em $\mathcal{H}$, existe um isomorfismo isométrico $\mathcal{U} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^n$ t.q.*

$$\pi(A) = UAU^{-1}. \tag{113}$$

Demonstração. Consideramos o estado $\omega(A) := (\Omega, \pi(A)\Omega)$ onde $\Omega \neq 0$ é um vetor arbitrário em $\mathbb{C}^n$. Como π é irredutível, ω é puro e o Teorema B.3 implica que existe um vetor $\phi \in \mathbb{C}^n$ t.q.

$$\langle \Omega, \pi(A)\Omega \rangle = \langle \phi, A\phi \rangle. \tag{114}$$

Com isso, as triplas $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ e $(\mathbb{C}^n, \mathrm{id}, \phi)$ ambos são representações GNS do mesmo estado, e com o argumento da demonstração do Teorema B.6 eles são unitariamente equivalentes. □

Teorema B.6 (Representação GNS) *Dado um estado ω sobre uma álgebra C^* $\mathcal{A}$, existe um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\omega$, uma representação π_ω: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$, e um vetor normalizado $\Omega_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ tal que:*
(i) Para todos $A \in \mathcal{A}$ vale

$$\omega(A) = \langle \Omega_\omega, \pi_\omega(A)\Omega_\omega \rangle, \tag{115}$$

(ii) o subespaço $\pi_\omega(\mathcal{A})\,\Omega_\omega$ é denso em $\mathcal{H}_\omega$.
A tripla $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ é única modulo equivalência unitária, no seguinte sentido: Se $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ é uma outra tripla com os propriedades (i) e (ii), então existe um isomorfismo isométrico $U : \mathcal{H}_\omega \to \mathcal{H}$ tal que $U\Omega_\omega = \Omega$ e

$$\pi(A) = U\pi_\omega(A)U^* \quad \forall A \in \mathcal{A}. \tag{116}$$

*Ademais, se α é um *-automorfismo da álgebra $\mathcal{A}$ e ω é invariante sob α, $\omega \circ \alpha = \omega$, existe um único operador unitário V em $\mathcal{H}_\omega$ tal que $V\Omega_\omega = \Omega_\omega$ e*

$$\pi_\omega\big(\alpha(A)\big) = V\,\pi_\omega(A)\,V^* \quad \forall A \in \mathcal{A}. \tag{117}$$

Observe que pelo Teorema B.4, ω é puro se e somente se π_ω é irredutível.

Como é costume identificar estruturas isomorficas, vamos chamar qualquer tripla $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ com as propriedades (i) e (ii) *a tripla-GNS* para ω.

Demonstração. Construimos primeiro o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\omega$. Seja

$$\mathcal{N}_\omega := \{A \in \mathcal{A} :\ \omega(A^*A) = 0\}. \tag{118}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (78), $\mathcal{N}_\omega$ coincede com o espaço

$$\mathcal{N}_\omega = \{A \in \mathcal{A} :\ \omega(B^*A) = 0\ \forall B \in \mathcal{A}\}, \tag{119}$$

e então é um subespaço linear de $\mathcal{A}$. Seja $\mathcal{D}_\omega$ o espaço-quociente de $\mathcal{A}$ modulo $\mathcal{N}_\omega$:[26]

$$\mathcal{D}_\omega := \mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega. \tag{120}$$

No seguinte, nos vamos denotar a classe $A + \mathcal{N}_\omega$ de A por $\hat{A}$. Em $\mathcal{D}_\omega$, definimos

$$\langle\, \hat{A}, \hat{B}\,\rangle := \omega(B^*A). \tag{121}$$

(É bem-definido por causa da eq. (119).) Verifique-se que isso define um produto escalar em $\mathcal{D}_\omega$. A completação de $\mathcal{D}_\omega$ com respeito à norma correspondente é o nosso espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\omega$. Nos queremos definir a representação π_ω nesse espaço por

$$\pi_\omega(A)\, \hat{B} := \widehat{AB}. \tag{122}$$

Para verificar se esse é bem-definido, temos que mostrar que $B \in \mathcal{N}_\omega$ implica $AB \in \mathcal{N}_\omega$ para todos $A \in \mathcal{A}$ ou seja, que $\mathcal{A}\mathcal{N}_\omega \subset \mathcal{N}_\omega$ (ou seja, que $\mathcal{N}_\omega$ é um ideal-esquerda em $\mathcal{A}$.) Para esse fim, lembramos que para qualquer $A \in \mathcal{A}$ vale $\|A^*A\|\mathbb{1} - A^*A \geq 0$. Então,

$$\omega\big((AB)^*AB\big) = \omega(B^*A^*AB) \leq \|A^*A\|\, \omega(B^*B),$$

que implica $\mathcal{A}\mathcal{N}_\omega \subset \mathcal{N}_\omega$. Entáo a representação π_ω é bem-definida pela Eq. (122). Lembrando que $\|A^*A\| = \|A\|^2$, a equação encima tambem implica $\|\pi_\omega(A)\hat{B}\|^2 \leq \|A\|^2\|B\|^2$, então $\pi_\omega(A)$ é um operador contínuo. Finalmente, verifique-se facilmente que π_ω é uma representação-$*$. Definindo

$$\Omega_\omega := \mathbb{1} + \mathcal{N}_\omega,$$

verifique-se a equação (115), e tambem $\pi_\omega(\mathcal{A})\Omega_\omega = \{A + \mathcal{N}_\omega,\ A \in \mathcal{A}\} = \mathcal{D}_\omega$, o qual espaço é denso em $\mathcal{H}_\omega$ por construção.

Para demonstrar a unicidade, seja $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ uma outra tripla com as propriedades (i) e (ii). Definimos um operador $U : \mathcal{D}_\omega \to \mathcal{H}$ por

$$U\pi_\omega(A)\Omega_\omega := \pi(A)\Omega.$$

A eq. (115) implica que

$$\|\pi_\omega(A)\Omega_\omega\|^2 = \omega(A^*A) = \|\pi(A)\Omega\|^2. \tag{123}$$

Então U é bem-definido e isométrico. Como π_ω e π são irredutíveis, o domínio $\mathcal{D}_\omega$ de U é denso em $\mathcal{H}_\omega$, e a extensão para $\mathcal{H}_\omega$ é sobrejetivo. A propriedade (116) verifique-se facilmente. Se ω é invariante sob um *-automorfismo α, a tripla $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega \circ \alpha, \Omega_\omega)$ também é uma tripla GNS, e pelo item anterior existe um operador unitário V com $V\Omega_\omega = \Omega_\omega$ e a propriedade (117). $\square$

[26] Isso significa o seguinte. Em $\mathcal{A}$ definimos uma relação de equivalência "$\sim$" por

$$A \sim B\ :\Leftrightarrow\ A - B \in \mathcal{N}_\omega.$$

Dado $A \in \mathcal{A}$, o conjunto de todos B equivalente a A então é $A + \mathcal{N}_\omega$. Esse conjunto é chamada a *classe* de A com respeito à relação de equivalência $\sim$. O conjunto das classes tem uma estrutura linear pela definição

$$\alpha(A + \mathcal{N}_\omega) + \beta(B + \mathcal{N}_\omega) := (\alpha A + \beta B) + \mathcal{N}_\omega, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},\ A, B \in \mathcal{A}.$$

(Checkar que é bem-definido!) O espaço linear resultante é o chamado espaço-quociente $\mathcal{A}/\mathcal{N}_\omega$.

Corolário B.10 *Seja ω um estado sobre uma álgebra C^* comutativa $\mathcal{A}$. Então ω é puro se, e somente se, $\omega(AB) = \omega(A)\omega(B)$ para todo $A, B \in \mathcal{A}$.*

Demonstração. ω é puro se, e somente se, a representação GNS é irredutível. Como $\pi_\omega(\mathcal{A}) \subset \pi_\omega(\mathcal{A})'$ no caso de $\mathcal{A}$ comutativa, isso é equivalente com $\pi_\omega(\mathcal{A}) \subset \mathbb{C}\mathbb{1}$. Isto implica via Eq. (115) que ω fatoriza como afirmado no corolário. Reciprocamente, se ω fatoriza, então o espaço-nulo $\mathcal{N}_\omega$ (118) é justamente o núcleo de ω, que tem co-dimensão 1 (ou zero, se ω é nulo), então $\mathcal{D}_\omega$ e por conseguinte $\mathcal{H}_\omega$ tem dimensão um. Isto implica que $\pi_\omega(\mathcal{A}) \subset \mathbb{C}\mathbb{1}$. □

Exemplo B.11 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\psi \in \mathcal{H}$ com $\|\psi\| = 1$, $\omega(A) := \langle\, \psi, A\psi \,\rangle$. Neste caso, a representação GNS é obviamente dada pela tripla $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega) = (\mathcal{H}, \mathrm{id}, \psi)$ módulo equivaléncia, pois ela satisfaz os itens *i)* e *ii)* do teorema. □

Exemplo B.12 $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ e ω(A)=Tr(ρA), onde ρ é uma matriz-densidade tal que ω é misto. Em outras palavras, ρ não é um projetor uni-dimensional. Definimos $\mathcal{H} := \mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ com o produto escalar (103)

$$\langle\, \phi, \psi \,\rangle := \mathrm{Tr}(\phi^*\psi), \quad \phi, \psi \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2),$$

e em $\mathcal{H}$ consideramos a representação de $\mathcal{A}$ por multiplicação da esquerda: $\pi(A)\psi := A\psi$. Finalmente, definimos $\Omega := \rho^{1/2} \in \mathcal{H}$ (o raiz existe pois ρ é positivo). Verifique-se que $\langle\, \Omega, \pi(A)\Omega \,\rangle = \mathrm{Tr}(\rho A)$. Ademais, a hipótese que ρ não é um projetor uni-dimensional implica que os dois auto-valores de ρ são não-nulos. Por isto, ρ e por conseguinte $\Omega \equiv \rho^{1/2}$ são invertíveis, e a equação $\psi = \pi(A)\Omega \equiv A\Omega$ para qualquer dado ψ possui a solução $A := \psi\Omega^{-1}$. Em outros palavras, Ω é um vector cíclico. Então $(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ realmente é a tripla GNS de ω.

Segundo o Teorema B.4 essa representação em $\mathcal{H}$ deve ser redutível, i.e., existe um subespaço não-trivial invariante sobre $\mathcal{A}$. Pelo Teorema B.5, as representações irredutiveis todas são equivalentes à representação idéntica em $\mathbb{C}^2$. Vamos achar a redução da representação π. Para estes fins, decompomos $\mathbb{C}^2$ em dois sub-espaços unidimensionais ortogonais, e denotamos os projetores ortogonais correspondentes por $E_1, E_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$. Consideramos os subespaços

$$\mathcal{H}_k := \pi(\mathcal{A})E_k \equiv \{AE_k, A \in \mathcal{A}\}, \quad k = 1, 2, \tag{124}$$

de $\mathcal{H} \equiv \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$. (Eles são não-nulos.) Como $E_1 + E_2 = \mathbb{1}$ por hipótese, eles geram $\mathcal{H}$, ou seja, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$. Ademais, $\mathcal{H}_1$ é ortogonal a $\mathcal{H}_2$, por que

$$\langle\, \pi(A)E_1, \pi(B)E_2 \,\rangle \equiv \mathrm{Tr}(E_1A^*BE_2) = \mathrm{Tr}(A^*BE_2E_1) = 0 \tag{125}$$

como $E_1E_2 = 0$ por hipótese. Isso implica que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Os sub-espaços $\mathcal{H}_k$ são invariantes sob $\pi(\mathcal{A})$ por definição. Então as restrições,

$$\pi_k(A) := \pi(A)|_{\mathcal{H}_k}, \quad k = 1, 2,$$

definem duas sub-representações de π, e $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$. A menor dimensão possível de uma representação[27] é a de uma representação irredutível. Por isso, o Teorema B.5 implica que $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ ambos tem dimensão 2, e que π_1 e π_2 são irredutíveis, e unitariamente equivalentes.
□

[27] A dimensão de uma representação := a dimensão do espaço de Hilbert correspondente.

C Distributions

Distributions on $\mathbb{R}^n$ are continuous linear functionals on a certain class of ("test") functions. In the literature, there are mainly two classes considered: the C^∞ functions with compact support, and those which, together with all derivatives, fall off at infinity faster than any inverse power. We consider only the later class, in which case the correponding distributions are called "tempered distributions".

In more detail, let for $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}_0)^{\times 4}$ and $x \in \mathbb{R}^n$

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad \partial^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial x_n)^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Define, for $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, and for $r, s \in \mathbb{N}_0$,

$$\|f\|_{r,s} := \sum_{|\alpha| \le r} \sum_{|\beta| \le s} \sup\{|x^\alpha \partial^\beta f(x)|\,,\ x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Then the space of Schwartz functions, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, is defined as the vector space of all C^∞ functions which have finite $\|f\|_{r,s}$. We say that a sequence f_n in $\mathcal{S}$ converges to $f \in \mathcal{S}$ if for all $r, s \in \mathbb{N}_0$ the sequence $\|f_n - f\|_{r,s}$ converges to zero. ($\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ is complete with respect to the corresponding locally convex topology.) Now a *tempered distribution* is a linear functional $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ which is continuos in the sense that $u(f_n) \to u(f)$ whenever f_n converges to f in $\mathcal{S}$. This is equivalent [9,] to the existence of $M \ge 0$, $r, s \in \mathbb{N}_0$ such that

$$|u(f)| \le M\, \|f\|_{r,s} \quad \text{for all } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

The vector space of the tempered distributions is denoted by $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. We say that a sequence u_n converges to u in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ if

$$u_n(f) \to u(f) \quad \text{for all } f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

if $n \to \infty$. ($\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ is complete with respect to the corresponding locally convex topology.) For $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, let u_g be the tempered distribution (!)

$$u_g(f) := \langle g \mid f \rangle := \int g(x) f(x) d^n x.$$

This gives a continuous embedding of $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ into $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ [10, p. 134] with dense image [10, p. 144]. Therefore, any continuous linear transformation $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ has a unique (continuous) extension to a transformation of $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ fixed by the requirement that $Tu_g = u_{Tg}$. This extension is given by

$$(Tu)(f) = u(T^t f), \tag{126}$$

where T^t is the transposed transformation of $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ characterized by

$$\langle T^t f \mid g \rangle \doteq \langle f \mid Tg \rangle$$

for all $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. For example, the transposed of the partial differential operator ∂^α is $(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha$, and therefore

$$(\partial^\alpha u)(f) = (-1)^{|\alpha|}\, u(\partial^\alpha f).$$

Another example is the Fourier transform $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto \hat{f}$,

$$\hat{f}(p) := \int f(x) e^{ip\cdot x}\, d^n x. \tag{127}$$

The inverse Fourier transform $\mathcal{F}^{-1} : f \mapsto \check{f}$ is given by

$$\check{f}(x) = (2\pi)^{-n} \int dx\, f(p) e^{-ip\cdot x}, \tag{128}$$

The Fourier transformation is symmetric, $\mathcal{F}^t = \mathcal{F}$, and therefore the Forurier transform of a tempered distribution is given by

$$(\mathcal{F}u)(f) = u(\mathcal{F}f).$$

We shall also write $\mathcal{F}u =: \hat{u}$. Thus, $\hat{u}(f) = u(\hat{f})$, or

$$u(f) = \hat{u}(\check{f}). \tag{129}$$

As a third example, consider a diffeormorphism ϕ of $\mathbb{R}^n$. It induces a continuous automorphism of $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, the so-called pull-back $(T_\phi f)(x) := f(\phi^{-1}x)$. The transposed transformation is $T_\phi^t = |\det \phi'|\, T_{\phi^{-1}}$, hence the extension of the pull-back to distributions is

$$\big(T_\phi u\big)(f) = |\det \phi'|\, u(T_{\phi^{-1}} f). \tag{130}$$

We say that u vanishes on an open set $\mathcal{O}$ if $u(f) = 0$ whenever supp$f \subset \mathcal{O}$. We define the *support* of a distribution u, denoted supp$u$, as the complement of the largest open set on which u vanishes. An important fact is that the only distributions wihich have support on a single point are finite linear combinations of derivatives of the delta function $\delta_a(f) \doteq f(a)$:

Theorem C.1 *Let $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ with* supp$u = \{0\}$*. Then there exist numbers $m > 0$, c_α, such that*

$$u = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha\, \partial^\alpha \delta_0.$$

Theorem C.2 (Nuclear Theorem) *Let $B : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{C}$ be bilinear and continuous.*[28] *Then there exists a unique tempered distribution $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ such that $B(f,g) = u(f \otimes g)$.*

(The tensor product $f \otimes g$ is defined by $(f \otimes g)(x,y) := f(x)g(y)$.)

Lema C.3 *Let $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ and $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$. There holds*

$$\int d^n x\, u_y\big(f(x,y)\big) = u_y\Big(\int d^n x\, f(x,y)\Big). \tag{131}$$

The notation $u_y\big(f(x,y)\big)$ means $u\big(y \mapsto f(x,y)\big)$, where x is being considered as a parameter.

Proof. In a first step, let f be of the form $f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y)$. Then the left hand side of the claimed equation is

$$\Big(\int d^n x\, f_1(x)\Big)\, u(f_2) \equiv u\Big(\int d^n x\, f_1(x)\, f_2\Big),$$

which coincides with the right hand side. By linearity, Eq. (131) continues to hold for linear combinations of tensor products $f_1 \otimes f_2$. But these are dense in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, and both sides of Eq. (131) are continuous in f. Hence the equation holds for all $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$. $\square$

[28] B is continuous separately in both entries if, and only if (!), it is jointly continuous.

Referências

[1] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics 1*, second ed., TMP, Springer, New York, 1987.

[2] M. L. Curtis, *Abstract linear algebra*, Springer, New York, 1990.

[3] S. Doplicher, R. Haag, and J. E. Roberts, *Fields, observables and gauge transformations I*, Commun. Math. Phys. **13** (1969), 1–23.

[4] ———, *Fields, observables and gauge transformations II*, Commun. Math. Phys. **15** (1969), 173–200.

[5] ———, *Local observables and particle statistics I*, Commun. Math. Phys. **23** (1971), 199.

[6] ———, *Local observables and particle statistics II*, Commun. Math. Phys. **35** (1974), 49–85.

[7] S. Doplicher and J. E. Roberts, *Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics*, Commun. Math. Phys. **131** (1990), 51–107.

[8] R. Haag, *Local quantum physics*, second ed., Texts and Monographs in Physics, Springer, Berlin, Heidelberg, 1996.

[9] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I*, Springer, Berlin, 1983.

[10] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics I, II*, Academic Press, New York, 1975/1980.

[11] W. Rudin, *Real and complex analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1987.

[12] R. F. Streater and A.S. Wightman, *PCT, spin and statistics, and all that*, W. A. Benjamin Inc., New York, 1964.

[13] F. Strocchi, *Selected topics on the general properties of quantum field theory*, Lecture Notes in Physics, vol. 51, World Scientific, Singapore, 1993.

[14] S. Weinberg, *The quantum theory of fields I*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.