

Análise Vetorial

Jens Mund

Notas de Aula, DF-UFJF, 2010-1

Conteúdo

1	Álgebra Linear.	2
2	O Espaço Físico.	9
3	Sistemas de Coordenadas.	10
3.1	Coordenadas Cartesianas e Lineares.	11
3.2	Coordenadas Cilíndricas.	11
3.3	Coordenadas Esféricas.	12
3.4	Coordenadas Curvilíneas em Geral.	12
4	Curvas.	15
5	Campos Escalares e Vetoriais.	16
6	Integrais.	17
6.1	Integrais de Curva.	17
6.2	Integrais de Superfície.	18
6.3	Integrais de Volume.	20
7	Operadores Diferenciais.	20
7.1	A Derivada Direcional.	20
7.2	O Gradiente.	21
7.3	A Divergência e o Teorema de Gauss.	22
7.4	O Rotacional e o Teorema de Stokes.	25
7.5	Operador de Laplace.	29
7.6	O “Cálculo-Nabla”.	29
7.7	Equação de Poisson	30
8	Tensores.	31
8.1	Álgebra Linear de Tensores.	31
8.1.1	Produto Tensorial.	31
8.1.2	Exemplos: Tensor Kronecker, Tensor métrico, n -Forma de Volume.	34
8.1.3	Mudança de Base.	36
8.1.4	Operações com Tensores.	37
8.2	Análise Tensorial.	39
8.3	Aplicação: Tensores de Deformação e Tensão, Lei de Hooke.	43
A	Divergência e Rotacional na Geometria Diferencial.	46
A.1	Caracterização da Divergência na Geometria Diferencial.	46
A.2	Caracterização do Rotacional na Geometria Diferencial.	49
B	Exercícios.	51

Agradecimentos. Agradeço Rodrigo Ferreira Falci e Adriano de Oliveira Zangirolami para as muitas correções!

1 Álgebra Linear.

Definição 1 Seja V um conjunto (“os vetores”) com uma operação $+$: $V \times V \rightarrow V$ (a “adição de vetores”) e \cdot : $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ (“multiplicação de vetores por escalares”). V é chamado de *espaço vetorial* (ou espaço linear) se para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e $s, t \in \mathbb{R}$ vale:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \quad (\text{comutatividade}); \quad (1)$$

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \quad (\text{associatividade}); \quad (2)$$

$$(s + t) \cdot \mathbf{u} = s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{u} \quad (\text{distributividade}); \quad (3)$$

$$t \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v} \quad (\text{— ” —}); \quad (4)$$

$$s \cdot (t \cdot \mathbf{u}) = (st) \cdot \mathbf{u} \quad (\text{associatividade}); \quad (5)$$

$$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}. \quad (6)$$

Ademais, existe um vetor distinguido, $\mathbf{0}$ (“o vetor nulo”), t.q. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ para todos $\mathbf{u} \in V$, bem como para cada \mathbf{v} um vetor $-\mathbf{v}$, tal que $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. \square

É costume desprezar o “.” e escrever $t\mathbf{u}$ em vez de $t \cdot \mathbf{u}$. Os números reais, neste contexto, são frequentemente chamados de “escalares”. Os elementos de um espaço vetorial são chamados de “vetores”. Uma soma de vetores da forma

$$\sum_{i=1}^n t_i \mathbf{u}_i := t_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + t_n \mathbf{u}_n$$

é chamado *combinação linear* dos vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$. O conjunto de todas combinações lineares dos vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ é chamado o *gerador* (ou a varredura linear) deles, denotado por

$$\text{span}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} := \left\{ \sum_{i=1}^n t_i \mathbf{u}_i, t_i \in \mathbb{R} \right\}. \quad (7)$$

Definição 2 *i)* Um conjunto $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ é chamado de *linearmente independente* se $\sum_{i=1}^n t_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$ implica $t_1 = \cdots = t_n = 0$. No outro caso, ele é chamado de linearmente dependente.

ii) Um conjunto $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ de vetores é uma *base* de V se ele é linearmente independente e a sua varredura coincide com V . \square

Teorema e Definição 1.1 *Cada espaço vetorial possui uma base. Todas bases de um dado espaço vetorial V têm a mesma cardinalidade. Esta cardinalidade é chamada a dimensão de V .*

Dada uma base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$, cada vetor \mathbf{v} em V possui uma única decomposição

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{a}_i. \quad (8)$$

Os coeficientes v^i são chamados as *componentes (contravariantes)* do vetor \mathbf{v} com respeito à base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$. Eles claramente dependem da base, e agora discutiremos como eles se transformam sob uma mudança de base. Supomos então que $\{\bar{\mathbf{a}}_1, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n\}$ é uma outra base, e sejam \bar{v}^i as coordenadas (=componentes) correspondentes do vetor \mathbf{v} , i.e. $\mathbf{v} = \sum \bar{v}^i \bar{\mathbf{a}}_i$. Cada $\bar{\mathbf{a}}_j$ possui uma decomposição com respeito à base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$:

$$\bar{\mathbf{a}}_j = \sum_{i=1}^n A_j^i \mathbf{a}_i. \quad (9)$$

($\bar{\mathbf{a}}_j$ pode ser encarado como a imagem de \mathbf{a}_j sob uma aplicação linear A definida pela própria equação acima: $\bar{\mathbf{a}}_j = A\mathbf{a}_j := \sum_{i=1}^n A_j^i \mathbf{a}_i$.)

Lema 1.2 (Mudança de Base) *Sejam as duas bases relacionadas conforme (9). Então vale*

$$v^i = \sum_{j=1}^n A_j^i \bar{v}^j. \quad (10)$$

Observe que as componentes v^i de um vetor transformam numa maneira “contrária” à transformação dos vetores da base. Dahi provem o nome “componentes contravariantes”.

Demonstração.

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \bar{v}^j \bar{\mathbf{a}}_j = \sum_{j=1}^n \bar{v}^j \sum_{i=1}^n A_j^i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n A_j^i \bar{v}^j \right) \mathbf{a}_i.$$

Isso mostra que $v^i = \sum_{j=1}^n A_j^i \bar{v}^j$, como afirmado. \square

Uma aplicação $\phi : V \rightarrow W$ entre dois espaços vetoriais V, W é chamada *linear* se ela satisfaz

$$\phi(s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = s\phi(\mathbf{u}) + t\phi(\mathbf{v}). \quad (11)$$

Se ela é bijetor, ela é chamada de isomorfismo linear. Se existe tal aplicação, os espaços V e W são chamadas de *isomórficos*. Observe que, dada uma base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ de V , a aplicação

$$\mathbf{v} \mapsto (v^1, \dots, v^n), \quad (12)$$

onde v^n são as componentes de \mathbf{v} com respeito à base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$, é um isomorfismo linear entre V e \mathbb{R}^n .

Produto Escalar.

Definição 3 Uma aplicação $\cdot : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *produto escalar* se ela é

$$\text{simétrica:} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \quad (13)$$

$$\text{bilinear:} \quad (s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = s(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + t(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}); \quad (14)$$

$$\text{positiva definida:} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0, \quad (15)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ se e somente se } \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (16)$$

\square

(Por causa da simetria (13), a linearidade (14) também vale no segundo argumento.)

Um espaço vetorial com produto escalar é chamado de *espaço euclidiano*. Ele possui uma norma, definida por

$$\|\mathbf{u}\| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \geq 0, \quad (17)$$

satisfazendo $\|t\mathbf{u}\| = |t| \|\mathbf{u}\|$. O único vetor com norma zero é o vetor $\mathbf{0}$. Verifique-se que para dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} ortogonais, i.e. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, vale o “Teorema de Pitágoras”:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2. \quad (18)$$

Se $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, nós chamamos os vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} de *ortogonais*, em símbolos

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}.$$

Para um subconjunto $U \subset V$, o conjunto de vetores que são ortogonais a todos vetores em U é um subespaço linear, chamado do complemento ortogonal a U , em símbolos U^\perp :

$$U^\perp := \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0 \forall \mathbf{u} \in U\}.$$

Um conjunto de vetores $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ é chamado de *sistema ortogonal* se eles são mutuamente ortogonais, i.e. $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ se $i \neq j$. É simples verificar que um sistema ortogonal sempre é linearmente independente. O conjunto é chamado de *sistema ortonormal* (ou *SON*) se em adição todos \mathbf{u}_i são normalizados, i.e. têm norma 1. Isto pode ser caracterizado em símbolos por

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} é o chamado símbolo de Kronecker:

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (19)$$

Um conjunto de vetores $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é chamado de uma *base ortonormal* (ou *BON*) se ele é uma base e também um sistema ortonormal. Em outras palavras, se ele é um SON é o gerador dele coincide com o espaço inteiro, V . Lembramos que as componentes v^i de um vetor $\mathbf{v} \in V$ com respeito à base são definidos pela decomposição

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_i. \quad (20)$$

Lema 1.3 *As componentes v^i de um vetor \mathbf{v} com respeito a uma base $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ ortogonal são dadas por*

$$v^i = \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{e}_i\|^2}. \quad (21)$$

Se a base for uma BON, então claramente $v^i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}$.

Demonstração. Supomos que os vetores $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ são um sistema ortogonal, i.e., $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i = \|\mathbf{e}_k\|^2 \delta_{ki}$. Multiplicando os dois lados da eq. (20) por \mathbf{e}_k dá

$$\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n v^i \|\mathbf{e}_i\|^2 \delta_{ki} = v^k \|\mathbf{e}_k\|^2.$$

□

O exemplo principal de um espaço euclidiano é o \mathbb{R}^n , cujos elementos denotamos por n -uplas ordenadas, e.g. $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$. O produto escalar é dado por

$$(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n) \cdot (\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^n) := \sum_{i=1}^n x^i y^i.$$

A chamada *BON canônica* do \mathbb{R}^n são os vetores $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $(0, \dots, 0, 1)$. Qualquer espaço vetorial euclidiano V de dimensão n é isomórfico ao \mathbb{R}^n (i.e., pode ser identificado com o \mathbb{R}^n). A saber, o isomorfismo linear definido na eq. (12) preserve o produto escalar se a base (qual referem as componentes) for uma BON:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u^i v^i = (u^1, \dots, u^n) \cdot (v^1, \dots, v^n),$$

onde u^i e v^i são as componentes de \mathbf{u} e \mathbf{v} com respeito à BON.

Lema 1.4 (Projeção) *Seja $U \subset V$ um subespaço linear. Então, cada $\mathbf{v} \in V$ tem uma única decomposição*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad \text{com} \quad \mathbf{v}_1 \in U \text{ e } \mathbf{v}_2 \in U^\perp. \quad (22)$$

O vetor \mathbf{v}_1 é determinado pela seguinte fórmula. Seja $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r\}$ uma BON de U t.q. $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r \in U$. Então,

$$\mathbf{v}_1 = \sum_{i=1}^r (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}) \mathbf{e}_i \in U. \quad (23)$$

O vetor \mathbf{v}_1 é chamado de *projeção* de \mathbf{v} sobre U , em símbolos $\mathbf{v}_1 =: P_U \mathbf{v}$. Como $(U^\perp)^\perp = U$, a decomposição (22) pode ser encarada como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$ com $\mathbf{v}_2 \in U^\perp$ e $\mathbf{v}_1 \in (U^\perp)^\perp$, então \mathbf{v}_2 é a projeção de \mathbf{v} sobre U^\perp : $\mathbf{v}_2 = P_{U^\perp} \mathbf{v}$. Isto implica que

$$P_U + P_{U^\perp} = \mathbb{I}. \quad (24)$$

Demonstração. Existência da decomposição (22): Defina \mathbf{v}_1 como na eq. (23), e $\mathbf{v}_2 := \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$. Com isto, a eq. (22) é satisfeita e \mathbf{v}_1 é claramente em U . Falta só mostrar que \mathbf{v}_2 está em U^\perp . Para estes fins, calcule para \mathbf{e}_i , $1 \leq i \leq r$,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_i \cdot \left\{ \mathbf{v} - \sum_{j=1}^r (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v}) \mathbf{e}_j \right\} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v} - \sum_{j=1}^r (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{v}) \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v} - \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v} = 0,$$

pois $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$. Isto mostra que $v_2 \in U^\perp$.

Unicidade da decomposição (22): Supomos que existem outros vetores $v'_1 \in U$ e $v'_2 \in U^\perp$ tal que $v = v'_1 + v'_2$. Então $(v_1 - v'_1) + (v_2 - v'_2) = \mathbf{0}$ e $0 = \|(v_1 - v'_1) + (v_2 - v'_2)\|^2 = \|v_1 - v'_1\|^2 + \|v_2 - v'_2\|^2$, onde temos usado o Pitágoras (18). Isto implica $v_1 = v'_1$ e $v_2 = v'_2$. \square

A aplicação $P_U : v \mapsto P_U v$ é uma aplicação linear, a chamada *projeção ortogonal* sobre U . No caso U é unidimensional, gerado por um vetor u , escrevemos P_u em vez de P_U . Neste caso, o vetor normalizado $u/\|u\|$ constitui uma BON de U , e então a eq. (23) implica que a projeção P_u é dado por

$$P_u v = \frac{u \cdot v}{\|u\|^2} u. \quad (25)$$

O Lema tem uma consequência importante, a chamada desigualdade de Cauchy e Schwarz:

Lema 1.5 (Cauchy-Schwarz) *Para todos vetores u, v vale*

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\|. \quad (26)$$

A igualdade “=” vale se e somente se u e v são co-lineares.

Demonstração. Dado $u, v \in V$, decompomos v como

$$v = P_u v + v_2,$$

onde $v_2 \perp P_u v$ conforme o Lema 1.4. Pelo Pitágoras (18), $\|v\|^2$ é a soma da norma quadrada de $P_u v$ mais a norma quadrada de v_2 . Como esta norma é positiva, vale $\|v\| \geq \|P_u v\|$. Mas $\|P_u v\| = |u \cdot v|/\|u\|$ pela eq. (25). Isto mostra eq. (26). A igualdade “=” vale obviamente se e somente se $v_2 = \mathbf{0}$, o seja, se u e v são co-lineares. \square

Como

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|u \cdot v| \\ &\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2, \end{aligned}$$

nos temos a *desigualdade triangular*:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad (27)$$

Orientação de BONs. Supomos que nos temos duas BONs $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{e'_1, \dots, e'_n\}$. Fazendo a decomposição dos e_j com respeito à base $\{e'_1, \dots, e'_n\}$, temos

$$e'_j = \sum_{i=1}^n R_j^i e_i, \quad (28)$$

(compare com Eq. (9)). O fato que as duas bases são ortonormais implica que

$$\delta_{ij} = e'_i \cdot e'_j = \sum_{k,l} R_i^k R_j^l e_k \cdot e_l = \sum_k R_i^k R_j^k = (R^T R)_j^i, \quad (29)$$

onde nos consideramos R_j^k como coeficientes de uma matriz R como na Eq. (31), e R^T denota a matriz transposta. A Eq. (29) significa que $R^T R$ é a matriz-unidade (que significa que R é uma matriz ortogonal, $R \in O(n)$), e implica que a determinante de $R^T R$ é um. Por outro lado, $\det(R^T R) = \det(R^T) \det(R) = \det(R)^2$, então a matriz R que relaciona as duas bases segundo Eq. (28) deve ter determinante $+1$ ou -1 . Ademais, composição de mudanças de base corresponde ao produto de matrizes, a saber: Vamos por enquanto denotar a matriz R na eq. (28) de $R_{\{e_1, \dots, e_n\}}^{\{e'_1, \dots, e'_n\}}$. Se consideramos uma terceira BON $\{e''_1, \dots, e''_n\}$, então vale

$$R_{\{e_1, \dots, e_n\}}^{\{e''_1, \dots, e''_n\}} = R_{\{e'_1, \dots, e'_n\}}^{\{e''_1, \dots, e''_n\}} \circ R_{\{e_1, \dots, e_n\}}^{\{e'_1, \dots, e'_n\}}.$$

Isto implica (exercício!) que existem duas classes de BONs, onde cada par de BONs dentro de uma classe é relacionado por uma matriz R com determinante $+1$. Por convenção, chamamos uma daquelas classes as BONs com *orientação positiva* (ou BONs orientadas), e a outra classe as BONs com orientação negativa.

Determinante. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma BON com orientação *positiva* de V , e sejam u_1, \dots, u_n n vetores in V com decomposições

$$u_j = \sum_{i=1}^n u_j^i e_i, \quad j = 1, \dots, n. \quad (30)$$

Seja A a matriz com coeficientes u_j^i , i.e.,

$$A := \begin{pmatrix} u_1^1 & \cdots & u_n^1 \\ u_1^2 & \cdots & u_n^2 \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^n & \cdots & u_n^n \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Então definimos a determinante dos vetores u_1, \dots, u_n por

$$\det(u_1, \dots, u_n) := \det(A). \quad (32)$$

Isto realmente é independente da BON (orientada!), pela seguinte razão. Seja $\{\bar{e}_i, i = 1, \dots, n\}$ uma outra BON orientada. Então ela é relacionada com $\{e_1, \dots, e_n\}$ via Eq. (28), onde R é uma matriz com determinante 1. Pelo Lema 1.2, as componentes u_j^i e \bar{u}_j^i do vetor u_j com respeito à BON $\{e_i\}$ e $\{\bar{e}_i\}$, respectivamente, são relacionadas por $\bar{u}_j^i = \sum_k R_k^i u_j^k$. Isto implica (exercício!) que a matriz \bar{A} com coeficientes \bar{u}_j^i e a matriz A da Eq. (31) são relacionadas por $\bar{A} = AR$, que por sua vez implica que $\det(\bar{A}) = \det(R) \det(A)$. Mas $\det(R) = 1$, então $\det(\bar{A}) = \det(A)$, mostrando que a definição (32) é independente da BON orientada.

Observações sobre a determinante: A determinante é uma aplicação n -linear e totalmente anti-simétrica (i.e., trocar dois argumentos resulta num fator -1). Este fato, e a “normalização” $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ para uma BON orientada, fixa a aplicação completamente, ver eq. (33) abaixo. Em geral, temos:

Lema 1.6 *Seja $D : V^{\times n} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação n -linear, totalmente anti-simétrica (aquí, n é a dimensão de V). Então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que para todos v_1, \dots, v_n vale*

$$D(v_1, \dots, v_n) = c \det(v_1, \dots, v_n).$$

(Esse fator c é o valor de D numa BON com orientação positiva.)

Demonstração. A n -linearidade e anti-simetria implicam

$$\begin{aligned} \det(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{i_1, \dots, i_n} u_1^{i_1} \cdots u_n^{i_n} \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \sum_{i_1, \dots, i_n} u_1^{i_1} \cdots u_n^{i_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \det(e_1, \dots, e_n) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} u_1^{i_1} \cdots u_n^{i_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n}, \end{aligned} \quad (33)$$

onde u_i^j são os componentes de u_i no sentido da Eq. (30) com respeito a qualquer BON positiva, e $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ é o chamado *símbolo de Levi-Civita*.¹

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} := \begin{cases} 0, & \text{se } \{i_1, \dots, i_n\} \neq \{1, \dots, n\}, \\ 1, & \text{se } (1, \dots, n) \mapsto (i_1, \dots, i_n) \text{ é uma permutação par,} \\ -1, & \text{se } (1, \dots, n) \mapsto (i_1, \dots, i_n) \text{ é uma permutação impar.} \end{cases} \quad (34)$$

Para qualquer outra aplicação $D : V^{\times n} \rightarrow \mathbb{R}$ n -linear e totalmente anti-simétrica vale o mesmo raciocínio, levando à conclusão

$$\begin{aligned} D(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{i_1, \dots, i_n} u_1^{i_1} \cdots u_n^{i_n} D(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \sum_{i_1, \dots, i_n} u_1^{i_1} \cdots u_n^{i_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} D(e_1, \dots, e_n) \\ &= D(e_1, \dots, e_n) \det(u_1, \dots, u_n). \end{aligned}$$

□

¹Observe que a anti-simetria implica que a determinante é zero se os argumentos são linearmente dependentes.

Produto Vetorial.

Lema 1.7 *Seja V um espaço euclidiano, e $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação linear. Então existe um único vetor \mathbf{w} em V t.q.*

$$\lambda(\mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in V. \quad (35)$$

Demonstração. Seja $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ uma base ortogonal em V . Defina

$$\mathbf{w} := \sum_{i=1}^n \lambda(\mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i. \quad (36)$$

É fácil ver que vale eq. (35). Para comprovar a unicidade, seja \mathbf{w}' um outro vetor que satisfaz eq. (35). Então $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{w}' \cdot \mathbf{u}$ ($= \lambda(\mathbf{u})$) para todos $\mathbf{u} \in V$. Isto implica que $\mathbf{w} - \mathbf{w}'$ é ortogonal a todos vetores em V , inclusive a si mesmo: $(\mathbf{w} - \mathbf{w}') \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{w}') = 0$. Conforme a definição de um produto escalar, ver eq. (16), isso implica $\mathbf{w} - \mathbf{w}' = 0$, ou seja, $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$. \square

Vamos agora definir o produto vetorial, valente somente em três dimensões. Dado dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, a aplicação $\mathbf{w} \mapsto \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ claramente é linear.

Definição 4 O produto vetorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ de dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ é o único vetor, conforme Lema 1.7, t.q. para qualquer $\mathbf{w} \in V$ vale

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}). \quad (37)$$

\square

Em termos de uma BON $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ em V , $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é dado, pela Eq. (36), por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i. \quad (38)$$

Proposição 1.8 *i) O produto vetorial satisfaz*

$$\text{Anti-simetria:} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}; \quad (39)$$

$$\text{Bilinearidade:} \quad (s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = s(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + t(\mathbf{v} \times \mathbf{w}); \quad (40)$$

$$\text{Se } \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \text{ é BON orientada:} \quad \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2; \quad (41)$$

$$\text{Identidade de Grassmann:} \quad \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w}. \quad (42)$$

ii) O vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é caracterizado por: 1. Norma: Ela satisfaz²

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \equiv (\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \gamma)^2, \quad (43)$$

onde γ é o ângulo entre \mathbf{u} e \mathbf{v} . 2. Direção: $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é ortogonal a \mathbf{u} e \mathbf{v} , com sentido t.q. $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}\}$ tem orientação positiva.

Observe que as equações (39) e (40) implicam a linearidade do produto vetorial no segundo argumento. Ademais, as equações (39) até (41) fixam o produto vetorial.

Demonstração. Eq.s (39), (40) e (41) são verificadas diretamente a partir da definição. A identidade de Grassmann (42) verifique-se num primeiro passo para uma BON. Para mostrar a eq. (43), aplique a identidade de Grassmann no último termo em

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 \equiv (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \det(\mathbf{v}, \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})) \cdot \mathbf{u}.$$

\square

Na introdução do rotacional à la geometria diferencial vamos usar o seguinte fato.

²Vamos ver depois (ver Eq. (47)) que a norma de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, dada pela Eq. (43), coincide com a área do paralelogramo gerado por \mathbf{u} e \mathbf{v} .

Lema 1.9 *Seja V um espaço euclidiano de dimensão três, e $\eta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear e anti-simétrica. Então existe um único vetor \mathbf{w} em V t.q.*

$$\eta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \equiv \det(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (44)$$

Demonstração. Seja $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ uma BON orientada em V . Defina

$$\mathbf{w} := \eta(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_1 + \eta(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_2 + \eta(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_3. \quad (45)$$

Este vetor satisfaz Eq. (44), como se calcula diretamente. Para comprovar a unicidade, seja \mathbf{w}' um outro vetor que satisfaz Eq. (44). Então $\mathbf{w}'' := \mathbf{w} - \mathbf{w}'$ deve satisfazer $\mathbf{w}'' \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$ para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Mas cada vetor em V é da forma $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ para \mathbf{u}, \mathbf{v} apropriadas, então \mathbf{w}'' é ortogonal a todos vetores em V , inclusive sim mesmo. Isso implica $\mathbf{w}'' = 0$, ou seja, $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$. \square

Volume de Paralelepípedos. Dado vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \in V$, o conjunto

$$\Pi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r) := \left\{ \sum_{i=1}^r t_i \mathbf{u}_i, t_i \in [0, 1] \right\} \quad (46)$$

é chamado o *paralelepípedo* gerado pelos vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$. O *volume* pode ser definido iterativamente como seguinte. Para iniciar, o volume do paralelepípedo gerado por um único vetor é a norma dele. O volume do paralelepípedo gerado por $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{r+1}$ é o volume do paralelepípedo gerado por $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ (a “base”) vezes a norma da projeção de \mathbf{u}_{r+1} ao complemento ortogonal dos vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ (a “altura”), conforme Lema 1.4. (Observe que nos casos $r = 1$ e 2 , o “paralelepípedo” também é chamado segmento de reta ou paralelogramo, respectivamente, e o seu “volume” é o comprimento ou área, respectivamente.)

Vamos primeiro calcular a área de um paralelogramo $\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ gerado pelos vetores \mathbf{u}, \mathbf{v} : A “base” é a norma de \mathbf{u} , e a “altura” é a norma do vetor $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{u}$ na decomposição $\mathbf{v} = P_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + \mathbf{v}_2$. Temos

$$\|\mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v} - P_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2},$$

que implica

$$\text{Vol } \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \text{base} \times \text{altura} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}.$$

Mas pela Eq. (43), isto é a norma do vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Então a área do paralelogramo é dada por

$$\text{Vol } \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|. \quad (47)$$

Vamos agora calcular o volume de um paralelepípedo tri-dimensional $\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ gerado pelos vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$: A “base” é a área do paralelogramo $\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$. A “altura” é a norma da projeção de \mathbf{w} sobre o complemento ortogonal de \mathbf{u}, \mathbf{v} . O último é unidimensional, gerado por $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Então, a altura é $\|P_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{w}\|$, e o volume é

$$\text{Vol } \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \text{base} \times \text{altura} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \|P_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{w}\|.$$

Mas os vetores $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ e $P_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{w}$ são colineares, então o produto das normas é justamente o módulo do produto escalar:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \|P_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{w}\| = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot P_{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} \mathbf{w}| = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} \equiv |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})|.$$

(Na segunda equação, temos usado o fato que $\mathbf{u} \cdot P_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.) Resumindo a discussão, o volume do paralelepípedo gerado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ é

$$\text{Vol } \Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})|. \quad (48)$$

Em geral, vale o seguinte (Bibliografia: [2]).

Teorema 1.10 O volume do paralelepípedo gerado por $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ é dado por

$$\text{Vol } \Pi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r) = \det(G)^{\frac{1}{2}}. \quad (49)$$

Aquí, G é a matriz

$$G := \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_r \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r \end{pmatrix}. \quad (50)$$

No caso $r = n \doteq \dim V$, vale $\det(G) = \det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)^2$, então

$$\text{Vol } \Pi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = |\det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)|. \quad (51)$$

Demonstração. Vamos mostrar a Eq. (49) via indução através r . Para $r = 1$, claramente $\det(G) = \|\mathbf{u}_1\|^2 = \text{Vol } \Pi(\mathbf{u}_1)^2$. Supomos agora que a afirmação vale para um certo $r \geq 1$, e mostramos que isto implica que ela vale para $r + 1$. Sejam G e \hat{G} as matrizes para r e $r + 1$ vetores, respetivamente. O vetor \mathbf{u}_{r+1} possui uma única decomposição $\mathbf{u}_{r+1} = \mathbf{v} + \mathbf{a}$, onde \mathbf{v} é na varredura dos vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ e \mathbf{a} é ortogonal a estes vetores, conforme Lema 1.4. (Então \mathbf{a} é a projeção de \mathbf{u}_{r+1} ao complemento ortogonal dos vetores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$.) Agora um pequeno cálculo mostra que $\det(\hat{G}) = \det(G) \|\mathbf{a}\|^2$. Mas $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ é a base e $\|\mathbf{a}\|$ é a altura do paralelepípedo. Por hipótese da indução, $\det(G)^{1/2}$ é o volume da base. Então $\det(\hat{G})^{1/2}$ é igual ao volume da base vezes altura, ou seja, ao volume do paralelepípedo. Isto mostra a Eq. (49). Para mostrar Eq. (51), verificamos por um pequeno cálculo que a matriz G coincide com $A^T A$, onde A é a matriz da Eq. (31). No caso $r = n$, isto implica que $\det(G) = \det(A^T A) = (\det A)^2 \equiv \det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)^2$, e mostra Eq. (51).³

Demonstração alternativa da eq. (51): O volume é invariante sob cisalhamento,

$$\text{Vol } \Pi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i + t\mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_n) = \text{Vol } \Pi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n),$$

e ele é homogêneo em todos argumentos,

$$\text{Vol } \Pi(\mathbf{u}_1, \dots, t\mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_n) = t \text{Vol } \Pi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n), \quad t > 0.$$

Isto implica que a aplicação $D(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) := \pm \text{Vol } \Pi(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, onde o sinal corresponde à orientação do argumento, é n -linear e totalmente anti-simétrica. Como o volume de um paralelepípedo gerado por uma BON é 1, isto implica eq. (51) pelo Lema 1.6. \square

No caso $r = 2$, onde $\Pi(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ é um paralelogramo, a determinante de G é dada por $\|\mathbf{u}_1\|^2 \|\mathbf{u}_2\|^2 - (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1)^2$. Mas pela Eq. (43), isto é a norma quadrada do vetor $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$. Então pela Eq. (49) nos recuperamos a Eq. (47).

2 O Espaço Físico.

Denotamos o espaço físico por E , e pontos em E por o, p, q, \dots . Dado dois pontos o e p em E , consideramos o segmento de reta orientado entre o e p (começando em o e com ponta em p). Aquela “flecha” chamamos o *vetor deslocamento* entre o e p , notado por \vec{op} . Na geometria elementar aprendemos que as seguintes construções são possíveis com régua e compasso.

(1) Translação paralela. Uma flecha \vec{op} começando em o pode ser transportada de o para qualquer outro ponto o_1 por *translação paralela*. A ponta desta flecha marca um certo ponto p_1 , então a flecha transladada é da forma $\vec{o_1 p_1}$. (Figura!) Nos *identificamos* a flecha \vec{op} e a flecha transladada $\vec{o_1 p_1}$. A classe de todas flechas que provêm de \vec{op} por translação paralela será então considerada *um vetor deslocamento*. Vetores deslocamento notamos geralmente por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$, e o conjunto de todos vetores deslocamento denotamos por V .⁴ Com isso, um ponto $p \in E$ e um vetor deslocamento $\mathbf{v} \in V$ determinam um único ponto q t.q. $\vec{pq} = \mathbf{v}$ (A saber, q é marcado pela ponta da flecha \mathbf{v} , transladada tal que ela começa em p). Nesta situação, escrevemos $q = p + \mathbf{v}$. Experimentalmente,

³Observa que isto implica de novo que $|\det(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)|$ é independente da BON.

⁴Alternativamente, podemos discriminar um ponto $o \in E$ (a origem) e definir V como o conjunto de todos vetores deslocamento que começam em o .

verifique-se que a translação paralela é comutativa:⁵

$$(o + \mathbf{u}) + \mathbf{v} = (o + \mathbf{v}) + \mathbf{u}. \quad (52)$$

(2) Medir a distância entre quaisquer dois pontos p, q , notado por $\text{dist}(p, q)$. Com isso, também podemos medir o ângulo $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ entre dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} .

(3) Construir a projeção ortogonal de um vetor \mathbf{v} sobre um outro vetor \mathbf{u} , notado por $P_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$. (Figura!)

Estes fatos implicam que o conjunto V de vetores deslocamento é um espaço vetorial, com norma e produto escalar. A adição de vetores é definida como seguinte: $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é definido como a única seta t.q. $o + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (o + \mathbf{u}) + \mathbf{v}$. (A Eq. (52) implica a comutatividade $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.) O elemento neutral $\mathbf{0}$ é o vetor deslocamento “com comprimento 0”, caracterizado pelo fato que vale $p + \mathbf{0} = p$ para todos $p \in E$. $-\mathbf{u}$ é o único vetor tal que $-\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Para $t \geq 0$, $t\mathbf{u}$ é o vetor \mathbf{u} , esticado pelo fator t . Isto, junto com a definição do inverso $-\mathbf{u}$, fixa operacionalmente a multiplicação de vetores por escalares. (Exercício: Verificar que V realmente é um espaço vetorial com estas definições.) A norma de vetores é dada por

$$\|\vec{p}\vec{q}\| := \text{dist}(p, q). \quad (53)$$

Esta norma realmente provem de um produto escalar, conforme Eq. (17), a saber:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \pm \|\mathbf{u}\| \|P_{\mathbf{u}}\mathbf{v}\| \equiv \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \gamma, \quad (54)$$

onde $\gamma = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ é o ângulo entre \mathbf{u} e \mathbf{v} . (O sinal na primeira equação é positivo se \mathbf{u} e $P_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$ têm o mesmo sentido, e negativo no outro caso.)

Na linguagem dos matemáticos, tudo isso implica que o espaço físico E (se gravitação e aceleração são desprezíveis) tem a estrutura de um *espaço afim euclidiano* (da dimensão três).⁶ Observamos finalmente que E pode ser identificado com V , depois de escolher um ponto $o \in E$ (a *origem* ou *referencial*). A saber, dado o cada ponto $p \in E$ tem o seu *vetor posição*

$$\mathbf{r}(p) := \vec{o}\vec{p} \in V. \quad (55)$$

Como a correspondência $p \leftrightarrow \mathbf{r}(p)$ é unívoca, E pode ser identificado com V dessa maneira. Observe que o vetor deslocamento entre p e q é dado por $\vec{p}\vec{q} = \mathbf{r}(q) - \mathbf{r}(p)$, então temos

$$\text{dist}(p, q) = \|\mathbf{r}(q) - \mathbf{r}(p)\|.$$

3 Sistemas de Coordenadas.

Coordenadas servem para especificar pontos no espaço de uma maneira quantitativa: Depois de especificar um sistema de coordenadas, todo ponto no espaço tridimensional é unicamente especificado por três números. A escolha de um sistema de Coordenadas depende da geometria e simetria da situação. Por exemplo, as coordenadas Cartesianas são úteis em situações homogêneas (com simetria translacional em todas direções). Em situações com simetria rotacional em torno de um eixo, ou em torno de um ponto discriminado, as coordenadas cilíndricas ou esféricas, respectivamente, são mais úteis. Em outras situações as vezes outras coordenadas são mais úteis, adaptadas à geometria da situação (coordenadas elípticas, hiperbólicas, ...).

⁵Realmente, tudo isso vale só se o campo gravitacional e a aceleração do laboratório são desprezíveis. Em geral, o espaço (–tempo) é curvo. Neste caso, para cada ponto p ainda pode ser definido o conjunto de “vetores” começando em p (o chamado espaço tangente em p), mas a translação paralela depende do caminho, então os vetores começando em p e aqueles começando num outro ponto não podem ser identificados. Também, a comutatividade (52) vale só aproximadamente.

⁶Um conjunto E é um *espaço afim* se existe um espaço vetorial V e uma aplicação $E \times V \rightarrow E$, $(p, \mathbf{v}) \rightarrow p + \mathbf{v}$, t.q. vale:

i) Para cada $p, q \in E$ existe um $\mathbf{v} \in V$ t.q. $q = p + \mathbf{v}$. (Notação: $\mathbf{v} =: \vec{p}\vec{q}$.)

ii) Para $p \in E$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vale $p + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (p + \mathbf{u}) + \mathbf{v}$.

iii) Para $p \in E$, a equação $p + \mathbf{v} = p$ vale se e somente se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Um espaço afim E é chamado de espaço afim *euclidiano* se V possui um produto escalar. A *dimensão* de E é definido pela dimensão de V .

Observe que o vetor $\mathbf{v} = \vec{p}\vec{q}$ do item i) é único pelo item iii).

Vamos recapitular primeiro as coordenadas Cartesianas, cilíndricas e esféricas, e depois discutir sistemas de coordenadas (curvilíneas) em geral.

No seguinte, E e V denotam o espaço físico e o espaço de vetores deslocamento, respectivamente. Nos deixamos a dimensão, n , aberta (na prática, claramente $n = 2$ ou 3).

3.1 Coordenadas Cartesianas e Lineares.

Depois de escolher uma origem $o \in E$ e uma base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ em V , para cada $p \in E$ o vetor-posição $\mathbf{r}(p) = \vec{op}$ possui uma única decomposição

$$\mathbf{r}(p) = \sum_{i=1}^n x^i(p) \mathbf{e}_i. \quad (56)$$

Os n números $x^i(p)$ definidos de tal maneira são chamados de *coordenadas lineares* do ponto p com respeito à base $\{\mathbf{e}_i\}$. (Em outras palavras, aqueles coordenadas são os componentes do vetor-posição com respeito à esta base.) No caso a base seja ortonormal (ou seja, uma BON), os $x^i(p)$ são chamados de *coordenadas Cartesianas*. (Neste caso, elas podem ser calculadas pela fórmula (21): $x^i(p) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{r}(p)$.) No espaço tridimensional, vamos as vezes escrever $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, e correspondentemente

$$\mathbf{e}_1 =: \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_2 =: \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_3 =: \mathbf{e}_z. \quad (57)$$

Na literatura encontra-se também a notação $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ ou $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$.

As coordenadas lineares se transformam sob uma mudança de base como descrito no Lema 1.2: Seja $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ uma outra base, relacionado com a velha base por

$$\bar{\mathbf{e}}_j = \sum_{i=1}^n A_j^i \mathbf{e}_i, \quad (58)$$

e sejam \bar{x}^i as coordenadas (=componentes) correspondentes. Então, pelo Lema 1.2 vale

$$x^i = \sum_{j=1}^n A_j^i \bar{x}^j. \quad (59)$$

Vamos agora considerar o caso quando as duas bases $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ são BONs. Neste caso, vale

$$\delta_{ij} = \bar{\mathbf{e}}_i \cdot \bar{\mathbf{e}}_j = \sum_{k,l} A_i^k A_j^l \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \sum_k A_i^k A_j^k = \sum_k (A^T)_k^i A_j^k = (A^T A)_j^i, \quad (60)$$

onde nos consideramos A_j^k como coeficientes de uma matriz A , e A^T denota a matriz transposta. A Eq. (60) significa que $A^T A$ é a matriz-unidade, ou seja, $A^{-1} = A^T$. Tal matriz é chamada de ortogonal. A aplicação linear correspondente a ela via

$$A(\mathbf{e}_i) := \sum_j A_j^i \mathbf{e}_j \quad (61)$$

(e extensão por linearidade, $A(\mathbf{v}) \equiv A(\sum_i v^i \mathbf{e}_i) = \sum_{i,j} v^i A_j^i \mathbf{e}_j$), preserve todas distâncias (e ângulos), então é uma *rotação*.

3.2 Coordenadas Cilíndricas.

Em situações com simetria rotacional em torno de uma reta R (o eixo), e translacional na direção do mesmo eixo, usamos coordenadas cilíndricas: $(u^1, u^2, u^3) = (\varrho, \varphi, z) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$. Elas são definidas (operacionalmente) em $E \setminus R$ como segue. Escolhemos eixos x, y e z tal que R coincide com o eixo- z . Seja $P_{x,y} \mathbf{r}(p)$ a projeção do vetor $\mathbf{r}(p)$ ao plano x - y conforme Lema 1.4. Então para $p \in E \setminus R$ definimos

$$\varrho(p) := \text{distância entre } p \text{ e } R \quad (62)$$

$$\varphi(p) := \text{ângulo de } P_{x,y} \mathbf{r}(p) \text{ com o eixo dos } x \text{ positivos} \quad (63)$$

$$z(p) := \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}(p), \quad (64)$$

onde \mathbf{e}_z é o vetor unitário na direção dos z positivos. A relação com as coordenadas Cartesianas é a seguinte. Se o ponto p tem coordenadas Cartesianas x, y, z , então

$$\varrho(p) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi(p) = \arctan(y/x), \quad z(p) = z. \quad (65)$$

Inversamente, se p tem coordenadas cilíndricas ϱ, φ, z , então

$$x(p) = \varrho \cos \varphi, \quad y(p) = \varrho \sin \varphi, \quad z(p) = z. \quad (66)$$

3.3 Coordenadas Esféricas.

Em situações com simetria rotacional $SO(3)$ em torno de um ponto discriminado o , usamos coordenadas esféricas: $(u^1, u^2, u^3) = (r, \theta, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, \pi) \times [0, 2\pi]$. Elas são definidas (operacionalmente) como segue. Escolhemos eixos x, y e z tal que o coincide com a origem. Então para p em E menos o eixo- z definimos

$$r(p) := \text{dist}(o, p) = \|\mathbf{r}(p)\|, \quad (67)$$

$$\theta(p) := \text{ângulo de } \mathbf{r}(p) \text{ com o eixo dos } z \text{ positivos}, \quad (68)$$

$$\varphi(p) := \text{ângulo de } P_{x,y}\mathbf{r}(p) \text{ com o eixo dos } x \text{ positivos}, \quad (69)$$

onde $P_{x,y}\mathbf{r}(p)$ é a projeção do vetor $\mathbf{r}(p)$ ao plano x - y conforme Lema 1.4. A relação com as coordenadas Cartesianas é a seguinte. Se o ponto p tem coordenadas Cartesianas x, y, z , então

$$r(p) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (70)$$

$$\theta(p) = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad (71)$$

$$\varphi(p) = \arctan(y/x). \quad (72)$$

Inversamente, se p tem as coordenadas esféricas r, θ, φ , então

$$x(p) = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y(p) = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z(p) = r \cos \theta. \quad (73)$$

3.4 Coordenadas Curvilíneas em Geral.

Consideremos o exemplo de coordenadas cilíndricas. A coordenada ϱ pode ser encarada como uma aplicação $p \mapsto \varrho(p)$ de E (ou um subconjunto de E) nos números reais. Em outras palavras, a coordenada ϱ é uma função, e o mesmo vale para as outras coordenadas φ, z . Ademais, dado um ponto p , os três números $\varrho(p), \varphi(p), z(p)$ unicamente especificam p (i.e., não existe outro ponto com as mesmas 3 valores de coordenadas).

Mais geralmente, um *sistema de coordenadas* é uma n -ésima de funções

$$u^i : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n$$

t.q. a aplicação $E \rightarrow \mathbb{R}^n, p \mapsto (u^1(p), \dots, u^n(p))$ é localmente invertível e diferenciável (mais precisamente, aquela aplicação deve ser um difeomorfismo entre um certo domínio $D \subset E$ e sua imagem em \mathbb{R}^n). Dessa maneira, o ponto p pode ser identificado com a n -upla de suas coordenadas $(u^1(p), \dots, u^n(p))$. Por outro lado, depois de escolher uma origem o , um ponto p em E pode ser identificado com seu vetor-posição $\mathbf{r}(p) = \vec{o}p \in V$. Por isso, o vetor-posição $\mathbf{r}(p)$ de um ponto p pode ser identificado com o n -ésimo das coordenadas do ponto, e nós podemos (e vamos) escrever

$$\mathbf{r}(u^1, \dots, u^n) := \mathbf{r}(p) \quad (74)$$

se p tem as coordenadas u^1, \dots, u^n . Muito úteis e importantes são as derivadas parciais dessa aplicação,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{ \mathbf{r}(u^1, \dots, u^i + \varepsilon, \dots, u^n) - \mathbf{r}(u^1, \dots, u^n) \} \\ &\equiv \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{r}(u^1, \dots, u^i + \varepsilon, \dots, u^n) \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned} \quad (75)$$

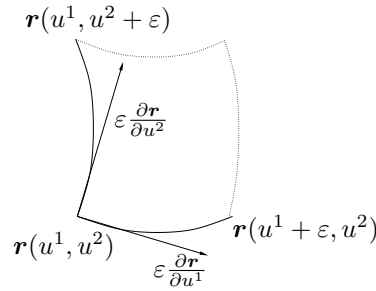


Figura 1: Os vetores da base $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}$.

onde u^1, \dots, u^n são as coordenadas do ponto p . (Observe que isso é um vetor em V , e a definição não depende da origem $o \in E$.) O vetor $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p)$ tem a direção de u^i crescente (com as outras coordenadas fixas), e a sua norma é a taxa de crescimento métrico naquela direção, ver Fig. 1. Este vetor pode ser caracterizado pelo seguinte fato: O vetor deslocamento entre o ponto p com coordenadas u^1, \dots, u^n e o ponto com coordenadas $u^1, \dots, u^i + \epsilon, \dots, u^n$ coincide com $\epsilon \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p)$ módulo termos da ordem⁷ ϵ^2 :

$$\mathbf{r}(u^1, \dots, u^i + \epsilon, \dots, u^n) = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^n) + \epsilon \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p) + O(\epsilon^2). \tag{76}$$

É importante observar que $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p)$ realmente *depende do ponto p*! A única exceção são coordenadas lineares, como por exemplo Cartesianas:

Exemplo 3.1 Se x^1, \dots, x^n são coordenadas Cartesianas, correspondente a uma BON $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, então o vetor-posição de um ponto p com coordenadas $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ é dado, conforme equ.s (56) e (74), por $\mathbf{r}(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{e}_i$. Consequentemente,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}(p) \equiv \frac{d}{d\epsilon} \{x^1 \mathbf{e}_1 + \dots + (x^i + \epsilon) \mathbf{e}_i + \dots + x^n \mathbf{e}_n\} \Big|_{\epsilon=0} = \mathbf{e}_i, \tag{77}$$

ou seja, o vetor $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}(p)$ é simplesmente \mathbf{e}_i — em particular, constante! □

O fato que a aplicação $p \mapsto (u^1, \dots, u^n)$ é invertível implica que, para cada p fixo, o conjunto dos n vetores

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}(p), \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^n}(p) \right\} \tag{78}$$

é linearmente independente, então uma base do espaço vetorial V . Vamos chamar ela de *base de vetores correspondente* ao sistema de coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$.

Mudança de Coordenadas. Muitas vezes é útil saber como os vetores de base $\partial_i \mathbf{r}$ e as componentes de vetores transformam sob uma mudança de coordenadas. Sejam então $\{u^1, \dots, u^n\}$ e $\{\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n\}$ duas sistemas de coordenadas. Pela regra de cadeia, as respectivas bases em V são relacionadas como seguinte:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i}(p) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}^j}(p). \tag{79}$$

Em particular em coordenadas Cartesianas, $\bar{u}^j = x^j$, vale pela eq. (77),

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial u^i}(p) \mathbf{e}_j. \tag{80}$$

⁷Digamos que duas funções $f(x)$ e $g(x)$ coincidem módulo termos da ordem x^n para pequenos x , em símbolos

$$f(x) = g(x) + O(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

se a função $(f(x) - g(x))/x^n$ é limitada em uma vizinhança da origem. Por exemplo, se f é duas vezes derivável, então vale $f(x) = f(0) + x f'(0) + O(x^2)$. Isto implica eq. (76).

Exemplo 3.2 (a) Se os dois sistemas são coordenadas Cartesianas (ou lineares), $u^i = x^i$ e $\bar{u}^i = \bar{x}^i$, e eles se referem à *mesma origem* o , então sabemos pela eq. (59) que eles são linearmente relacionados,

$$x^i = \sum_{j=1}^n A_j^i \bar{x}^j.$$

Então $\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}$ é justamente o elemento da matriz A_i^j (e $\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} = (A^{-1})_i^j$).

(b) Se $\{\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3\} \equiv \{x, y, z\}$ são coordenadas Cartesianas, e $\{u^1, u^2, u^3\} \equiv \{\varrho, \varphi, z\}$ coordenadas cilíndricas, então

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial x}{\partial \varrho} = \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\varrho \operatorname{sen} \varphi & \frac{\partial x}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} = \operatorname{sen} \varphi & \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \varrho \cos \varphi & \frac{\partial y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \varrho} = 0 & \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 & \frac{\partial z}{\partial z} = 1 \end{array}$$

Consequentemente, a decomposição dos vetores da base correspondentes às coordenadas cilíndricas e esféricas, respetivamente, em termos da BON $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ é dada por

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varrho} = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \operatorname{sen} \varphi \mathbf{e}_y, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -\varrho \operatorname{sen} \varphi \mathbf{e}_x + \varrho \cos \varphi \mathbf{e}_y, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{e}_z. \quad (81)$$

(c) Se $\{\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3\} \equiv \{x, y, z\}$ são coordenadas Cartesianas, e $\{u^1, u^2, u^3\} \equiv \{r, \theta, \varphi\}$ coordenadas esféricas, então

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial x}{\partial r} = \operatorname{sen} \theta \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi & \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ \frac{\partial y}{\partial r} = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi & \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi & \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial z}{\partial r} = \cos \theta & \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \operatorname{sen} \theta & \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0 \end{array}$$

Consequentemente, a decomposição dos vetores da base correspondentes às coordenadas esféricas em termos da BON $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ é dada por

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (82)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \mathbf{e}_y - r \operatorname{sen} \theta \mathbf{e}_z, \quad (83)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \mathbf{e}_x + r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \mathbf{e}_y. \quad (84)$$

□

Coordenadas Ortogonais. Um sistema de coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$ chama-se sistema de coordenadas *ortogonais* se, para cada p , os vetores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p)$, $i = 1, \dots, n$, são mutuamente ortogonais. Dado um tal sistema, é costume usar os vetores normalizados

$$\mathbf{e}_i(p) := \frac{1}{h_i(p)} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p), \quad h_i(p) := \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p) \right\|. \quad (85)$$

($\mathbf{e}_i(p)$ é o vetor unitário na direção u^i crescente.) Os n vetores $\mathbf{e}_1(p), \dots, \mathbf{e}_n(p)$ são uma BON.

Notação: Na literatura encontra-se também a notação \hat{u}^i , por exemplo $\hat{\varrho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$ no caso de coordenadas cilíndricas e $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}$ no caso de coordenadas esféricas.

Exemplo 3.3 Os sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas são ortogonais. As normas h_i dos vetores da base correspondentes são

$$h_\varrho := \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varrho} \right\| = 1, \quad h_\varphi := \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right\| = \varrho, \quad h_z := \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right\| = 1 \quad (86)$$

no caso de coordenadas cilíndricas, e

$$h_r := \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right\| = 1, \quad h_\theta := \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| = r, \quad h_\varphi := \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right\| = r \sin \theta \quad (87)$$

no caso de coordenadas esféricas. \square

Componentes de Vetores. Como os $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p)$ são uma base, cada vetor em V pode ser decomposto conforme

$$\mathbf{v} = \sum_i v^i(p) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p). \quad (88)$$

Os números $v^i(p)$ são chamados as *componentes (contravariantes)* de \mathbf{v} com respeito à base $\{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}(p), \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^n}(p)\}$, ou com respeito às coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$.⁸ No caso de coordenadas *ortogonais*, as componentes podem ser calculados pela eq. (21):

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i(p) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p) \Leftrightarrow v^i(p) = h_i^{-2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p) \cdot \mathbf{v}. \quad (89)$$

Vamos estudar a transformação de componentes sob uma mudança de coordenadas. Tal mudança implica uma mudança da base correspondente conforme eq. (79). Aplicando agora o Lema 1.2 (substituindo eq. (9) do Lema por (79)), temos o seguinte

Lema 3.4 (Transformação das Componentes) *Seja $\mathbf{v} \in V$ e sejam v^i e \bar{v}^i as componentes de \mathbf{v} com respeito às coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$ e $\{\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n\}$, respectivamente. Então vale*

$$\bar{v}^i(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j}(p) v^j(p). \quad (90)$$

4 Curvas.

Uma *curva* parametrizada é uma aplicação de um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ para E , $t \mapsto \mathbf{r}(t)$. O *vetor tangente*, em símbolos $\dot{\mathbf{r}}(t)$, no ponto $\mathbf{r}(t)$ da curva é definido por

$$\dot{\mathbf{r}}(t) := \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{ \mathbf{r}(t + \varepsilon) - \mathbf{r}(t) \}. \quad (91)$$

(Observe que isso é um vetor em V , e a definição não depende da origem $o \in E$.) Se o parâmetro t tem o significado do tempo, o vetor tangente $\dot{\mathbf{r}}(t)$ tem a interpretação da velocidade instantânea, frequentemente denotado por $\mathbf{v}(t)$. Neste caso, a segunda derivada $\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t)$ é a aceleração, denotado por $\mathbf{a}(t)$.

Na prática, uma curva $\mathbf{r}(t)$ é dada pelas coordenadas $u^i(t) := u^i(\mathbf{r}(t))$. Aplicando a regra de cadeia em $\frac{d}{dt} \mathbf{r}(u^1(t), \dots)$, vimos que seu vetor tangente tem a decomposição

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{u}^i(t) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(t), \quad (92)$$

então os componentes contravariantes (definidas pela Eq. (88)) de $\dot{\mathbf{r}}(t)$ são dados por $\dot{u}^i(t)$.⁹ Se a curva é dada em termos de coordenadas *Cartesianas* $(x(t), y(t), z(t))$, temos pela eq. (77)

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t) \mathbf{e}_x + \dot{y}(t) \mathbf{e}_y + \dot{z}(t) \mathbf{e}_z.$$

⁸Obs.: 1. Mesmo o vetor \mathbf{v} sendo constante (não dependente do ponto p), as suas componentes $v^i(p)$ dependem do ponto p , justamente por que os vetores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$ dependem de p . 2. É importante distinguir as componentes $v^i(p)$ no ponto p do vetor \mathbf{v} das coordenadas $u^i(p)$!

⁹Nós escrevemos $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(t)$ em vez de $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(\mathbf{r}(t))$.

Exemplo 4.1 A curva reta passando pelo ponto p no tempo $t = 0$ com velocidade \mathbf{v} é dada por

$$\mathbf{r}(t) = p + t\mathbf{v}, \quad \text{e consequentemente} \quad \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}.$$

Escrevendo $\mathbf{v} = \sum_i v^i(t) \partial_i \mathbf{r}(t)$ e comparando com eq. (92), vimos que neste caso as componentes de $\dot{\mathbf{r}}(t)$ são dadas por

$$\dot{u}^i(t) = v^i(p + t\mathbf{v}). \quad (93)$$

□

Aviso: Em contraste à eq. (92), vale

$$\mathbf{r}(p) \neq \sum_{i=1}^n u^i(p) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p),$$

em geral! (Única exceção: Coordenadas lineares, como por exemplo Cartesianas.)

Para derivadas de curvas num espaço vetorial (como por exemplo a aceleração) vale a regra do produto nas seguintes formas.

Lema 4.2 *Sejam $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ curvas no espaço vetorial V , e $f(t)$ uma função. Então vale*

$$\frac{d}{dt}(f(t) \mathbf{v}(t)) = \dot{f}(t) \mathbf{v}(t) + f(t) \dot{\mathbf{v}}(t), \quad (94)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)) = \dot{\mathbf{u}}(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \dot{\mathbf{v}}(t), \quad (95)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) = \dot{\mathbf{u}}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \dot{\mathbf{v}}(t). \quad (96)$$

5 Campos Escalares e Vetoriais.

Já sabemos que as componentes de um vetor deslocamento \mathbf{v} dependem do sistema de coordenadas, e sob uma mudança de coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\} \rightarrow \{\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n\}$ se transformam sobre como

$$\bar{v}^j(p) = \sum_{i=1}^n v^i(p) \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i}(p). \quad (97)$$

Um aspecto importante é o seguinte: O objeto \mathbf{v} , o vetor deslocamento, obviamente não depende do sistema de coordenadas, mas as componentes dependem sim. Cada componente então é uma grandeza que depende do sistema de coordenadas.

Em contraste, uma grandeza física unidimensional¹⁰ é chamada de *escalar* se ela não depende da escolha de um sistema de coordenadas no espaço E . (Como acabamos de entender, um exemplo de uma grandeza unidimensional que *não* é um escalar seria a componente- i , $v^i(p)$, de um vetor deslocamento \mathbf{v} com respeito a um sistema de coordenadas. Pois com respeito a um outro sistema de coordenadas, a componente- i tem um outro valor $\bar{v}^i(p)$.) Depois da escolha de uma unidade, os valores de uma grandeza escalar podem ser naturalmente identificados com os números reais \mathbb{R} . Exemplos para escalares são: intervalo de tempo (na física não-relativística); massa; densidade de um fluido homogêneo; temperatura num dado ponto p ; queda de potencial eléctrico numa pilha.

Uma grandeza física é chamada de um *vetor*, se ela pode ser naturalmente identificada com um vetor deslocamento $\mathbf{v} \in V$; mais precisamente: Se ela resulta da multiplicação de um vetor deslocamento por um escalar. Depois da escolha de uma unidade, uma grandeza vetorial pode ser identificado com os vetores deslocamento, V . Uma definição equivalente, que frequentemente é usada na literatura, é a seguinte. “Vetores são grandezas físicas trê-dimensionais, cujas três componentes se transformam sob uma mudança de coordenadas como os componentes contravariantes de um vetor deslocamento”, ver Eq. (97). Exemplos para vetores são: velocidade ou aceleração instantânea de um corpo puntiforme num dado instante de tempo; força exercida a um corpo por uma mola; campo eléctrico num condensador de placas planas.

¹⁰Unidimensional significa que *um* número (real) é suficiente para especificar o valor da grandeza.

Tendo esclarecido as noções de escalar e vetor: O que são campos escalares e vetoriais? Em geral, um *campo* é uma grandeza que depende da posição no espaço. Mais precisamente: Um *campo escalar* é uma função f que vive no espaço E e tem como valores uma grandeza escalar. Então, depois da escolha de uma unidade do escalar respetivo, um campo escalar pode ser identificado com uma função $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Exemplos: Densidade de um flúido; distribuição da temperatura na sala; potencial eléctrico. Um *campo vetorial* é uma aplicação que vive em E e tem como valores uma grandeza vetorial. Depois da escolha de uma unidade o campo vetorial pode ser identificado com uma aplicação $\mathbf{A} : E \rightarrow V$.¹¹ Exemplos: Campo de velocidades instantâneas dos constituintes moleculares de um flúido em movimento; campo eléctrico.

Por exemplo, o campo eléctrico gerado por uma carga Q puntiforme no ponto o e dado por

$$p \mapsto \mathbf{E}(p) = \frac{kQ}{\|\vec{op}\|^3} \vec{op} = \frac{kQ}{\|\mathbf{r}(p)\|^3} \mathbf{r}(p) = \frac{kQ}{r^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}(p).$$

(Na segunda equação temos identificado o com a origem, e na terceira equação temos usado coordenadas esféricas adaptadas.) Consequentemente, as componentes (esféricas) do campo \mathbf{E} são $E^r = kQ/r^2$, $E^\theta = 0$ e $E^\varphi = 0$.

6 Integrais.

6.1 Integrais de Curva.

Se nos movimentamos um corpo de p até q ao longo do caminho reto $\vec{pq} =: \Delta \mathbf{l}$, aplicando uma força constante \mathbf{F} , o trabalho gasto é $W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{l}$. (Observe que a curva possui uma orientação, neste caso o sentido de $\Delta \mathbf{l}$.) Como calculamos o trabalho se o caminho não é reto e a força não é constante? Nos dividimos o caminho C em pequenos segmentos C_ν que podem ser aproximados por vetores $\Delta \mathbf{l}_\nu$, e aproximamos a força ao longo de C_ν por seu valor $\mathbf{F}(p_\nu)$ num ponto $p_\nu \in C_\nu$. O trabalho gasto ao longo de C_ν pode agora ser aproximado por $W_\nu = \mathbf{F}(p_\nu) \cdot \Delta \mathbf{l}_\nu$. O trabalho total ao longo de C é a soma das W_ν . Fazendo os comprimentos dos segmentos C_ν cada vez menores, resulta numa aproximação cada vez melhor, e o valor exato do trabalho é o valor encontrado no limite quando os comprimentos tendem para zero (e o número de pedacinhos para infinito).

Esta construção pode ser feita com qualquer campo vetorial \mathbf{A} , e o resultado é a chamada *integral de curva* de \mathbf{A} através C , em símbolo $\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$:

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^N \mathbf{A}(p_\nu) \cdot \Delta \mathbf{l}_\nu. \quad (98)$$

Aquí, ε é o comprimento maximal dos pedacinhos C_ν da curva, p_ν é um ponto no pedacinho C_ν , e $\Delta \mathbf{l}_\nu$ é o vetor deslocamento entre as extremidades de C_ν (com sentido conforme a orientação da curva). ($N\varepsilon \approx$ comprimento da curva.) Se a curva C é fechada, é costume escrever $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$.

Calcularemos a integral em termos de coordenadas adaptadas à curva; a saber supomos que a curva C é uma das curvas de coordenada, digamos da coordenada u^1 : As coordenadas u^2 e u^3 têm valores constantes (digamos b e c , respetivamente) ao longo da curva, e só u^1 varia ao longo da curva:

$$C = \{\mathbf{r}(u^1, b, c) \mid u^1 \in [a, a']\}.$$

Neste caso, $\Delta \mathbf{l}_\nu = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \Delta u^1 + O(\varepsilon^2)$, e temos

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^{a'} A_1(u^1, b, c) du^1, \quad A_1(p) := \mathbf{A}(p) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}(p). \quad (99)$$

Os números (realmente, as funções) $A_i := \mathbf{A} \cdot \partial_i \mathbf{r}$ são chamadas as *componentes covariantes* do vetor \mathbf{A} , veja Eq. (131) embaixo. Se $\{u^i\}$ é um sistema de coordenadas ortogonal, a relação entre as componentes covariantes e contravariantes é obviamente $A_i = A^i h_i^2$. Neste caso temos então

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^{a'} A^1(u^1, b, c) h_1(u^1, b, c)^2 du^1.$$

¹¹Em geral, os campos f e \mathbf{A} precisam ser definidos somente num certo domínio $D \subset E$.

Se a curva é parametrizada por uma aplicação derivável $t \mapsto \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$, podemos substituir $\Delta \mathbf{l}_\nu$ por $\dot{\mathbf{r}}(t_\nu) \cdot \Delta t_\nu$ na Eq. (98), resultando em

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_\nu \mathbf{A}(\mathbf{r}(t_\nu)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t_\nu) \cdot \Delta t_\nu = \int_a^b \mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt.$$

As seguintes propriedades da integral de curva são essenciais: Primeiro, se C_ε é uma pequena curva com comprimento ε , o erro feito na aproximação como no início dessa seção é da ordem ε^2 , ou seja,

$$\int_{C_\varepsilon} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{A}(p) \cdot \mathbf{l}_\varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad (100)$$

onde $p \in C_\varepsilon$ e \mathbf{l}_ε é o vetor deslocamento entre o ponto inicial e final de C_ε .¹²

Segundo, a integral é aditiva: Se C é cortado em segmentos disjuntos $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots$, então

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \int_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} + \dots \quad (101)$$

6.2 Integrais de Superfície.

Uma superfície é uma subvariedade bidimensional em E . O seu complemento em E possui localmente duas componentes conexas (os dois lados da superfície). Uma superfície S é chamada de *orientada* se um dos dois lados é discriminado. Isto pode ser feito por especificar um campo vetorial $\mathbf{n}(p)$, que é perpendicular à superfície em todos pontos $p \in S$. Tal campo é chamado de campo vetorial normal de S , ou simplesmente *vetor normal*. (Existem exatamente dois tais campos, correspondente aos dois lados.)

Exemplos: Uma hemisfera do raio R pode ser descrito em termos de coordenadas esféricas por

$$S = \{p : r(p) = R, \theta(p) \in [0, \pi/2], \varphi(p) \in [0, 2\pi]\}.$$

Um cilindro do raio R e comprimento L pode ser descrito em termos de coordenadas cilíndricas adaptadas por

$$S = \{p : \varrho(p) = R, \varphi(p) \in [0, 2\pi), z(p) \in [0, L], \}.$$

Imaginamos um fluido em movimento, com velocidade $\mathbf{v}(p)$, e uma dada superfície S (imaginada) no fluido. O *fluxo* do fluido através S é o volume do fluido atravessando S , no sentido da orientação de S , por unidade de tempo. (Se \mathbf{v} tem o sentido oposto à orientação de S , o fluxo é o negativo deste valor.) Num primeiro passo, supomos que $\mathbf{v}(p) \equiv \mathbf{v}$ é uniforme (independente de p), e S é uma superfície plana. Então o volume do fluido atravessando S num intervalo de tempo Δt é justamente o volume da região G que tem “base” S e “tampa” $S + \Delta t \mathbf{v}$. O volume desta região G é igual à área da base (i.e., a área de S) vezes a altura. A altura de G é igual à norma da projeção de $\Delta t \mathbf{v}$ em \mathbf{n} , a saber $\|P_{\mathbf{n}}(\Delta t \mathbf{v})\| \equiv \Delta t \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, ver eq. (25). O fluxo é então $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} |S|$, onde $|S| :=$ área de S . Isto sugere a definição do *vetor superfície*, \mathbf{S} , que tem norma igual à área, $|S|$, e tem a direção (e sentido) do vetor normal \mathbf{n} de S :

$$\mathbf{S} := |S| \mathbf{n}. \quad (102)$$

(Este vetor caracteriza a superfície plana S junto com a sua orientação.) Com isto, o fluxo de \mathbf{v} através S pode ser escrito como $\mathbf{v} \cdot \mathbf{S}$. Como calculamos o fluxo se a superfície não é plana e o campo de velocidade $\mathbf{v}(p)$ não é constante? Nos dividimos a superfície S em pequenos pedacinhos ΔS_ν que podem ser aproximados por superfícies planas S_ν , e aproximamos a velocidade perto de ΔS_ν por seu valor $\mathbf{v}(p_\nu)$ num ponto $p_\nu \in \Delta S_\nu$. O fluxozinho através ΔS_ν pode agora ser aproximado por $\mathbf{v}(p_\nu) \cdot \mathbf{S}_\nu$, onde \mathbf{S}_ν é o vetor superfície correspondente à superfície plana ΔS_ν . O fluxo total através S é a soma daqueles fluxozinhos. Fazendo os diâmetros dos pedacinhos ΔS_ν cada vez menores, resulta numa aproximação cada vez melhor, e o valor exato do fluxo é o valor encontrado no limite quando os diâmetros tendem para zero (e o número de pedacinhos para infinito).

¹²A mesma fórmula vale para um vetor que coincide com \mathbf{l}_ε módulo termos da ordem ε , por exemplo o vetor tangencial a C em p , com norma igual ε e com sentido igual à orientação de C .

Esta construção pode ser feita com qualquer campo vetorial \mathbf{A} , e o resultado é a chamada *integral de superfície* de \mathbf{A} através S , em símbolo $\int_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$:

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{\nu=1}^{N^2} \mathbf{A}(p_\nu) \cdot \Delta \mathbf{S}_\nu, \quad \Delta \mathbf{S}_\nu := |\Delta S_\nu| \mathbf{n}(p_\nu). \quad (103)$$

Aquí, ε é o diâmetro maximal dos pedacinhos ΔS_ν da superfície, e p_ν é um ponto no pedacinho ΔS_ν . Se a superfície S é fechada (i.e., S é o contorno ∂G de uma região G), é costume escrever $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$. ($N\varepsilon \approx$ diâmetro de S , ou seja, $N^2\varepsilon^2 \approx |S_\varepsilon|$.)

Calcularemos a integral em termos de coordenadas adaptadas à superfície; a saber supomos que uma das coordenadas seja constante ao longo de S , digamos $u^3 = c$:

$$S = \{ \mathbf{r}(u^1, u^2, c) \mid u^1 \in [a, a'], u^2 \in [b, b'] \}.$$

Neste caso, o vetor superfície do pedacinho

$$\Delta \mathbf{S}_\nu := \{ \mathbf{r}(u^1, u^2, c) \mid u^1 \in [a_\nu, a_\nu + \Delta u^1], u^2 \in [b_\nu, b_\nu + \Delta u^2] \}$$

pode ser aproximado pelo vetor superfície do paralelogramo

$$\Delta \mathbf{S}_\nu \approx \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} \right) (p_\nu) \Delta u^1 \Delta u^2$$

módulo termos da ordem ε^3 , então temos

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_a^{a'} \int_b^{b'} (\mathbf{A} \cdot (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}))(u^1, u^2, c) du^1 du^2. \quad (104)$$

Agora observamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}) &= A^3 \partial_3 \mathbf{r} \cdot (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}) = A^3 \det(\partial_3 \mathbf{r}, \partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}) \\ &\equiv A^3 v, \quad \text{onde } v := \det(\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}, \partial_3 \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (105)$$

pois $A^1 \partial_1 \mathbf{r}$ e $A^2 \partial_2 \mathbf{r}$ são ortogonais em $\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}$ e os termos correspondentes se anulam. Com isso, temos

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_a^{a'} \int_b^{b'} (A^3 v)(u^1, u^2, c) du^1 du^2. \quad (106)$$

Por exemplo, se S_R é uma esfera de raio R centrada na origem, usamos coordenadas esféricas, com $v = r^2 \sin \theta$, e temos

$$\oint_{S_R} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (A^r r^2 \sin \theta)(R, \theta, \phi) d\theta d\phi = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi A^r(R, \theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi. \quad (107)$$

As seguintes propriedades da integral de superfície são essenciais: Primeiro, se S_ε é uma superfície pequena com diâmetro ε , o erro feito na aproximação como no início dessa seção é da ordem ε^3 , ou seja,

$$\int_{S_\varepsilon} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}(p) \cdot \mathbf{S}_\varepsilon(p) + O(\varepsilon^3). \quad (108)$$

Aquí, $|S_\varepsilon|$ é a área de S_ε (da ordem ε^2), $\mathbf{n}(p)$ é o vetor normal em $p \in S$ e $\mathbf{S}_\varepsilon(p) := |S_\varepsilon| \mathbf{n}(p)$. Segundo, a integral é aditiva: Se S é cortado em pedaços disjuntos $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots$, então

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \int_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \dots \quad (109)$$

6.3 Integrais de Volume.

Calcularemos a massa de um fluido não-homogêneo, da densidade ρ , numa região G . Nos dividimos a região G em pequenos pedaços ΔG_ν , de volume ΔV_ν , e aproximamos a massa pela soma $\sum_\nu \rho(p_\nu) \Delta V_\nu$, onde $p_\nu \in \Delta G_\nu$. O limite de pequenos volumes dá o valor exato da massa. Este limite é a integral de ρ . Em geral, definimos a integral de volume de uma função f através da região G por

$$\int_G f dV := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_\nu f(p_\nu) \Delta V_\nu,$$

onde ε e ΔV_ν são o diâmetro e o volume da região ΔG_ν , respetivamente, e p_ν é um ponto em G_ν . Calcularemos a integral em termos de coordenadas adaptadas à região. A saber supomos que G é da forma

$$G = \{ \mathbf{r}(u^1, u^2, u^3) \mid (u^1, u^2, u^3) \in [a, a'] \times [b, b'] \times [c, c'] \}.$$

O volume do pedacinho

$$\Delta G_\nu := \{ \mathbf{r}(u^1, u^2, u^3) \mid (u^1, u^2, u^3) \in [a_\nu, a_\nu + \Delta u^1] \times [b_\nu, b_\nu + \Delta u^2] \times [c_\nu, c_\nu + \Delta u^3] \}$$

pode ser aproximado pelo paralelepípedo gerado por $\Delta u^1 \partial_1 \mathbf{r}$, $\Delta u^2 \partial_2 \mathbf{r}$ e $\Delta u^3 \partial_3 \mathbf{r}$, módulo termos da ordem ε^4 , cujo volume é $\det(\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}, \partial_3 \mathbf{r}) \Delta u^1 \Delta u^2 \Delta u^3$. Então temos

$$\int_G f dV = \int_a^{a'} \int_b^{b'} \int_c^{c'} f(u^1, u^2, u^3) \underbrace{v(u^1, u^2, u^3) du^1 du^2 du^3}_{dV(u^1, u^2, u^3)}, \quad (110)$$

$$dV(u^1, u^2, u^3) \quad (111)$$

onde $v := \det(\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}, \partial_3 \mathbf{r})$. (A orientação do sistema deve ser positiva para que a determinante ser positiva.) Em termos de coordenadas esféricas, temos

$$dV(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (112)$$

Obs.: Nas fórmulas para a integral de superfície e de volume aparece o volume do paralelepípedo fundamental

$$v = \det(\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}, \partial_3 \mathbf{r}).$$

Observe que, pelo Teorema 1.10, isto pode ser escrito como

$$v = \det(G)^{\frac{1}{2}},$$

onde G é a matriz com entradas $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}$. Se as coordenadas forem *ortogonais*, temos $v = h_1 h_2 h_3$.

7 Operadores Diferenciais.

7.1 A Derivada Direcional.

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $\mathbf{A} : D \rightarrow V$ um campo vetorial, com derivadas parciais contínuas. A *derivada direcional* de f em p na direção $\mathbf{v} \in V$, em símbolos $(D_{\mathbf{v}} f)(p)$, é definida por

$$(D_{\mathbf{v}} f)(p) := \left. \frac{d}{dt} f(p + t\mathbf{v}) \right|_{t=0}. \quad (113)$$

(Significado físico: Taxa de variação de f na direção \mathbf{v} ; por unidade de comprimento se \mathbf{v} é unitário.) Similarmente, a derivada direcional (ou *derivada covariante*) de \mathbf{A} em p na direção $\mathbf{v} \in V$, em símbolos $(D_{\mathbf{v}} \mathbf{A})(p)$, é definida por

$$(D_{\mathbf{v}} \mathbf{A})(p) := \left. \frac{d}{dt} \mathbf{A}(p + t\mathbf{v}) \right|_{t=0}. \quad (114)$$

Proposição 7.1 *i) As derivadas direcionais $(D_{\mathbf{v}}f)(p)$ e $(D_{\mathbf{v}}\mathbf{A})(p)$ são lineares em \mathbf{v} .
ii) Em termos de coordenadas, vale*

$$(D_{\mathbf{v}}f)(p) = \sum_{i=1}^n v^i(p) \frac{\partial f}{\partial u^i}(p) \quad e \quad (D_{\mathbf{v}}\mathbf{A})(p) = \sum_{i=1}^n v^i(p) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u^i}(p). \quad (115)$$

iii) Se $\mathbf{r}(t)$ é qualquer curva com $\mathbf{r}(0) = p$ e $\dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{v}$, então podemos substituir $p + t\mathbf{v}$ por $\mathbf{r}(t)$ na definição (113) e (114), i.e.

$$(D_{\mathbf{v}}f)(p) = \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) \right|_{t=0}. \quad (116)$$

Aquí, v^i são as componentes (covariantes) de $\mathbf{v} \in V$ com respeito a um sistema de coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$, i.e. $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i(p) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p)$.

Demonstração. Aplicando a regra de cadeia dá

$$\left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \dot{u}^i(0) \frac{\partial f}{\partial u^i}(\mathbf{r}(0)).$$

O lado direito obviamente depende da curva $\mathbf{r}(t)$ só através $\mathbf{r}(0)$ e $\dot{\mathbf{r}}(0)$, então $\left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(p + t\mathbf{v}) \right|_{t=0}$ se a curva $\mathbf{r}(t)$ satisfaz a hipótese de *iii)*. Isto mostra *iii)*. Substituindo agora $\dot{u}^i(0)$ por $v^i(p)$ conforme eq. (93) mostra Eq. (115). Aquela própria equação mostra a linearidade afirmado em *i)*. Isto conclui a demonstração. \square

Nas equações da proposição, $\frac{\partial}{\partial u^i}$ é a derivada parcial com respeito à coordenada u^i , e.g.

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u^i}(p) = \left. \frac{d}{dt} \mathbf{A}(\mathbf{r}(u^1, \dots, u^i + t, \dots, u^n)) \right|_{t=0},$$

onde u^1, \dots, u^n são as coordenadas do ponto p . A proposição afirma em particular que vale

$$(D_{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}} f)(p) = \frac{\partial f}{\partial u^i}(p), \quad e \quad (D_{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}} \mathbf{A})(p) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial u^i}(p). \quad (117)$$

7.2 O Gradiente.

Lembramos que a derivada direcional $(D_{\mathbf{v}}f)(p)$ é linear em \mathbf{v} . Então o Lema 1.7 afirma que ela tem a forma de um produto escalar com \mathbf{v} :

Definição 5 Seja f uma função. O *gradiente* de f no ponto p , em símbolos $(\text{grad } f)(p)$, é o único vetor t.q. para todos $\mathbf{v} \in V$ vale

$$\mathbf{v} \cdot (\text{grad } f)(p) = (D_{\mathbf{v}}f)(p). \quad (118)$$

\square

Os componentes do gradiente podem ser calculados pela Eq. (36):

Lema 7.2 *Seja $\{u^1, \dots, u^n\}$ um sistema de coordenadas ortogonais. Então o gradiente de uma função f é dado por*¹³

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u^i} \mathbf{e}_i. \quad (119)$$

Demonstração. Verificamos:

$$\mathbf{v} \cdot \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u^i} \mathbf{e}_i = \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u^i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i = \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial f}{\partial u^i} h_i v^i = \sum_i v^i \frac{\partial f}{\partial u^i} = D_{\mathbf{v}}f.$$

Na segunda equação usamos $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i = v^i \partial_i \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_i = v^i h_i$. (Os outros termos são nulos pois $\partial_j \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_i = 0$ se $j \neq i$.) \square

¹³Não escrevemos explicitamente a dependência do ponto p .

Explicitamente, temos em coordenadas Cartesianas, cilíndricas e esféricas, respectivamente:

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= (\partial_x f) \mathbf{e}_x + (\partial_y f) \mathbf{e}_y + (\partial_z f) \mathbf{e}_z, && \text{coord. Cartesianas} \\ &= (\partial_\rho f) \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} (\partial_\varphi f) \mathbf{e}_\varphi + (\partial_z f) \mathbf{e}_z, && \text{coord. cilíndricas} \\ &= (\partial_r f) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} (\partial_\theta f) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} (\partial_\varphi f) \mathbf{e}_\varphi, && \text{coord. esféricas.} \end{aligned}$$

Definição 6 Um campo vetorial \mathbf{A} chama-se *conservativo* se a integral de linha de \mathbf{A} sobre uma curva depende somente dos pontos iniciais e finais da curva. \square

É fácil mostrar que um campo vetorial é conservativo se e só se a integral de linha sobre qualquer curva fechada é nula.

Proposição 7.3 *Um campo vetorial \mathbf{A} é conservativo se e só se ele possui um potencial, i.e. existe um campo escalar ϕ t.q. $\mathbf{A} = \text{grad } \phi$.*

Demonstração. Se $\mathbf{A} = \text{grad } \phi$, então a integral de \mathbf{A} ao longo de uma curva parametrizada $C : t \mapsto \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$ é dada por

$$\int_C \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \text{grad } \phi \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(\mathbf{r}(t)) dt = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)),$$

independente da curva. (Na segunda equação usamos a definição (118) do gradiente e a Eq. (116).) Inversamente, se a integral de curva de \mathbf{A} é independente da curva, escolhemos um ponto fixo \mathbf{r}_0 e definimos

$$\phi(\mathbf{r}) := \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

ao longo de qualquer curva de \mathbf{r}_0 até \mathbf{r} . Para uma curva parametrizada $C : t \mapsto \mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$, com $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}_0$ temos então

$$\phi(\mathbf{r}(t)) = \int_a^t \mathbf{A}(\mathbf{r}(t')) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t') dt',$$

que implica $\mathbf{A}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d}{dt} \phi(\mathbf{r}(t)) \equiv \text{grad } \phi \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$. Como isto vale para todas curvas e consequentemente para todos $\dot{\mathbf{r}}(t)$, isto implica $\text{grad } \phi = \mathbf{A}$. \square

7.3 A Divergência e o Teorema de Gauss.

A divergência de um campo vetorial \mathbf{A} é a densidade de fontes de \mathbf{A} , i.e., o fluxo de \mathbf{A} através uma superfície fechada, pela unidade de volume. Vamos fazer isso preciso. Dada uma região G , consideramos a integral de superfície $\oint_{\partial G} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$, onde ∂G é orientado com vetor normal para fora. Geometricamente, isto é o fluxo neto de \mathbf{A} saindo de G , e descreve fontes de \mathbf{A} na região G . Dividindo pelo volume de G , e fazendo o volume cada vez menor, dá uma medida para a densidade de fontes de \mathbf{A} , ou seja, a *divergência* de \mathbf{A} , em símbolos $\text{div } \mathbf{A}$. Mais precisamente, definimos

$$\text{div } \mathbf{A}(p) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(G_\varepsilon)} \oint_{\partial G_\varepsilon} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \quad (120)$$

Aquí, G_ε , $\varepsilon > 0$, é uma família de regiões tal que cada G_ε contém o ponto p e tem diâmetro¹⁴ ε , em particular G_ε contrai para o ponto p se $\varepsilon \rightarrow 0$. Observe que o volume de G_ε cai para zero como ε^3 , enquanto que o fluxo em geral só cai como ε^2 . Apesar disso, esperamos que o limite existe. A razão atrás disso é que a grandeza $\mu(G) := \oint_{\partial G} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ (o fluxo através do contorno de uma dada região G) é uma grandeza *aditiva*, e tal grandeza sempre possui uma densidade, definida por $\mu(G)/\text{Vol}(G)$ no limite de pequeno volume.¹⁵

Vamos agora calcular a divergência em termos de um sistema de coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$. (Como $\text{div } \mathbf{A}$ depende linearmente e apenas *localmente* de \mathbf{A} , a divergência deveria ser um operador diferencial. Isto realmente é o caso:)

¹⁴O diâmetro de um conjunto G é a maior distância entre dois pontos em G .

¹⁵É interessante que estas considerações, em termos matemáticos rigorosos, implicam o Teorema de Gauss junto com a própria definição da divergência ao mesmo tempo. O argumento funciona como segue. A aditividade implica que $\mu(G) = \oint_{\partial G} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ define uma medida. (Ela é definida primeiro só para regiões G com contorno suave, mas

Proposição 7.4 A divergência de um campo vetorial \mathbf{A} é dada por

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^n \partial_i(vA^i), \quad \text{onde } v := \det(\partial_1 \mathbf{r}, \dots, \partial_n \mathbf{r}). \quad (122)$$

Aqui, A^i são as componentes (contravariantes) de \mathbf{A} com respeito às coordenadas u^i como definidas na Eq. (88),

$$\mathbf{A}(p) = \sum_{i=1}^n A^i(p) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p),$$

e $\partial_i(\cdot)$ significa $\frac{\partial}{\partial u^i}(\cdot)$. (Exercício: Verifique que o lado direito é independente do sistema de coordenadas, ou seja, que a divergência é um escalar.) Explicitamente, temos em coordenadas Cartesianas, cilíndricas e esféricas, respectivamente:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \partial_x A^x + \partial_y A^y + \partial_z A^z, && \text{coord. Cartesianas} \\ &= \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho A^\rho) + \partial_\varphi A^\varphi + \partial_z A^z, && \text{coord. cilíndricas} \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r(r^2 A^r) + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta(\sin(\theta) A^\theta) + \partial_\varphi A^\varphi, && \text{coord. esféricas.} \end{aligned}$$

Demonstração. (Em dimensão três.) Sem perder generalidade podemos supor que o ponto p tem coordenadas $(u^1, u^2, u^3) = (0, 0, 0)$. Seja G_ε um pequeno “cubo” centrado em p cujas arestas coincidem com as linhas de coordenadas $u^i \in [-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$, ver Fig. 2:

$$G_\varepsilon := \{\mathbf{r}(u^1, u^2, u^3) \mid u^i \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]\}.$$

Como $\mathbf{r}(\varepsilon/2, u^2, u^3) - \mathbf{r}(-\varepsilon/2, u^2, u^3) = \varepsilon \partial_1 \mathbf{r}(p) + O(\varepsilon^2)$, o paralelepípedo gerado por

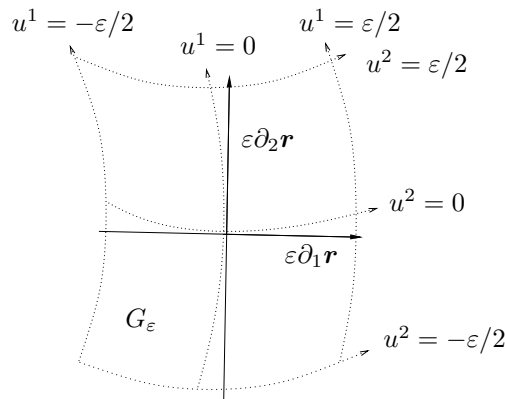


Figura 2: A face S_3^+ da região G_ε . (Todos pontos têm coordenada $u^3 = \varepsilon/2$.)

$\varepsilon \partial_1 \mathbf{r}, \varepsilon \partial_2 \mathbf{r}, \varepsilon \partial_3 \mathbf{r}$ é uma versão linearizada de G_ε , e o volume dele coincide com o volume de G_ε módulo termos da ordem ε^4 . Por isso,

$$\operatorname{Vol}(G_\varepsilon) = \varepsilon^3 v + O(\varepsilon^4). \quad (123)$$

pode ser estendida unicamente para todos conjuntos Borel, pois aqueles são gerados, por exemplo, pelos cubos.) Observe-se que $\operatorname{Vol}(G) = 0$ implica $\mu(G) = 0$. O matemático fala neste caso que $d\mu$ é absolutamente contínua com respeito à nossa medida dV . Nesta situação, o teorema de Radon-Nikodym [8] afirma que existe uma densidade, a saber uma função ρ tal que para cada região G vale $\mu(G) = \int_G \rho dV$, ou seja,

$$\oint_{\partial G} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_G \rho dV. \quad (121)$$

Tal densidade ρ é única. Agora a divergência de \mathbf{A} e definida justamente por $\operatorname{div} \mathbf{A} := \rho$, ou seja, $\operatorname{div} \mathbf{A}$ é a única função caracterizada pela equação acima. Então a eq. (121) é o famoso teorema de Gauss, e pode ser considerada como definição da divergência ao mesmo tempo. Deve ser mencionado que um jeito de construir a densidade ρ , alias $\operatorname{div} \mathbf{A}$, é justamente através da nossa definição (120), ver [9].

O contorno de G_ε consiste de 6 faces S_i^\pm , $i = 1, 2, 3$, onde S_i^- e S_i^+ são faces opostas: Por exemplo

$$S_3^\pm = \{\mathbf{r}(u^1, u^2, \pm \frac{\varepsilon}{2}) \mid u^1, u^2 \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]\}.$$

A área de S_3^\pm é aproximadamente (i.e., módulo termos da ordem ε^3) igual à área do paralelogramo gerado por $\varepsilon \partial_1 \mathbf{r}$ e $\varepsilon \partial_2 \mathbf{r}$ no ponto $(0, 0, \pm \varepsilon/2)$, respectivamente, ver Fig. 2. Como o vetor normal de ∂G_ε aponta para fora, o vetor normal \mathbf{n}_3^\pm de S_3^\pm tem a mesma direção e sentido como $\pm(\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r})$. Por isso, S_3^\pm tem como vetor superfície, no ponto $(0, 0, \pm \varepsilon)$,

$$\mathbf{S}_3^\pm = \pm \varepsilon^2 (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r})$$

módulo termos da ordem ε^3 , respectivamente. Com estas informações, o fluxo de \mathbf{A} através S_3^\pm é aproximadamente (módulo termos da ordem ε^3) dada por

$$\begin{aligned} \int_{S_3^\pm} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &\approx (\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}_3^\pm)(0, 0, \pm \varepsilon/2) \approx \pm \varepsilon^2 (\mathbf{A} \cdot (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}))(0, 0, \pm \varepsilon/2) \\ &= \pm \varepsilon^2 (A^3 v)(0, 0, \pm \varepsilon/2). \end{aligned}$$

onde temos usado a Eq. (105). O fluxo de \mathbf{A} através de $S_3^- \cup S_3^+$ é então

$$\begin{aligned} \int_{S_3^- \cup S_3^+} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &\equiv \int_{S_3^+} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \int_{S_3^-} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \approx \varepsilon^2 ((A^3 v)(0, 0, \varepsilon/2) - (A^3 v)(0, 0, -\varepsilon/2)) \\ &\approx \varepsilon^3 \partial_3 (A^3 v)(p) \end{aligned}$$

módulo termos da ordem ε^4 , pois $(A^3 v)(0, 0, \varepsilon/2) - (A^3 v)(0, 0, -\varepsilon/2) = \varepsilon \partial_3 (A^3 v)(0, 0, 0) + O(\varepsilon^2)$. O fluxo de \mathbf{A} através de $S_1^- \cup S_1^+$ e $S_2^- \cup S_2^+$ é dado por termos similares (com '3' substituído por '1' ou '2', respectivamente). Isto dá

$$\begin{aligned} \oint_{\partial G_\varepsilon} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \varepsilon^3 (\partial_1 (A^1 v) + \partial_2 (A^2 v) + \partial_3 (A^3 v)) + O(\varepsilon^4) \\ &= \text{Vol}(G_\varepsilon) \frac{1}{v} (\partial_1 (A^1 v) + \partial_2 (A^2 v) + \partial_3 (A^3 v)) + O(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (124)$$

pois o volume de G_ε é igual $\varepsilon^3 v + O(\varepsilon^4)$. Isto mostra a Proposição. \square

Teorema 7.5 (Gauss) *Seja G uma região cujo contorno ∂G é uma superfície fechada, e seja \mathbf{A} um campo vetorial com derivadas parciais contínuas. Então vale*

$$\oint_{\partial G} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_G \text{div } \mathbf{A} \, dV, \quad (125)$$

onde ∂G é orientada t.q. o seu vetor normal aponta para fora de G .

(Vamos mostrar este teorema num sistema de coordenadas. Mas note que uma função $\text{div } \mathbf{A}$ que satisfaz Eq. (125) é única. Então, *a fortiori*, este teorema implica que $\text{div } \mathbf{A}$ é independente do sistema de coordenadas, ou seja, é um campo escalar.)

Demonstração. Dividimos a região G em N^3 pequenas parcelas $G_{\varepsilon, \nu}$ com diâmetro ε ; $\nu = 1, \dots, N^3$ onde $N \simeq \varepsilon^{-1}$. ($N\varepsilon$ é o diâmetro de G .) Para cada $G_{\varepsilon, \nu}$ vale pela própria definição (120) do divergente

$$\oint_{\partial G_{\varepsilon, \nu}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \text{Vol}(G_{\varepsilon, \nu}) \text{div } \mathbf{A}(p_\nu) + O(\varepsilon^4),$$

onde p_ν é um ponto em $G_{\varepsilon, \nu}$. (Ver também Eq. (124) acima.) Mas o fluxo através ∂G é a soma dos fluxos através $\partial G_{\varepsilon, \nu}$, pois a divisa entre parcelas vizinhas $G_{\varepsilon, \nu}$, $G_{\varepsilon, \mu}$ é sendo percorrida duas vezes, com sentidos opostos, tal que os termos correspondentes se cancelam. (Isto é a aditividade mencionada após Eq. (120).) Então, temos

$$\oint_{\partial G} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\nu=1}^{N^3} \oint_{\partial G_{\varepsilon, \nu}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\nu=1}^{N^3} \text{div } \mathbf{A}(p_\nu) \text{Vol}(G_{\nu, \varepsilon}) + \sum_{\nu=1}^{N^3} O(\varepsilon^4).$$

Isto vale também no limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Naquele limite, o lado direito é justamente a integral de $\operatorname{div} \mathbf{A}$ através da região G , concluindo a prova. \square

O Teorema de Gauss tem um simples Corolário:

Corolário 7.6 *i) Seja \mathbf{B} um campo vetorial definido num domínio $D \subset E$. Se*

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (126)$$

para todas superfícies fechadas $S \subset D$, então $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$.

ii) O inverso vale se D satisfaz a seguinte propriedade topológica: Cada superfície fechada $S \subset D$ é o contorno de uma região $G \subset D$.

Demonstração. A Eq. (126) implica pelo Teorema de Gauss que para qualquer região $G \subset D$, a integral de volume de $\operatorname{div} \mathbf{B}$ sobre G é zero. Isto implica que $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Inversamente, dada uma superfície $S \subset D$, pegamos uma região $G \subset D$ t.q. $S = \partial G$ (tal G existe por hipótese.) Pelo teorema de Gauss, a integral de \mathbf{B} sobre S coincide com a integral de volume de $\operatorname{div} \mathbf{B}$ sobre G e é zero se $\operatorname{div} \mathbf{B}$ é zero. \square

O item *ii)* do Corolário 7.6 realmente não vale sem a condição topológica sobre D , como mostra o seguinte contra-exemplo.

Exemplo 7.7 Seja $D = \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$, e $\mathbf{A}(\mathbf{r}) := \mathbf{r}/r^3$. O divergente de \mathbf{A} em D é zero, mas o fluxo através qualquer superfície fechada que contém a origem no interior é igual 4π . \square

Demonstração. Em coordenadas esféricas, temos $\mathbf{A} = r^{-2} \partial_r \mathbf{r}$, então a componente A^r é dada por $A^r(r, \theta, \phi) = r^{-2}$, e

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_r (r^2 \sin \theta r^{-2}) = 0$$

em D . Para calcular o fluxo, usamos num primeiro passo uma esfera S_R centrada na origem de raio R . Calcula-se pela fórmula (107)

$$\oint_{S_R} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi A^r(R, \theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi = 4\pi.$$

Num segundo passo, seja G arbitrário. Com certeza G contém uma esfera S_R (para R suficientemente pequeno). Chamamos a região entre S_R e G de \hat{G} . O contorno de \hat{G} consiste de ∂G e de S_R . Em ∂G os vetores normais respectivas coincidem, porem em S_R eles têm sentidos opostos. Por isso,

$$\oint_{\partial G} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} - \oint_{S_R} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_{\partial \hat{G}} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{\hat{G}} \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV = 0,$$

pois \hat{G} é contido no domínio D , onde $\operatorname{div} \mathbf{A}$ é zero. A equação acima significa que o fluxo através ∂G coincide com o fluxo através S_R , a saber com 4π . \square

7.4 O Rotacional e o Teorema de Stokes.

O rotacional de um campo vetorial \mathbf{A} é uma medida da circuitação de \mathbf{A} . A circuitação de \mathbf{A} sobre um eixo \mathbf{n} (um vetor normal) através uma curva C fechada, perfurada pelo eixo $\mathbb{R} \mathbf{n}$, é a integral $\oint_C \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$. Dividindo pela “área envolvida por C ”, e fazendo o limite onde C contrai a um ponto, resulta na *densidade de circuitação*. Mais precisamente, definimos: A densidade de circuitação de \mathbf{A} sobre um eixo \mathbf{n} num ponto $p \in E$, em símbolos $R(\mathbf{n})$, é dada por

$$R(\mathbf{n}) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|S_\varepsilon|} \oint_{\partial S_\varepsilon} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (127)$$

Aquí, S_ε , $\varepsilon > 0$, é uma família de superfícies tal que cada S_ε contém o ponto p , tem vetor normal em p igual \mathbf{n} , e tem diâmetro¹⁴ ε , e $|S_\varepsilon|$ é a área de S_ε . (A integração ao longo de ∂S_ε deve

ser tomada no sentido que obedece a “regra da mão direita” com respeito a \mathbf{n} .) Veremos logo (Lema 7.8) que a densidade de circuitação $R(\mathbf{n})$ é da forma $R(\mathbf{n}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}$ para um certo (único) vetor \mathbf{R} . Este vetor chamamos o *rotacional* de \mathbf{A} no ponto p , em símbolos $(\text{rot } \mathbf{A})(p)$. Com isso, o rotacional $\text{rot } \mathbf{A}$ é caracterizado por

$$(\text{rot } \mathbf{A})(p) \cdot \mathbf{n} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|S_\varepsilon|} \oint_{\partial S_\varepsilon} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}, \quad (128)$$

onde S_ε é uma família de superfícies como especificada acima, e $|S_\varepsilon|$ é a área de S_ε .

Lema 7.8 *Existe um único vetor \mathbf{R} tal que para todos \mathbf{n} vale $R(\mathbf{n}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}$.*

Demonstração. (Para simplificar o argumento, fazemos a prova só para uma família de superfícies planas.) Nos fixamos uma superfície S plana (ou seja, uma parte de um hyperplano em E) com vetor normal \mathbf{n} , que contem o ponto p no interior. Para $\varepsilon > 0$, seja S_ε a mesma superfície, esticado pelo fator ε com centro p . (Em outras palavras, $S_\varepsilon = \{p + \varepsilon p\hat{q}, q \in S\}$.) Seja \mathbf{S} o vetor superfície de S conforme Eq. (102), i.e.,

$$\mathbf{S} := |S| \mathbf{n} \quad \text{e analogamente} \quad \mathbf{S}_\varepsilon := |S_\varepsilon| \mathbf{n}.$$

Como a área de S_ε é igual ε^2 vezes a área de S , podemos escrever

$$R(\mathbf{n}) = \frac{1}{|S|} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \mu(\mathbf{S}_\varepsilon), \quad \text{onde} \quad \mu(\mathbf{S}_\varepsilon) := \oint_{\partial S_\varepsilon} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (129)$$

O vetor superfície, na notação da eq. (102), de uma superfície com área 0 corresponde ao vetor $\mathbf{0}$. Então, obviamente $\mu(\mathbf{0}) = 0$, pois a curva ∂S tem comprimento 0 neste caso. Ademais, o vetor superfície $\mathbf{S}_\varepsilon := |S_\varepsilon| \mathbf{n}$ é dado por $\mathbf{S}_\varepsilon = \varepsilon^2 \mathbf{S}$ pois $|S_\varepsilon| = \varepsilon^2 |S|$. Usando estes dois fatos, podemos escrever

$$|S| R(\mathbf{n}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} (\mu(\varepsilon^2 \mathbf{S}) - \mu(\mathbf{0})) = \frac{d}{d\varepsilon} \mu(\varepsilon \mathbf{S})|_{\varepsilon=0} = (D_{\mathbf{S}} \mu)(\mathbf{0}),$$

veja a definição (113) da derivada direcional. Como a derivada direcional é linear em \mathbf{S} , isto mostra que a aplicação $\mathbf{S} = |S| \mathbf{n} \mapsto S R(\mathbf{n})$ é linear. Isto implica, pelo Lema 1.7, que existe um único vetor \mathbf{R} tal que para cada \mathbf{n} vale $R(\mathbf{n}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}$. Isto completa a prova do Lema. \square

Vamos calcular o rotacional em coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$. (Isto também mostrara a *existência* do limite (128), que nos não temos mostrado ainda.)

Proposição 7.9 *O rotacional de um campo vetorial \mathbf{A} é dado por*

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{v} \left\{ (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} + (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} + (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3} \right\}, \quad (130)$$

onde $v := \det(\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{r}, \partial_3 \mathbf{r})$. Aqui, A_i são as componentes covariantes de \mathbf{A} definidas por

$$A_i(p) := \mathbf{A}(p) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p), \quad (131)$$

e $\partial_i A_j$ significa $\frac{\partial A_j}{\partial u^i}$.

Explicitamente, em coordenadas Cartesianas, cilíndricas e esféricas, respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= (\partial_y A_z - \partial_z A_y) \mathbf{e}_x + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) \mathbf{e}_y + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \mathbf{e}_z, & \text{Cart.} \\ &= \frac{1}{\rho} \left\{ (\partial_\varphi A_z - \partial_z A_\varphi) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} + (\partial_z A_\rho - \partial_\rho A_z) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} + (\partial_\rho A_\varphi - \partial_\varphi A_\rho) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right\}, & \text{cilíndr.} \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left\{ (\partial_\theta A_\varphi - \partial_\varphi A_\theta) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} + (\partial_\varphi A_r - \partial_r A_\varphi) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} + (\partial_r A_\theta - \partial_\theta A_r) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right\}, & \text{esfér.} \end{aligned}$$

Demonstração. Sem perder generalidade podemos supor que o ponto p tem coordenadas $(u^1, u^2, u^3) = (0, 0, 0)$. Num primeiro passo, pegamos uma família de pequenos “paralelogramos”

S_ε contidos na superfície $\{u^3 = 0\}$ centrado em p , cujas arestas coincidem com as linhas de coordenadas u^1 e u^2 (ver Fig. 2):

$$S_\varepsilon := \{\mathbf{r}(u^1, u^2, 0) \mid u^1, u^2 \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]\}.$$

Como $\mathbf{r}(\varepsilon/2, u^2, 0) - \mathbf{r}(-\varepsilon/2, u^2, 0) = \varepsilon \partial_1 \mathbf{r}(p) + O(\varepsilon^2)$, o paralelogramo gerado por $\varepsilon \partial_1 \mathbf{r}, \varepsilon \partial_2 \mathbf{r}$ é uma versão linearizada de S_ε , e a área dele coincide com a área $|S_\varepsilon|$ de S_ε módulo termos da ordem ε^3 . Por isso,

$$|S_\varepsilon| = \varepsilon^2 \|\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}\|(p) + O(\varepsilon^3). \quad (132)$$

O contorno de S_ε consiste de 4 curvas C_i^\pm , $i = 1, 2$, onde C_i^- e C_i^+ são arestas opostas; Por exemplo

$$C_1^\pm = \{\mathbf{r}(\pm \frac{\varepsilon}{2}, u^2, 0) \mid u^2 \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]\}.$$

Junto com a orientação certa, a curva orientada C_1^\pm pode ser aproximada pelo vetor $\pm \varepsilon (\partial_2 \mathbf{r})(\pm \varepsilon/2, 0, 0)$, respetivamente, ver Figura 2. Consequentemente, a integral de linha \mathbf{A} através C_1^\pm é aproximadamente (módulo termos da ordem ε^2) dada por $\pm \varepsilon (\mathbf{A} \cdot \partial_2 \mathbf{r})(\pm \varepsilon/2, 0, 0) \equiv \pm \varepsilon A_2(\pm \varepsilon/2, 0, 0)$. Isto dá

$$\int_{C_1^+ \cup C_1^-} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \approx \varepsilon (A_2(\varepsilon/2, 0, 0) - A_2(-\varepsilon/2, 0, 0)) \approx \varepsilon^2 (\partial_1 A_2)(p)$$

módulo termos da ordem ε^3 , pois $A_2(\varepsilon/2, 0, 0) - A_2(-\varepsilon/2, 0, 0) = \varepsilon (\partial_1 A_2)(0, 0, 0) + O(\varepsilon^2)$. Similarmemente, a integral através $C_2^+ \cup C_2^-$ é dada por $-\varepsilon^2 (\partial_2 A_1)(p)$, então

$$\oint_{\partial S_\varepsilon} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon^2 ((\partial_1 A_2)(p) - (\partial_2 A_1)(p)) + O(\varepsilon^3).$$

Como o vetor normal a S_ε é dado por $\|\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}\|^{-1} \partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}$ (igual \mathbf{e}_3 se as coordenadas são ortogonais), esta equação implica pela definição (128) do rotacional que no ponto p vale

$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot \frac{\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}}{\|\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}\|} \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|S_\varepsilon|} \oint_{\partial S_\varepsilon} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1}{\|\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}\|}$$

(onde temos usado a fórmula (132) para a área de S_ε), ou seja,

$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot (\partial_1 \mathbf{r} \times \partial_2 \mathbf{r}) = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1. \quad (133)$$

Mas como nos vimos antes, veja Eq. (105), o lado esquerdo da Eq. (133) é justamente $(\text{rot } \mathbf{A})^3 v$, onde $(\text{rot } \mathbf{A})^i$ denotam as componentes (contravariantes) do vetor $\text{rot } \mathbf{A}$. Com argumentos análogos podemos concluir que $(\text{rot } \mathbf{A})^1 v = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2$ e $(\text{rot } \mathbf{A})^2 v = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3$. Então temos

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &\equiv \sum_{i=1}^3 (\text{rot } \mathbf{A})^i \partial_i \mathbf{r} \\ &= \frac{1}{v} ((\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2) \partial_1 \mathbf{r} + (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3) \partial_2 \mathbf{r} + (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1) \partial_3 \mathbf{r}), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Teorema 7.10 (Stokes) *Seja S uma superfície orientada cujo contorno ∂S é uma curva fechada, $C = \partial S$, e seja \mathbf{A} um campo vetorial com derivadas parciais contínuas. Então vale*

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}, \quad (134)$$

onde a integração ao longo de C é tomada no sentido que obedece a “regra da mão direita” com respeito ao vetor normal da superfície.

Demonstração. Dividimos a superfície S em N^2 pequenas pedacinhos S_ν , com diâmetro ε , $\nu = 1, \dots, N^2$ onde $N \simeq \varepsilon^{-1}$. ($N\varepsilon$ é o diâmetro de S .) Agora vale

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{\nu=1}^{N^2} \oint_{\partial S_\nu} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

porque a divisa entre pedacinhos vizinhos S_ν, S_μ é sendo percorrida duas vezes, com sentidos opostos, tal que os termos correspondentes se cancelam. Mas para cada S_ν vale pela própria definição (128) do rotacional

$$\oint_{\partial S_\nu} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = |S_\nu| \operatorname{rot} \mathbf{A}(p_\nu) \cdot \mathbf{n}(p_\nu) + O(\varepsilon^3) \equiv \operatorname{rot} \mathbf{A}(p_\nu) \cdot \mathbf{S}_\nu(p_\nu) + O(\varepsilon^3),$$

onde p_ν é um ponto em S_ν e $\mathbf{S}_\nu(p_\nu) := |S_\nu| \mathbf{n}(p_\nu)$. Então, temos

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{\nu=1}^{N^2} \operatorname{rot} \mathbf{A}(p_\nu) \cdot \mathbf{S}_\nu(p_\nu) + \sum_{\nu=1}^{N^2} O(\varepsilon^3).$$

Isto vale também no limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Naquele limite, o lado direito é justamente a integral de $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ através da superfície S , veja Eq. (103), concluindo a prova. \square

O Teorema de Stokes tem um Corolário análogo com o Corolário 7.6 do Teorema de Gauss:

Corolário 7.11 *Seja \mathbf{A} um campo vetorial definido num domínio $D \subset E$. Se \mathbf{A} é conservativo (ver Definição 6 e Proposição 7.3), então vale $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$. O inverso vale se cada curva fechada $C \subset D$ é o contorno de uma superfície $S \subset D$.¹⁶*

Agora vamos mostrar um análogo com a Proposição 7.3:

Proposição 7.12 *i) Para cada superfície fechada $S \subset D$ vale*

$$\oint_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (135)$$

ii) Seja \mathbf{B} um campo vetorial com domínio D satisfazendo

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

para toda superfície fechada $S \subset D$. Se D contém um ponto q tal que todos segmentos de retas \overline{qp} , $p \in D$, são contidos completamente em D ,¹⁷ então \mathbf{B} possui um vetor potencial, i.e. um campo vetorial \mathbf{A} t.q.

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Demonstração. Ad *i)* Lembramos que pelo Teorema de Stokes, a integral de superfície S do rotacional de um campo \mathbf{A} coincide com a integral de linha de \mathbf{A} ao longo do contorno ∂S . Se S é fechada, esta borda é vazia, e a integral deve ser zero. (Em mais detalhes: Cortando a superfície fechada S em duas partes S_1 e S_2 ao longo de uma curva C , a integral $\oint_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ é a soma das duas integrais através de S_1 e S_2 . Conforme o Teorema de Stokes, os dois coincidem com a integral de linha de \mathbf{A} ao longo de $C = \partial S_1 = \partial S_2$, mas com sinais opostos, então a soma é zero.) Ad *ii)* Escolhemos como origem o ponto $q \in D$ mencionado na proposição, e definimos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) := \int_0^1 s \mathbf{B}(s\mathbf{r}) \times \mathbf{r} ds.$$

Queremos mostrar que $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Dado uma curva fechada C em D , com parametrização $\mathbf{r}_0(t)$, $t \in [0, 1]$, construímos uma superfície S_0 pela parametrização $\mathbf{r}(s, t) := s\mathbf{r}_0(t)$, $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

¹⁶O “inverso” no Corolário 7.11 realmente não vale sem a condição topológica sobre D , como mostra o seguinte contra-exemplo. Seja $D = \mathbb{R}^3 - \{\text{eixo-}z\}$, e $\mathbf{A} = \operatorname{grad} \varphi$ (em coordenadas cilíndricas). O rotacional de \mathbf{A} é zero em D , mas a integral de linha através qualquer curva que envolve o eixo- z é 2π .

¹⁷Tal domínio se chama de “star-shaped”.

S_0 contém a origem q e tem a curva C como contorno. Usando os fatos $\partial_s \mathbf{r}(s, t) = \mathbf{r}_0(t)$ e $\partial_t \mathbf{r}(s, t) = s \dot{\mathbf{r}}_0(t)$, calcula-se

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{B}(s\mathbf{r}_0(t)) \cdot (\mathbf{r}_0(t) \times s \cdot \dot{\mathbf{r}}_0(t)) ds dt \equiv \int_0^1 \mathbf{A}(\mathbf{r}_0(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}_0(t) dt \\ &= \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \equiv \int_{S_0} \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \end{aligned}$$

Mas a hipótese implica que a integral de \mathbf{B} através de qualquer outra superfície S com o mesmo contorno C coincide com a integral $\int_{S_0} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ calculada acima. Então, as integrais de superfície de \mathbf{B} e $\text{rot } \mathbf{A}$ coincidem para qualquer superfície $S \subset D$. Isto mostra que $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$. \square

Resumimos os conteúdos das Proposições 7.3 (seta 1 embaixo) e 7.12 (setas 2), e dos Corolários 7.11 (setas 3) e 7.6 (setas 4):

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{A} = \text{grad } \phi & \xleftrightarrow{1} & \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = 0 & \xleftrightarrow{3} & \text{rot } \mathbf{A} = 0 \\ \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} & \xleftrightarrow{2} & \oint_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0 & \xleftrightarrow{4} & \text{div } \mathbf{B} = 0. \end{array}$$

(Aqui, as implicações “ \leftarrow ” valem só se o domínio do campo for topologicamente trivial, como discutido antes.) Em particular, temos

$$\text{rot grad } \phi = 0 \quad \text{e} \quad \text{div rot } \mathbf{A} = 0. \tag{136}$$

7.5 Operador de Laplace.

O Laplace de uma função f , Δf , é definido por

$$\Delta f := \text{div grad } f. \tag{137}$$

Explicitamente, com respeito a coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$ vale

$$\Delta f = \frac{1}{v} \left\{ \partial_1 \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \partial_1 f \right) + \partial_2 \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \partial_2 f \right) + \partial_3 \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \partial_3 f \right) \right\}, \quad v := h_1 h_2 h_3. \tag{138}$$

Em coordenadas Cartesianas, cilíndricas, e esféricas, respectivamente:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \partial_x^2 f + \partial_y^2 f + \partial_z^2 f, && \text{coord. Cartesianas} \\ &= \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho f) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 f + \partial_z^2 f, && \text{coord. cilíndricas} \\ &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r f) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta f) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \partial_\varphi^2 f, && \text{coord. esféricas.} \end{aligned}$$

7.6 O “Cálculo-Nabla”.

O operador *nabla*, em símbolos ∇ , é formalmente definido por

$$\nabla := \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} \mathbf{e}_i \partial_i. \tag{139}$$

Ele é um vetor e, ao mesmo tempo, um operador diferencial. **Aviso:** Na aplicação de nabla num campo vetorial $\sum_j A^j \mathbf{e}_j$ deve ser tomado em consideração que os vetores $\mathbf{e}_j(p)$ não são constantes, i.e. $\partial_i \mathbf{e}_j \neq 0!$ (Ver [1, Exercício 2.2.3] para a formula explicita de $\partial_i \mathbf{e}_j \neq 0$.) Nós vamos usar o nabla somente em coordenadas Cartesianas.

Usando esse operador, os operadores diferenciais grad , rot , div e Δ podem ser escritos como

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi, \tag{140}$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A},$$

$$\Delta \phi = \nabla \cdot \nabla \phi, \tag{141}$$

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Cálculo-nabla: ...

Proposição 7.13

$$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f\nabla g, \quad (142)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f \nabla \cdot \mathbf{A}, \quad (143)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (144)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f (\nabla \times \mathbf{A}). \quad (145)$$

(Todas estas formulas podem ser mostradas facilmente usando o “cálculo -nabla”. Alternativa: Mostrar as formulas em coordenadas Cartesianas. Como elas são equações entre campos vetoriais, devem valer em quaisquer coordenadas.)

Para um campo vetorial \mathbf{A} definimos o Laplace por

$$\Delta \mathbf{A} := \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A}. \quad (146)$$

Lema 7.14 (Identidades de Green.) Para qualquer região G e funções f, g vale

$$\int_G f \Delta g \, dV = \int_{\partial G} f \nabla g \cdot d\boldsymbol{\sigma} - \int_G \nabla f \cdot \nabla g \, dV, \quad (147)$$

$$\int_G (f \Delta g - g \Delta f) \, dV = \int_{\partial G} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot d\boldsymbol{\sigma}. \quad (148)$$

7.7 Equação de Poisson

A equação de Poisson é a EDP

$$\Delta f = h \quad (149)$$

onde f e h são funções numa certa região G . Normalmente, a função h é dada e nos procuramos uma função f que satisfaz a EDP acima, junto com certas condições de contorno em ∂G . Tal função f é chamada de solução da EDP. (Aqui, vamos considerar só $G = \mathbb{R}^3$, e a condição de contorno será que f cai para zero no infinito.)

Mostraremos que a equação de Poisson possui uma solução e que a solução é única.

Proposição 7.15 Seja h uma função que cai para zero no infinito rapidamente. A função

$$f(\mathbf{r}) := \frac{-1}{4\pi} \int \frac{h(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \, dV' \quad (150)$$

é uma solução da equação de Poisson.

Demonstração. Usando $\text{grad} \frac{1}{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'\|} = -\frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'\|^3}$, temos

$$\begin{aligned} (\Delta f)(\mathbf{r}_0) &= \frac{1}{4\pi} \text{div} \int h(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'\|^3} \, dV' = \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|G_\varepsilon|} \oint_{\partial G_\varepsilon} \left(\int h(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \, dV' \right) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|G_\varepsilon|} \int h(\mathbf{r}') \left(\oint_{\partial G_\varepsilon} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \right) \, dV', \end{aligned}$$

onde G_ε é uma família de regiões que contrai ao ponto \mathbf{r}_0 para $\varepsilon \rightarrow 0$. Agora sabemos do exercício 18 que

$$\oint_{\partial G_\varepsilon} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} 4\pi & \text{se } \mathbf{r}' \in G_\varepsilon, \\ 0 & \text{se } \mathbf{r}' \notin G_\varepsilon. \end{cases}$$

Então na integral de volume dV' acima só contribuem $\mathbf{r}' \in G_\varepsilon$, e temos

$$(\Delta f)(\mathbf{r}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|G_\varepsilon|} \int_{G_\varepsilon} h(\mathbf{r}') \, dV' \equiv h(\mathbf{r}_0).$$

□

8 Tensores.

8.1 Álgebra Linear de Tensores.

8.1.1 Produto Tensorial.

Seja V um espaços vetorial de dimensão finita, sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . O *espaço dual* de V , em símbolos V^* , é o espaço das aplicações lineares de V em \mathbb{K} ,

$$V^* := \{\eta : V \rightarrow \mathbb{K}, \text{ linear}\}. \quad (151)$$

Tais aplicações lineares são frequentemente chamados de *formas (lineares) de grau 1*, ou *covetores*. Este espaço é um espaço vetorial por sua vez (como cada espaço de funções), a saber pelas definições

$$(\eta_1 + \eta_2)(\mathbf{v}) := \eta_1(\mathbf{v}) + \eta_2(\mathbf{v}), \quad (s\eta)(\mathbf{v}) := s\eta(\mathbf{v}). \quad (152)$$

O zero é a aplicação $\mathbf{0}(\mathbf{v}) := 0$ para todos $\mathbf{v} \in V$.

Existe um certo isomorfismo entre V e V^* que, porem, não é canônico pois depende de uma escolha de base em V : Seja no seguinte $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ uma base em V (não necessariamente ortonormal). Como sabemos, cada vetor $\mathbf{v} \in V$ possui uma única decomposição

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{a}_i, \quad (153)$$

definindo suas componentes (“contravariantes”) v^i . Para $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos uma forma (um covetor) $\mathbf{a}^i \in V^*$ por

$$\mathbf{a}^i(\mathbf{v}) := v^i, \quad (154)$$

onde v^i é a componente de \mathbf{v} com respeito à base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ como na eq. (153). Equivalentemente, \mathbf{a}^i é caracterizado por

$$\mathbf{a}^i(\mathbf{a}_j) = \delta_j^i \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (155)$$

Proposição 8.1 *Os n covetores $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n$ são uma base do espaço dual V^* , a chamada base dual. Em mais detalhes, cada $\eta \in V^*$ é da forma*

$$\eta = \sum_{i=1}^n \eta_i \mathbf{a}^i, \quad \text{onde } \eta_i = \eta(\mathbf{a}_i). \quad (156)$$

Demonstração. (Independência linear dos \mathbf{a}^i : *exercício*.) Para mostrar que eles geram V^* , seja $\eta \in V^*$ um covetor. Pela linearidade, temos para qualquer $\mathbf{v} \in V$ com decomposição como na eq. (153):

$$\eta(\mathbf{v}) = \eta\left(\sum_{i=1}^n v^i \mathbf{a}_i\right) = \sum_{i=1}^n v^i \eta(\mathbf{a}_i) = \sum_{i=1}^n \eta(\mathbf{a}_i) \mathbf{a}^i(\mathbf{v}) = \left(\sum_{i=1}^n \eta(\mathbf{a}_i) \mathbf{a}^i\right)(\mathbf{v}), \quad (157)$$

então η realmente é uma combinação linear como afirmado na eq. (156). \square

Esta proposição mostra que V e V^* são isomórficos (porem não numa maneira canônica). Agora vamos conhecer um isomorfismo canônico (independente de base) entre V e $(V^*)^*$. Dado $\mathbf{v} \in V$ e $\eta \in V^*$, o número $\eta(\mathbf{v})$ (“ η aplicado em \mathbf{v} ”) pode ser também encarado como “ \mathbf{v} aplicado em η ”. Em outras palavras, um vetor $\mathbf{v} \in V$ pode ser identificado com uma forma linear em V^* pela definição

$$\mathbf{v}(\eta) := \eta(\mathbf{v}).$$

Por outro lado, para cada $\phi \in (V^*)^*$ existe um vetor $\mathbf{v} \in V$ tal que para todas $\eta \in V^*$ vale $\phi(\eta) = \eta(\mathbf{v})$, a saber $\mathbf{v} := \sum_i \phi(\mathbf{a}^i) \mathbf{a}_i$. Desta maneira podemos identificar V com $(V^*)^*$:

$$V \cong (V^*)^* = \{\text{aplicações } V^* \rightarrow \mathbb{K}, \text{ lineares}\}. \quad (158)$$

Agora estamos preparados para a definição do produto tensorial. Seja U um outro espaço vetorial sobre \mathbb{K} de dimensão finita. O *produto tensorial* de U e V , em símbolos $U \otimes V$, é por definição o espaço das aplicações bilineares de $U^* \times V^*$ em \mathbb{K} ,

$$U \otimes V := \{U^* \times V^* \rightarrow \mathbb{K}, \text{ bilinear}\}. \quad (159)$$

Isto é um espaço vetorial numa maneira análogo com eq. (152). Dado $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{v} \in V$, define-se o “produto tensorial” $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \in U \otimes V$ pela aplicação $U^* \times V^*$ dado por

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})(\eta, \mu) := \eta(\mathbf{u})\mu(\mathbf{v}), \quad \eta \in U^*, \mu \in V^*.$$

(Checkar que ela é bilinear!) Este produto satisfaz as seguintes relações:¹⁸

$$(c\mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u} \otimes (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}), \quad c \in \mathbb{K}, \quad (160)$$

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{v} + \mathbf{u}_2 \otimes \mathbf{v}, \quad (161)$$

$$\mathbf{u} \otimes (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_1 + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}_2. \quad (162)$$

Teorema 8.2 (Propriedade de Universalidade) *Seja W um terceiro espaço vetorial. Para cada aplicação bilinear $\omega : U \times V \rightarrow W$ existe uma única aplicação linear $\eta : U \otimes V \rightarrow W$ tal que $\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \eta(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$. Desta maneira, temos um isomorfismo canônico*

$$\{U \times V \rightarrow W, \text{ bilinear}\} \cong \{U \otimes V \rightarrow W, \text{ linear}\}. \quad (163)$$

(Esta propriedade do produto tensorial realmente *caracteriza* o produto tensorial unicamente.) No caso $W = \mathbb{K}$, o Teorema afirma que

$$\{U \times V \rightarrow \mathbb{K}, \text{ bilinear}\} \cong (U \otimes V)^*. \quad (164)$$

Observe que, pela identificação (158), as aplicações bilineares $U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ podem ser também identificados com o espaço $U^* \otimes V^*$, então temos

$$U^* \otimes V^* \cong (U \otimes V)^*. \quad (165)$$

Proposição 8.3 *Seja $\{\mathbf{a}_i, i = 1, \dots, n\}$ uma base em U , e $\{\mathbf{b}_j, j = 1, \dots, m\}$ uma base em V . Então, $\{\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_j, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ é uma base em $U \otimes V$.*

Demonstração. Seja $T : U^* \times V^* \rightarrow \mathbb{K} \in U \otimes V$, e sejam $\eta \in U^*, \mu \in V^*$. Conforma a Proposição 8.1, eles são da forma $\eta = \sum_i \eta(\mathbf{a}_i) \mathbf{a}^i$ e $\mu = \sum_j \mu(\mathbf{b}_j) \mathbf{b}^j$. Consequentemente,

$$T(\eta, \mu) = \sum_{i,j} \eta(\mathbf{a}_i) \mu(\mathbf{b}_j) T(\mathbf{a}^i, \mathbf{b}^j) = \sum_{i,j} T(\mathbf{a}^i, \mathbf{b}^j) (\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_j)(\eta, \mu).$$

Então, T tem a forma $T = \sum_{i,j} T^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_j$, com $T^{ij} = T(\mathbf{a}^i, \mathbf{b}^j)$, mostrando que os $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_j$ geram $U \otimes V$. Agora seja $\sum_{i,j} c^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_j = 0$. Agindo nesta equação com $\mathbf{a}^k \otimes \mathbf{b}^l$, mostra que os coeficientes c^{kl} são todos nulos. Então, os $\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_j$ são linearmente independentes. \square

Como consequência, cada tensor T em $U \otimes V$ pode ser escrito como uma soma finita de termos da forma $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$:

$$T = \sum_{\nu}^{\text{finito}} \mathbf{u}_{\nu} \otimes \mathbf{v}_{\nu}.$$

Supomos agora que V possui um *produto escalar*¹⁹ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ou $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, i.e. ele é um espaço euclidiano (no caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou unitário (no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Neste caso, V pode ser identificado canonicamente com V^* pelo Lema 1.7: Com $\eta \in V^*$ é associado unicamente um $\mathbf{v} \in V$ tal que vale

$$\eta(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad (166)$$

¹⁸Realmente, o espaço $U \otimes V$ pode ser caracterizado pelo seguinte fato: Ele consiste de combinações lineares finitos de produtos (abstratos) $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, sujeito às relações (160), (161) e (162).

¹⁹No caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\dim V = \infty$, é costume escrever o produto escalar como $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. No caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ele é *anti-linear* no primeiro argumento.

para todos $\mathbf{w} \in V$. A associação $\mathbf{v} \leftrightarrow \eta$ estabelece um isomorfismo²⁰ $V \cong V^*$. Seja agora U um outro espaço vetorial com produto escalar. Por esta identificação, a definição (159) se torna

$$U \otimes V \cong \{U \times V \rightarrow \mathbb{K}, \text{ bilinear}\}, \quad (167)$$

e $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \in U \otimes V$ é identificado com a aplicação dado por

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{u}', \mathbf{v}') := \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle. \quad (168)$$

Um produto escalar em $U \otimes V$ é definido por

$$\langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{u}' \otimes \mathbf{v}' \rangle := \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle. \quad (169)$$

Como na Proposição 8.3 mostra-se: Se $\{\mathbf{a}_i, i = 1, \dots, n\}$ é uma BON (base *ortonormal*) em U , e $\{\mathbf{b}_j, j = 1, \dots, m\}$ uma BON em V , então $\{\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{b}_j, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ é uma BON em $U \otimes V$.

Se U e/ou V tem dimensão *infinita* e os dois são completos (i.e., eles são espaços de Hilbert), o produto tensorial deles é definido como seguinte. Definem-se primeiro os produtos $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ como aplicações bilineares $U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ pela equação (168). Depois define-se $U \otimes_0 V$ como o espaço das combinações lineares (finitas) de elementos da forma $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, e $U \otimes V$ como a completção de $U \otimes_0 V$. É fácil verificar que, se $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots\}$ é uma base de V , então cada tensor $T \in U \otimes V$ é da forma

$$T = \sum_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{u}_i \in U.$$

No caso de espaços do tipo $L^2(M)$, vale o seguinte Teorema.

Teorema 8.4 *Sejam M_1 e $M_2 \subset \mathbb{R}^n$. Para $f_1 \in L^2(M_1)$, $f_2 \in L^2(M_2)$, o produto tensorial $f_1 \otimes f_2$ pode ser identificado com um elemento de $L^2(M_1 \times M_2)$ por*

$$(f_1 \otimes f_2)(x, y) := f_1(x) f_2(y), \quad x \in M_1, y \in M_2.$$

Esta identificação estabelece um isomorfismo de espaços de Hilbert

$$L^2(M_1) \otimes L^2(M_2) \cong L^2(M_1 \times M_2).$$

(Comprovante: [7, p. 52].)

O produto tensorial de mais do que dois espaços vetoriais V_1, V_2, V_3, \dots constroi-se como seguinte. Por definição, $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ é o espaço das aplicações bilineares de $(V_1 \otimes V_2)^* \times V_3^*$ em \mathbb{K} . Mas as aplicações lineares de $(V_1 \otimes V_2)^* \rightarrow \mathbb{K}$ são o espaço $((V_1 \otimes V_2)^*)^* \cong V_1 \otimes V_2$, então isomórficas com as aplicações bilineares de $V_1^* \times V_2^* \rightarrow \mathbb{K}$. Temos então

$$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong \{V_1^* \times V_2^* \times V_3^* \rightarrow \mathbb{K}, \text{ trilinear}\}.$$

O mesmo vale para $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$. Isso mostra que o produto vetorial de espaços vetoriais é associativo, então podemos escrever $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) =: V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$. Iterando este raciocínio, temos

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_n = \{V_1^* \times \dots \times V_n^* \rightarrow \mathbb{K}, n\text{-linear}\}.$$

No seguinte, vamos fixar um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ de dimensão finita, n (o papel de V sendo o espaço de vetores deslocamento associado com o espaço afim E físico). Neste caso, chamamos os vetores $\mathbf{v} \in V$ de vetores *contravariantes*, e as formas lineares (ou covetores) $\eta \in V^*$ de vetores *covariantes*.

Definição 7 Para $r, s \in \mathbb{N}_0$, $r + s \neq 0$, definimos o espaço de *tensores do tipo* (r, s) sobre V , em símbolos $T_s^r(V)$, por

$$T_s^r(V) := \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_r \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_s \quad (170)$$

$$r \text{ vezes} \quad s \text{ vezes} \quad (171)$$

$$= \{ \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_s \times \underbrace{V \times \dots \times V}_r \rightarrow \mathbb{R}, \text{ multilinear} \}. \quad (172)$$

(Na última linha usamos a identificação (158).) Para $r = 0 = s$ definimos $T_0^0(V) := \mathbb{R}$. □

²⁰Anti-isomorfismo, no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Os elementos em $T_s^0(V)$ (ou seja, as aplicações s -lineares de $V^{\times s} \rightarrow \mathbb{R}$) que são totalmente anti-lineares são chamadas de s -formas.

As equações (153), (154) e (156) implicam o seguinte

Corolário 8.5 *Uma base em $T_s^r(V)$ é dada por*

$$\left\{ \mathbf{a}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}_{i_r} \otimes \mathbf{a}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}^{j_s}, \quad i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \in \{1, \dots, n\} \right\}. \quad (173)$$

Em mais detalhes, cada $T \in T_s^r(V)$ é da forma

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s=1}^n T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \mathbf{a}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}_{i_r} \otimes \mathbf{a}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}^{j_s}, \quad \text{onde} \quad (174)$$

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T(\mathbf{a}^{i_1}, \dots, \mathbf{a}^{i_r}, \mathbf{a}_{j_1}, \dots, \mathbf{a}_{j_s}). \quad (175)$$

Estes números são as chamadas componentes do tensor com respeito à base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$. Dois tensores são iguais se, e somente se, as suas componentes com respeito a uma dada base coincidem (se, e somente se, as suas componentes com respeito a qualquer outra base coincidem).

Em particular, um tensor é zero se, e somente se, todas suas componentes com respeito a uma base (arbitrária) são zero. Como consequência do Corolário, um tensor $T \in T_s^r(V)$ age em $\eta_1, \dots, \eta_r \in V^*$ e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s \in V$ como

$$T(\eta_1, \dots, \eta_r, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s) = \sum_{i_1, \dots, j_s=1}^n T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} (\eta_1)_{i_1} \cdots (\eta_r)_{i_r} (\mathbf{v}_1)^{j_1} \cdots (\mathbf{v}_s)^{j_s}. \quad (176)$$

8.1.2 Exemplos: Tensor Kronecker, Tensor métrico, n -Forma de Volume.

Tensor Kronecker. A aplicação

$$\hat{\delta} : V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{\delta}(\eta, \mathbf{v}) := \eta(\mathbf{v}) \quad (177)$$

é bilinear e por isso um tensor do tipo $(1, 1)$, o chamado *tensor Kronecker*. Suas componentes com respeito a *qualquer* base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ são dadas por $\hat{\delta}_j^i \equiv \hat{\delta}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}_j) = \mathbf{a}^i(\mathbf{a}_j) = \delta_j^i$. Então, suas componentes (com respeito a qualquer base) são exatamente os símbolos de Kronecker:

$$\hat{\delta}_i^j = \delta_i^j \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (178)$$

Tensor Métrico. Lembramos que nosso V é um espaço euclidiano, com um produto escalar $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Esta aplicação é um tensor do tipo $(0, 2)$:

Definição 8 O *tensor métrico* $g \in T_2^0(V)$ é o tensor

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (179)$$

□

Pelo Corolário 8.5, temos $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j} g_{ij} u^i v^j$, onde $g_{ij} = g(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)$. A base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ é ortonormal (uma BON) se, e somente se, $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Lembramos que o espaço euclidiano V pode ser identificado com seu espaço dual V^* por meio do produto escalar via $\mathbf{v} \mapsto \eta_{\mathbf{v}}$, ver eq. (166). Usando a fórmula (156), temos

$$\eta_{\mathbf{v}} = \sum_i \eta_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}_i) \mathbf{a}^i = \sum_i (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i) \mathbf{a}^i. \quad (180)$$

A aplicação inversa é $\eta \mapsto \mathbf{v}_{\eta} :=$ o único vetor tal que

$$\eta(\mathbf{w}) = \mathbf{v}_{\eta} \cdot \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{w} \in V.$$

Com esta identificação, o produto escalar pode ser estendido para o espaço dual V^* , a saber pela definição

$$\eta \cdot \mu := \mathbf{v}_{\eta} \cdot \mathbf{v}_{\mu} \equiv \eta(\mathbf{v}_{\mu}) = \mu(\mathbf{v}_{\eta}) \quad (181)$$

para $\eta, \mu \in V^*$. Isto define uma aplicação bilinear de $V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, um tensor do tipo $(2, 0)$ que nós vamos denotar com o símbolo $\hat{g} \in T_0^2(V)$.

Proposição 8.6 A matriz de componentes (contravariantes) de \hat{g} coincide com o inverso da matriz de componentes (covariantes) de g :

$$(\hat{g}^{ij}) = (g_{ij})^{-1}, \quad \text{ou seja,} \quad \sum_{j=1}^n \hat{g}^{ij} g_{jk} = \delta^i_k. \quad (182)$$

Demonstração. Temos

$$\sum_{j=1}^n \hat{g}^{ij} g_{jk} = \sum_j (\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j) (\mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_k) = \mathbf{a}^i \cdot \sum_j (\mathbf{a}_k \cdot \mathbf{a}_j) \mathbf{a}^j = \mathbf{a}^i \cdot \eta_{\mathbf{a}_k} = \mathbf{a}^i(\mathbf{a}_k) = \delta^i_k. \quad (183)$$

Na terceira equação nós usamos a eq. (180), e na quarta equação usamos que $\mu \cdot \eta_{\mathbf{v}} = \mu(\mathbf{v})$, ver eq. (181). \square

É costume identificar o vetor \mathbf{v} e o covetor correspondente, $\eta_{\mathbf{v}}$, e escrever

$$v_i := (\eta_{\mathbf{v}})_i,$$

considerando v_i e v^i como componentes contra- ou covariantes, respectivamente, de um só objeto. Consequentemente, para um covetor $\eta \in V^*$ as componentes

$$\eta^i := (\mathbf{v}_\eta)^i$$

são consideradas como componentes contravariantes de η . Também, as componentes \hat{g}^{ij} são consideradas como componentes covariantes do tensor g :

$$g^{ij} := \hat{g}^{ij} \equiv \hat{g}(\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^j).$$

Lema 8.7 Temos $\mathbf{v}_\eta = \sum_{i,j} \eta_j g^{ji} \mathbf{a}_i$ e $\eta_{\mathbf{v}} = \sum_{i,j} v^j g_{ji} \mathbf{a}^i$, ou seja,

$$v_i = \sum_j v^j g_{ji}, \quad \eta^i = \sum_j \eta_j g^{ji}. \quad (184)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} v_i &\equiv (\eta_{\mathbf{v}})_i = \eta_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}_i) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_i = \sum_j v^j \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{a}_i = \sum_j v^j g_{ji}. \\ \eta^i &\equiv (\mathbf{v}_\eta)^i = \mathbf{v}_\eta(\mathbf{a}^i) = \eta \cdot \mathbf{a}^i = \sum_j \eta_j \mathbf{a}^j \cdot \mathbf{a}^i = \sum_j \eta_j g^{ji}. \end{aligned}$$

\square

Vale observar que o Corolário implica que o produto escalar pode ser escrito como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_i u^i v_i = \sum_i u_i v^i.$$

Determinante como tensor: A n -forma de volume. Como a determinante é uma aplicação n -linear de $V \times \dots \times V$ nós números reais, ela é um tensor do tipo $(0, n)$, que nós vamos denotar por $\Omega \in T_n^0(V)$ (o “elemento de volume”, ou a “ n -forma de volume”):

$$\Omega(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) := \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n). \quad (185)$$

Para determinar as componentes deste tensor com respeito a uma base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$, precisamos os símbolos de Levi-Civita:

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} := \begin{cases} 0, & \text{se } \{i_1, \dots, i_n\} \neq \{1, \dots, n\}, \\ 1, & \text{se } (1, \dots, n) \mapsto (i_1, \dots, i_n) \text{ é uma permutação par,} \\ -1, & \text{se } (1, \dots, n) \mapsto (i_1, \dots, i_n) \text{ é uma permutação impar.} \end{cases} \quad (186)$$

Aviso! Em contraste com os símbolos de Kronecker δ_j^i , os símbolos de Levi-Civita *não* são as componentes de um tensor! Definimos também $|g|$ pela determinante (positiva!) da matriz (g_{ij}) , onde $g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$,

$$|g| := \det(g_{ij}). \quad (187)$$

Pelo Teorema 1.10, $|g|^{1/2}$ é o volume do paralelepípedo gerado por $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Observe que a determinante $|g|$ *não* é um escalar (ela depende da base)! Temos o

Lema 8.8 *As componentes de Ω com respeito a uma base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ com orientação positiva são dadas por*

$$\Omega_{i_1 \dots i_n} = |g|^{1/2} \varepsilon_{i_1 \dots i_n}. \quad (188)$$

(Observe que nem a determinante $|g|$ é um escalar, nem os símbolos de Levi-Civita são as componentes de um tensor — só produto define um tensor, Ω .)

Demonstração. Sabemos pela eq. (175) que $\Omega_{i_1 \dots i_n} = \det(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_n})$. Se alguns índices coincidem, ou seja se o conjunto $\{i_1, \dots, i_n\} \neq \{1, \dots, n\}$, a determinante se anula pela antissimetria. Se todos índices são diferentes, ou seja se $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$, então o módulo $|\det(\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_n})|$ coincide com $|g|^{1/2}$ pelo Teorema 1.10. O sinal afirmado segue da antissimetria da determinante. \square

Em três dimensões, o produto vetorial de dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ é relacionado com a forma Ω , a saber, suas componentes *covariantes* são dados por

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i = \sum_{j,k} \Omega_{ijk} u^j v^k. \quad (189)$$

Demonstração.

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i w^i = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \Omega_{ijk} u^j v^k w^i. \quad \square$$

8.1.3 Mudança de Base.

Obviamente, as componentes dos tensores dependem da base. Vamos ver agora como eles se transformam sob uma mudança da base $\{\mathbf{a}_i, i = 1, \dots, n\}$ para uma nova base $\{\bar{\mathbf{a}}_i, i = 1, \dots, n\}$. Cada $\bar{\mathbf{a}}_i$ é uma certa combinação linear dos \mathbf{a}_j ,

$$\bar{\mathbf{a}}_i = \sum_{j=1}^n A_j^i \mathbf{a}_j, \quad (190)$$

e a matriz A_j^i caracteriza a mudança de base $\{\mathbf{a}_i\} \rightarrow \{\bar{\mathbf{a}}_i\}$. Como primeiro passo, vamos determinar o comportamento da base dual sob esta mudança. Temos

$$\delta_j^i = \bar{\mathbf{a}}^i(\bar{\mathbf{a}}_j) = \bar{\mathbf{a}}^i \left(\sum_{k=1}^n A_j^k \mathbf{a}_k \right) = \sum_{k=1}^n A_j^k \bar{\mathbf{a}}^i(\mathbf{a}_k).$$

Lendo esta equação como $\delta_j^i = \sum_k A_j^k B_k^i$, inversão da matriz A dá $B_j^i = \sum_k (A^{-1})_j^k \delta_k^i \equiv (A^{-1})_j^i$, ou seja, $\bar{\mathbf{a}}^i(\mathbf{a}_j) = (A^{-1})_j^i$. Substituindo isto na expansão (156) do covetor $\bar{\mathbf{a}}^i$ com respeito à base dual $\{\mathbf{a}^j\}$, a saber $\bar{\mathbf{a}}^i = \sum_j \bar{\mathbf{a}}^i(\mathbf{a}_j) \mathbf{a}^j$, isto dá

$$\bar{\mathbf{a}}^i = \sum_{j=1}^n (A^{-1})_j^i \mathbf{a}^j. \quad (191)$$

Pela eq. (154), as componentes v^i de um vetor $\mathbf{v} = \sum_i v^i \mathbf{a}_i$ com respeito à base $\{\mathbf{a}_i\}$ são dadas por $v^i = \mathbf{a}^i(\mathbf{v})$. A eq. (191) implica então que as suas componentes \bar{v}^i com respeito à nova base $\{\bar{\mathbf{a}}_i\}$ são dadas por $\bar{v}^i = \bar{\mathbf{a}}^i(\mathbf{v}) = \sum_k (A^{-1})_k^i \mathbf{a}^k(\mathbf{v}) = \sum_k (A^{-1})_k^i v^k$, ou seja,

$$\bar{v}^i = \sum_k (A^{-1})_k^i v^k. \quad (192)$$

Da mesma maneira, para um covetor η vale, pela eq. (156), $\bar{\eta}_j = \eta(\bar{\mathbf{a}}_j) = \sum_k A_j^k \eta(\mathbf{a}_k) = \sum_k A_j^k \eta_l$:

$$\bar{\eta}_j = \sum_k A_j^k \eta_l. \quad (193)$$

Mais geralmente, o Corolário 8.5 sobre as componentes de tensores implica, com o mesmo raciocínio:

Proposição 8.9 *Seja T um tensor in $T_s^r(V)$ com componentes $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ e $\bar{T}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ com respeito á base $\{\mathbf{a}_i\}$ e $\{\bar{\mathbf{a}}_i\}$, respetivamente (conforme eq.s (174), (175)). Então vale*

$$\bar{T}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ l_1, \dots, l_s}} (A^{-1})_{k_1}^{i_1} \dots (A^{-1})_{k_r}^{i_r} A_{j_1}^{l_1} \dots A_{j_s}^{l_s} T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}. \quad (194)$$

8.1.4 Operações com Tensores.

Vamos finalmente introduzir alguns operações com tensores.

Produto tensorial ou “externo”. A definição do espaço $T_s^r(V)$ implica que este espaço pode ser identificado com

$$T_s^r(V) = T_{s_1}^{r_1}(V) \otimes T_{s_2}^{r_2}(V), \quad \text{se } r = r_1 + r_2, \quad s = s_1 + s_2,$$

a saber com a seguinte identificação: Para $T_1 \in T_{s_1}^{r_1}(V)$ e $T_2 \in T_{s_2}^{r_2}(V)$, definimos $T_1 \otimes T_2 \in T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$ por

$$(T_1 \otimes T_2)(\eta_1, \dots, \eta_{r_1+r_2}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{s_1+s_2}) := T_1(\eta_1, \dots, \eta_{r_1}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{s_1}) T_2(\eta_{r_1+1}, \dots, \eta_{r_1+r_2}, \mathbf{v}_{s_1+1}, \dots, \mathbf{v}_{s_1+s_2}). \quad (195)$$

Equivalentemente:

$$(\mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{r_1} \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_{s_1}) \otimes (\mathbf{v}'_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}'_{r_2} \otimes \eta'_1 \otimes \dots \otimes \eta'_{s_2}) := \mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{r_1} \otimes \mathbf{v}'_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}'_{r_2} \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_{s_1} \otimes \eta'_1 \otimes \dots \otimes \eta'_{s_2}. \quad (196)$$

Produto escalar ou “interno”. Da mesma maneira como o produto escalar foi estendido de V para V^* , pode ser estendido para todos espaços tensoriais $T_s^r(V)$ pela seguinte definição. Para $\mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_r \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_s$ e $\mathbf{v}'_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}'_r \otimes \eta'_1 \otimes \dots \otimes \eta'_s$ em $T_s^r(V)$, definimos

$$g(\mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_r \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_s, \mathbf{v}'_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}'_r \otimes \eta'_1 \otimes \dots \otimes \eta'_s) := g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1) \dots g(\mathbf{v}_r, \mathbf{v}'_r) \hat{g}(\eta_1, \eta'_1) \dots \hat{g}(\eta_s, \eta'_s). \quad (197)$$

Esta definição estende por bilinearidade para o espaço $T_s^r(V)$ inteiro. Em componentes, temos para $T, S \in T_s^r(V)$:

$$g(T, S) = \sum_{i_1, \dots, i_r, k_1, \dots, k_r, j_1, \dots, j_s, l_1, \dots, l_s} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} g_{i_1 k_1} \dots g_{i_r k_r} g^{j_1 l_1} \dots g^{j_s l_s} S_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}.$$

Contração. A aplicação

$$\mathbf{v}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_r \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_s \mapsto \eta_1(\mathbf{v}_1) \quad \mathbf{v}_2 \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_r \otimes \eta_2 \otimes \dots \otimes \eta_s$$

define uma aplicação $T_s^r(V) \rightarrow T_{s-1}^{r-1}(V)$. Ela joga um tensor $T \in T_s^r(V)$ com componentes $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ para o tensor $\hat{T} \in T_{s-1}^{r-1}(V)$ com componentes

$$\hat{T}_{j_2 \dots j_s}^{i_2 \dots i_r} = \sum_k T_{k j_2 \dots j_s}^{k i_2 \dots i_r},$$

e é chamada, por isso, de *contração* dos primeiros índices. O mesmo pode ser feito com qualquer outro par de índices.

Mudança do tipo. A aplicação $V \equiv T_0^1(V) \rightarrow T_1^0(V) \equiv V^*$, $\mathbf{v} \mapsto \eta_{\mathbf{v}}$, induz uma aplicação $T_s^r(V) \rightarrow T_{s+1}^{r-1}(V)$, a saber

$$\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_r \otimes \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_s \mapsto \mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_{r-1} \otimes \eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_s \otimes \eta_{\mathbf{v}_r}.$$

Ela joga um tensor $T \in T_s^r(V)$ com componentes $T_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_r}$ para o tensor $\hat{T} \in T_{s+1}^{r-1}(V)$ cujas componentes são

$$\hat{T}_{j_1 \cdots j_{s+1}}^{i_1 \cdots i_{r-1}} = \sum_k T_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_{r-1} k} g_{kj_{s+1}}.$$

O mesmo pode ser feito com qualquer outro par de índices. Esta operação chama-se *abaixar* um index. Similarmente, a aplicação inversa $V^* \rightarrow V$, $\eta \mapsto \mathbf{v}_\eta$, induz uma aplicação $T_s^r(V) \rightarrow T_{s-1}^{r+1}(V)$ (chamado de *levantar* um index), resultando numa fórmula do tipo

$$\hat{T}_{j_1 \cdots j_{s-1}}^{i_1 \cdots i_{r+1}} = \sum_k T_{j_1 \cdots j_{s-1} k}^{i_1 \cdots i_r} g^{kj_{r+1}}.$$

Como exemplos, temos

Lema 8.10 *i) A mudança do tipo do tensor métrico, $g \in T_2^0(V)$ para $\hat{g} \in T_1^1(V)$ resulta no tensor Kronecker:*

$$g_i^j = \delta_i^j. \quad (198)$$

ii) A n -forma do volume, Ω , satisfaz:

$$\Omega^{i_1 \cdots i_n} = |g|^{-1/2} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n}, \quad (199)$$

$$\text{Em 3 dimensões: } \sum_k \Omega_{ijk} \Omega^{klm} = \delta_i^l \delta_j^m - \delta_i^m \delta_j^l, \quad (200)$$

$$\sum_k \Omega_{ijk} \Omega^k_{lm} = g_{il} g_{jm} - g_{im} g_{jl}. \quad (201)$$

Demonstração. Eq. (198) segue da eq. (182). Para mostrar (199), calculamos

$$\Omega^{1 \cdots n} = \sum_{i_1, \dots, i_n} \Omega_{i_1 \cdots i_n} g^{1i_1} \cdots g^{ni_n} = |g|^{1/2} \sum_{i_1, \dots, i_n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} g^{1i_1} \cdots g^{ni_n} = |g|^{-1/2},$$

pois a soma $\sum \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} g^{1i_1} \cdots g^{ni_n}$ é nada mais do que a determinante da matriz (g^{ij}) , ou seja, $|g|^{-1}$. Junto com a anti-simetria de $\Omega^{i_1 \cdots i_n}$, isto implica a eq. (199). A eq. (200) vamos mostrar numa base ortonormal. (Como os dois lados são componentes de tensores, isto è suficiente pelo Corolário 8.5.) Neste caso, $|g| = 1$ e nós temos que mostrar

$$\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}.$$

Isso é mostrado por exemplo em [3, p. 683]. Baixando os índices l e m na eq. (200) resulta na eq. (201). \square

Endomorfismos. O espaço de tensores do tipo (1,1) pode ser identificado com o espaço dos endomorfismos lineares de V , denotado por $\text{End}(V)$,

$$T_1^1(V) \cong \text{End}(V),$$

como seguinte. Se $A \in \text{End}(V)$, define um tensor $T \in T_1^1(V)$ por

$$T(\eta, \mathbf{v}) = \eta(A\mathbf{v})$$

para $\eta \in V^*$, $\mathbf{v} \in V$. Inversamente: Dado $T \in T_1^1(V)$, define $A\mathbf{v} :=$ o único vetor tal que vale a equação acima para todos $\eta \in V^*$. Isto define uma aplicação linear $A \in \text{End}(V)$. Verifique-se que

a aplicação A correspondente a $T := \mathbf{u} \otimes \eta$ é $A\mathbf{v} = \eta(\mathbf{v})\mathbf{u}$. Na notação de Dirac, isto corresponde literalmente à equação

$$(|\mathbf{u}\rangle\langle\eta|)|\mathbf{v}\rangle := \langle\eta|\mathbf{v}\rangle|\mathbf{u}\rangle.$$

Dado uma base $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ de V , define-se uma matriz A_i^j correspondente a A por

$$A\mathbf{a}_i =: \sum_j A_i^j \mathbf{a}_j.$$

Verifique-se facilmente que os A_i^j coincidem com os componentes T_i^j do tensor $T \in T_1^1(V)$ correspondente a $A \in \text{End}(V)$. Seguindo o costume, vamos identificar A e T , e A_i^j e T_i^j .

Por exemplo, o endomorfismo que corresponde ao tensor Kronecker δ , ver eq. (178), é a identidade \mathbb{I} em V , pois $\delta(\eta, \mathbf{v}) \equiv \eta(\mathbf{v}) = \eta(\mathbb{I}\mathbf{v})$. Os seus componentes δ_i^j coincidem com a matriz correspondente a \mathbb{I} (para qualquer base).

Definição 9 i) O *adjunto* de um endomorfismo A , em símbolos A^* , é o endomorfismo unicamente caracterizado pelo fato que para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vale

$$\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = (A^*\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}. \quad (202)$$

O endomorfismo é chamado de *simétrico* (ou auto-adjunto) se $A = A^*$, ou seja, se para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vale $\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v} = (A\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$.

ii) O *traço* de um endomorfismo A , em símbolos $\text{Tr } A$, é definido por

$$\text{Tr } A := \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \cdot A\mathbf{a}_i \quad (203)$$

onde $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ é uma base *ortonormal*. □

(Exercício: Verifique que a definição (203) não depende da base!)

Lema 8.11 i) Um endomorfismo A é simétrico se, e somente se, a matriz de seus componentes covariantes, i.e. os componentes de $\hat{A} \in T_2^0(V)$ correspondente a $A \in T_1^1(V) \cong \text{End}(V)$, é simétrica.²¹

$$A_{ij} = A_{ji}.$$

ii) O traço de um endomorfismo A coincide com o escalar que surge do tensor em $T_1^1(V)$ pela contração de índices, $\text{Tr } A = \sum_i A_i^i$.

(Exercício: Mostre que o traço é independente da base.)

8.2 Análise Tensorial.

No seguinte, seja E o espaço afim físico, e V o espaço de vetores deslocamento correspondente.

Definição 10 Um *campo tensorial* do tipo (r, s) é uma aplicação $E \rightarrow T_s^r(V)$. O espaço de tais campos é denotado por $\mathcal{T}_s^r(E)$. □

Então $T \in \mathcal{T}_s^r(E)$ aplica um ponto p para um elemento $T_p \in T_s^r(V)$, que por sua vez é uma aplicação de $V^* \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$. É costume escrever o argumento p como index, para deixar espaço para os argumentos em $V^* \times \dots \times V$:

$$T_p : (\eta, \dots, \mathbf{v}) \mapsto T_p(\eta, \dots, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}.$$

Em particular, $\mathcal{T}_0^1(E)$ são os campos vetoriais, e $\mathcal{T}_0^0(E)$ são os campos escalares, ou seja, as funções. Os elementos de $\mathcal{T}_1^0(E)$, ou seja as aplicações $E \rightarrow V^*$, são chamados de *formas diferenciais* de grau 1. Um exemplo típico é construído como seguinte. Lembramos que a derivada parcial $D_{\mathbf{v}}f(p)$ de uma função é linear em \mathbf{v} . Em outras palavras, a aplicação $\mathbf{v} \mapsto D_{\mathbf{v}}f(p)$ é em $T_1^0(V)$.

²¹Isto é equivalente com $A_i^j = A_j^i$ só se a base for ortonormal!

Definição 11 Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. O *diferencial* de f , em símbolos df , é a forma diferencial de grau 1 definido por

$$df \in \mathcal{T}_1^0(E), \quad (df)_p(\mathbf{v}) := (D_{\mathbf{v}}f)(p).$$

□

Verifique-se facilmente que vale a regra de produto

$$d(fg) = (df)g + f(dg).$$

Os diferenciais du^i das coordenadas $u^i(p)$ são de interesse particular:

Lema 8.12 *Seja $\{u^1, \dots, u^n\}$ um sistema de coordenadas, e $\{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p), i = 1, \dots, n\}$ a base de V correspondente. Então o conjunto dos covetores $\{(du^i)_p, i = 1, \dots, n\}$ é a base dual, i.e.*

$$(du^i)_p(\mathbf{v}) = v^i, \quad \text{ou seja,} \quad (du^i)_p\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}(p)\right) = \delta_j^i. \quad (204)$$

Consequentemente, cada forma diferencial de grau 1 é da forma

$$\underline{A}_p = \sum_i A_i(p) (du^i)_p, \quad \text{com} \quad A_i(p) = \underline{A}_p(\partial_i \mathbf{r}(p)),$$

ver eq. (156) da Proposição 8.1. As coeficientes $A_i(p)$ são chamadas de *componentes* (covariantes) de \underline{A} com respeito ao sistema de coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$. Em particular, temos pela eq. (117):

$$(df)_p = \sum_i \frac{\partial f}{\partial u^i}(p) (du^i)_p. \quad (205)$$

Pelo Corolário 8.5, temos:

Corolário 8.13 *Cada $T \in \mathcal{T}_s^r(E)$ é da forma*

$$T_p = \sum_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s=1}^n T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p) \partial_{i_1} \mathbf{r}(p) \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \mathbf{r}(p) \otimes (du^{j_1})_p \otimes \dots \otimes (du^{j_s})_p, \quad (206)$$

onde

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p) = T_p(du^{i_1}, \dots, du^{i_r}, \partial_{j_1} \mathbf{r}, \dots, \partial_{j_s} \mathbf{r}). \quad (207)$$

Proposição 8.14 *Seja $T \in \mathcal{T}_s^r(E)$ um campo tensorial, sejam $\{u^1, \dots, u^n\}$ e $\{\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^n\}$ dois sistemas de coordenadas, e sejam $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p)$ e $\bar{T}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p)$ as componentes correspondentes de $T_p \in \mathcal{T}_s^r(V)$. Então vale*

$$\bar{T}_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p) = \sum_{k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s} T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}(p) \frac{\partial \bar{u}^{i_1}}{\partial u^{k_1}}(p) \dots \frac{\partial \bar{u}^{i_r}}{\partial u^{k_r}}(p) \frac{\partial u^{l_1}}{\partial \bar{u}^{j_1}}(p) \dots \frac{\partial u^{l_s}}{\partial \bar{u}^{j_s}}(p). \quad (208)$$

Demonstração. Pela eq. (79), $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{u}^j} = \sum_i A_j^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}$, com $A_j^i = \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^j}(p)$. Lembrando que a matriz inversa é dada por $(A^{-1})_j^i = \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^j}(p)$, a afirmação segue agora da Prop. 8.9.

(Mais diretamente: Usar a mencionada eq. (79) e o fato que vale

$$(d\bar{u}^i)_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^k}(p) (du^k)_p$$

pela regra de cadeia, e imitar a prova da Prop. 8.9.)

□

Tensor Métrico. O tensor métrico $g \in T_2^0(V)$ define um campo tensorial $g \in \mathcal{T}_2^0(E)$ (nos usamos o mesmo símbolo):

$$g_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.$$

Observe que este tensor é *constante* no sentido que em cada ponto $p \in E$ o valor $g_p \in T_2^0(V)$ é a mesma aplicação $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Em contraste, as suas componentes com respeito a um sistema de coordenadas *não* são constantes em geral:

$$g_{ij}(p) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}(p),$$

qual expressão é independente de p para todos índices i, j somente se o sistema de coordenadas é linear (e.g., Cartesiano). Se o sistema de coordenadas é *ortogonal*, temos

$$g_{ij}(p) = h_i(p)^2 \delta_{ij}.$$

A n -Forma de Volume. A determinante define um campo tensorial constante $\Omega \in \mathcal{T}_n^0(E)$:

$$\Omega_p(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) := \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n). \quad (209)$$

(Usamos o mesmo símbolo como na eq. (185).) O Lema 8.8 implica:

Lema 8.15 *As componentes de Ω_p com respeito a um sistema de coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$ com orientação positiva são dadas por*

$$\Omega_{i_1 \dots i_n}(p) = |g|^{1/2}(p) \varepsilon_{i_1 \dots i_n}. \quad (210)$$

Aquí, $|g|(p)$ é o módulo da determinante da matriz $(\partial_i \mathbf{r}(p) \cdot \partial_j \mathbf{r}(p))$.

Derivada Covariante. A derivada covariante (ou direcional) de campos vetoriais definido em eq. (114) pode ser generalizada para campos tensoriais de qualquer tipo: Para $T \in \mathcal{T}_s^r(E)$ e $\mathbf{v} \in V$, definimos

$$(D_{\mathbf{v}}T)_p := \frac{d}{dt} T_{p+t\mathbf{v}}|_{t=0}. \quad (211)$$

Observe que a derivada com respeito ao vetor $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p)$ coincide com a derivada parcial $\frac{\partial}{\partial u^i}$,

$$(D_{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p)}T)_p = \left(\frac{\partial}{\partial u^i}T\right)_p.$$

As componentes de $D_{\mathbf{v}}T$ são determinadas pelas derivadas parciais das componentes de T e os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k , definidos por

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j}\right)(p) =: \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(p) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k}(p). \quad (212)$$

A definição implica o seguinte

Lema 8.16 *As derivadas das formas diferenciais básicas du^j são dadas por*

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i} du^j\right)_p = - \sum_k \Gamma_{ik}^j(p) (du^k)_p. \quad (213)$$

Demonstração. Como $du^j(\partial_k \mathbf{r}) = \delta^j_k = \text{cte.}$, temos pela regra de produto (aplicável!)

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_i(du^j(\partial_k \mathbf{r})) = (\partial_i du^j)(\partial_k \mathbf{r}) + du^j(\partial_i \partial_k \mathbf{r}) = (\partial_i du^j)(\partial_k \mathbf{r}) + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l du^l(\partial_i \mathbf{r}) \\ &= (\partial_i du^j)(\partial_k \mathbf{r}) + \Gamma_{ik}^j. \end{aligned}$$

Então, $\partial_i du^j \equiv \sum_k (\partial_i du^j)(\partial_k \mathbf{r}) du^k = - \sum_k \Gamma_{ik}^j du^k$, como afirmado. \square

Com a definição (212) e o Lema 8.16 podemos calcular a derivada covariante de qualquer tensor. Por exemplo, para campos vetoriais e formas diferenciais temos

Lema 8.17 *Seja $\mathbf{A} = \sum_i A^i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \in \mathcal{T}_0^1(E)$ e $\underline{A} = \sum_i A_i du^i \in \mathcal{T}_1^0(E)$. As derivadas covariantes respectivas são dadas por*

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i} \mathbf{A}\right)(p) = \sum_k \left\{ \frac{\partial A^k}{\partial u^i}(p) + \sum_j A^j(p) \Gamma_{ij}^k(p) \right\} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k}(p), \quad (214)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i} \underline{A}\right)_p = \sum_k \left\{ \frac{\partial A_k}{\partial u^i}(p) - \sum_j A_j(p) \Gamma_{ik}^j(p) \right\} (du^k)_p. \quad (215)$$

Para calcular os símbolos de Christoffel num sistema arbitrário de coordenadas usaremos a chamada fórmula de Koszul:

Lema 8.18 (Fórmula de Koszul.) *Para quaisquer sistema de coordenadas u^1, \dots, u^n vale:*

$$2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} \right) + \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} \right) - \frac{\partial}{\partial u^k} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \right) \quad (216)$$

para $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstração. Aplicando a regra de produto

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^i \partial u^k}$$

aos três termos ao lado direito da eq. (216), todos termos se cancelam menos os termos do lado esquerdo. \square

Vamos calcular os símbolos de Christoffel para um sistema arbitrário de coordenadas:

Proposição 8.19 *Sejam g_{ij} as componentes do tensor métrico g com respeito a um sistema de coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$ (não necessariamente ortogonal), e $\partial_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$. Vale*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{lk} \left\{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \right\}. \quad (217)$$

Demonstração. Pela fórmula de Koszul (216) temos

$$2 \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{kl} = \partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}.$$

Multiplicando com g^{kr} , somando sobre k , e substituindo $k \mapsto l$ e $r \mapsto k$, dá eq. (217). \square

Proposição 8.20 *O rotacional e a divergência de um campo vetorial \mathbf{A} e o gradiente e o Laplace de uma função f são dados, em componentes, por*

$$\text{rot } \mathbf{A} = \sum_{i,j,k} \Omega^{ijk} (\partial_i A_j) \partial_k \mathbf{r} \quad (218)$$

$$= |g|^{-1/2} \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} (\partial_i A_j) \partial_k \mathbf{r}, \quad (219)$$

$$\text{div } \mathbf{A} = |g|^{-1/2} \sum_i \partial_i (|g|^{1/2} A^i), \quad (220)$$

$$\text{grad } f = \sum_{i,j} (\partial_j f) g^{ji} \partial_i \mathbf{r}, \quad (221)$$

$$\Delta f = |g|^{-1/2} \sum_{i,j} \partial_i (|g|^{1/2} (\partial_j f) g^{ji}). \quad (222)$$

Demonstração. Por definição do rotacional, temos

$$\begin{aligned} (\partial_i \mathbf{r} \times \partial_j \mathbf{r}) \cdot \text{rot } \mathbf{A} &= \partial_i \mathbf{A} \cdot \partial_j \mathbf{r} - \partial_j \mathbf{A} \cdot \partial_i \mathbf{r} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \sum_{l,m} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \partial_l A_m \\ &= \sum_k \Omega_{ijk} \sum_{l,m} \Omega^{klm} \partial_l A_m. \end{aligned}$$

Na última linha temos usado a Eq. (200). Por outro lado, temos

$$(\partial_i \mathbf{r} \times \partial_j \mathbf{r}) \cdot \text{rot } \mathbf{A} = \det(\partial_i \mathbf{r}, \partial_j \mathbf{r}, \text{rot } \mathbf{A}) = \Omega_{ijk} (\text{rot } \mathbf{A})^k.$$

Comparação dá $\sum_{l,m} \Omega^{klm} \partial_l A_m = (\text{rot } \mathbf{A})^k$, que mostra a Eq. (218) da Proposição. Na eq. (219), usamos a eq. (199). A eq. (220) é comprovado da mesma maneira como na Proposição 7.4, lembrando que o volume v do paralelepípedo gerado pelos $\partial_i \mathbf{r}$ agora é dado por $|g|^{1/2}$. Pela definição, $(\text{grad } f)(p)$ é o vetor equivalente (pela métrica) com o covetor $(df)_p$. Então, pelo Lema 8.7, temos

$$(\text{grad } f)^i = \sum_j (df)_j g^{ji} = \sum_j (\partial_j f) g^{ji}.$$

(Usamos a eq. (205) na última equação.) Isto dá eq. (221). As equações (220) e (221) implicam a eq. (222). \square

8.3 Aplicação: Tensores de Deformação e Tensão, Lei de Hooke.

Tensor de Deformação. Imaginamos um corpo sólido que sofre uma deformação contínua. Antes da deformação ele ocupa uma certa região, G , no espaço, e depois uma região G' . A deformação pode ser matematicamente descrita por uma aplicação bijetiva contínua, ϕ , de G sobre G' . A aplicação ϕ consiste de uma parte que descreve um movimento isométrico (translação + rotação) e uma parte que descreve a própria deformação. A descrição somente da última parte, para pequenos deformações, é efetuada pelo tensor de deformação.

Consideramos dois pontos vizinhos p e q em G (antes da deformação), e as imagens deles em G' sob da deformação, $p' := \phi(p)$ e $q' := \phi(q)$. Sejam $\mathbf{v} := \vec{pq}$ e $\mathbf{v}' := \vec{p'q'}$ os vetores relativos (deslocamento) entre os vizinhos antes e depois da deformação, respectivamente. O que nós interesse é a mudança do vetor relativo

$$\mathbf{d} := \mathbf{v}' - \mathbf{v}.$$

(Este vetor descreve a mudança da posição do ponto q relativo a seu vizinho p sob a deformação, e já é independente de qualquer parte translatória contido em ϕ . Vamos ver logo como jogar fora a parte rotacional também.) Dado p , este vetor depende obviamente só de \mathbf{v} , e é zero se $\mathbf{v} = 0$. Então deve existir uma aplicação linear $L_p : V \rightarrow V$ tal que vale

$$\mathbf{d} = L_p \mathbf{v} + O(\|\mathbf{v}\|^2). \quad (223)$$

Vamos determinar esta aplicação L_p . Para estes fins, chamamos o vetor deslocamento entre um ponto o e sua imagem $\phi(o)$ (para qualquer $o \in E$) de $\boldsymbol{\rho}(o)$. (Para a nossa linearização estes vetores nem precisam ser pequeno.) Isto define um campo vetorial $\boldsymbol{\rho}$:

$$o + \boldsymbol{\rho}(o) := \phi(o), \quad o \in G.$$

Claramente temos (ver Figura 3) $\mathbf{v}' - \mathbf{v} = \boldsymbol{\rho}(p + \mathbf{v}) - \boldsymbol{\rho}(p)$, então temos

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\rho}(p + \mathbf{v}) - \boldsymbol{\rho}(p) = (D_{\mathbf{v}} \boldsymbol{\rho})(p) + O(\|\mathbf{v}\|^2).$$

Então, como a derivada covariante é linear em \mathbf{v} , a Eq. (223) realmente vale, com

$$L_p \mathbf{v} = (D_{\mathbf{v}} \boldsymbol{\rho})(p).$$

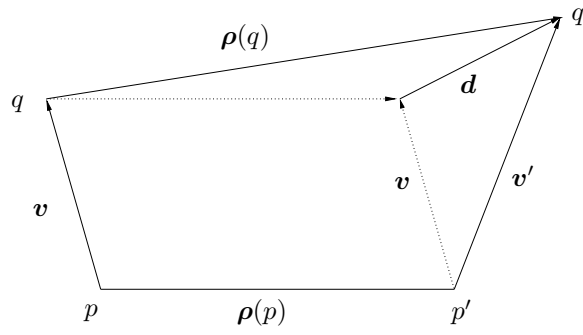


Figura 3: Deformação.

Igual qualquer aplicação linear em V , L_p possui uma única decomposição $L_p = S_p + R_p$ numa parte simétrica (ver Definição 9), $S_p = (S_p)^*$, e uma parte anti-simétrica, $R_p = -(R_p)^*$: A saber,

$$S_p := \frac{1}{2} (L_p + (L_p)^*),$$

e $R_p := \frac{1}{2} (L_p - (L_p)^*)$. Como veremos logo, a parte simétrica S_p descreve a deformação, e a parte anti-simétrica R_p descreve a rotação de L_p . Por isso, a parte simétrica S_p é chamado de *tensor de deformação*.

A saber, S_p possui, como aplicação linear simétrica, uma BON de auto-vetores $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_3\}$: $S_p \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i$. Então S_p descreve uma expansão ($\lambda_i > 0$) ou compressão ($\lambda_i < 0$) nas direções correspondentes, e por conseguinte não exhibe rotação. Para interpretar melhor o tensor S_p , observamos que para pequenas deformações espera-se $\|\mathbf{d}\| \ll \|\mathbf{v}\|$, o que implica $\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v} \approx \|\mathbf{v}'\| \|\mathbf{v}\|$. Usando isto, temos

$$\frac{\mathbf{v} \cdot S_p \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} \equiv \frac{\mathbf{v} \cdot L_p \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{v}\|^2} \approx \frac{\|\mathbf{v}'\| - \|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}, \quad (224)$$

ou seja, $\mathbf{v} \cdot S_p \mathbf{v} \|\mathbf{v}\|^{-2}$ descreve a *deformação relativa* na direção \mathbf{v} .

Por outro lado, a matriz dos componentes de R_p com respeito a uma BON apropriada $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_3\}$ tem a forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mas isto é o gerador infinitesimal de uma rotação em torno do eixo \mathbf{e}_3 , então R_p descreve uma rotação infinitesimal. Um outro ponto de vista chega à mesma conclusão: A saber, para $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vale

$$\mathbf{u} \cdot R_p \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot L_p \mathbf{v} - L_p \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot D_{\mathbf{v}} \boldsymbol{\rho}(p) - D_{\mathbf{u}} \boldsymbol{\rho}(p) \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \text{rot } \boldsymbol{\rho}(p) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}).$$

Então, $\mathbf{u} \cdot R_p \mathbf{v}$ é proporcional á componente do rotacional do campo $\boldsymbol{\rho}$ na direção $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

Obviamente, o tensor S corresponde a uma *dilatação homogênea* se ele é um múltiplo da unidade, $S_p = c(p) \mathbb{I}$. Pouco menos óbvio é que ele corresponde a um *cisalhamento puro* se ele tem traço zero, $\text{Tr } S_p = 0$ (ver Definição 9). O traço do tensor de deformação S_p descreve a variação relativa (infinitesimal) de volume feito pela deformação. Para ver isto, consideramos um paralelepípedo, gerado por 3 vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ com vértice em p . A imagem sob a deformação ϕ é aproximadamente²² o paralelepípedo gerado por $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ e \mathbf{v}'_3 com vértice em p' (com a mesma notação $p', \mathbf{v}'_i = (\mathbb{I} + L_p) \mathbf{v}_i$ como antes). Seja V e V' o volume do paralelepípedo antes e depois da deformação, respectivamente. Temos

$$V' = \det((\mathbb{I} + L_p) \mathbf{v}_1, (\mathbb{I} + L_p) \mathbf{v}_2, (\mathbb{I} + L_p) \mathbf{v}_3) = \det(\mathbb{I} + L_p) \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \det(\mathbb{I} + L_p) V.$$

Usando o fato que para pequenas deformações vale

$$\det(\mathbb{I} + L_p) \approx 1 + \text{Tr } L_p \equiv 1 + \text{Tr } S_p,$$

²²Realmente, os vértices da imagem são sim os pontos $p' + \mathbf{v}_i$, mas o paralelepípedo é deformado.

temos então

$$\frac{V' - V}{V} \approx \text{Tr } S_p, \quad (225)$$

onde a aproximação é bom para pequenos lados $\|\mathbf{v}_i\|$ do paralelepípedo e para pequenos autovalores de S_p . Em particular, $\text{Tr } S_p = 0$ significa que a deformação S_p deixa invariante o volume (próximo de p), então é um cisalhamento puro.

Em geral, S_p possui (igual qualquer aplicação linear) uma única decomposição $S_p = D_p + C_p$ onde D_p é um múltiplo da unidade e C_p tem traço zero. A saber,

$$\begin{aligned} S_p &= \underbrace{\frac{1}{3}(\text{Tr } S_p)\mathbb{I}}_{D_p} + \underbrace{S_p - \frac{1}{3}(\text{Tr } S_p)\mathbb{I}}_{C_p} \\ &= D_p + C_p. \end{aligned} \quad (226)$$

Isto significa que cada deformação infinitesimal pode ser decomposto (únicamente) em uma dilatação homogênea e um cisalhamento puro.

Tensor de Tensão. Consideramos a deformação de um corpo sólido *elástico*. Para deformá-lo são precisos forços que agem na superfície do corpo (supondo ausência de ação à distância). Considerando agora uma região arbitrária G no interior do corpo, perguntamos o seguinte: Quais seriam as forças necessárias no contorno de G para manter a dada deformação dentro de G se cortássemos o complemento de G fora? A força $\Delta \mathbf{F}(p)$ necessária num elemento $\Delta \sigma(p) = \mathbf{n} \Delta \sigma$ da superfície depende certamente da área $\Delta \sigma$, mas também da orientação $\mathbf{n}(p)$ do elemento da superfície. No limite de pequenas áreas $\Delta \sigma \rightsquigarrow d\sigma$, esta dependência da força deve ser linear. Então temos

$$d\mathbf{F}(p) = \tau_p d\sigma(p), \quad (227)$$

onde τ_p é uma aplicação linear de V em V , o chamado *tensor de tensão*.

Mostra-se que, se o corpo está no equilíbrio com torque externo zero, este tensor é simétrico, $\tau_p = (\tau_p)^*$ [3, p. 670]. Como mencionado acima, τ_p possui uma única decomposição

$$\tau_p = \mathbf{p}(p)\mathbb{I} + \hat{\tau}_p,$$

onde $\hat{\tau}_p$ tem traço zero, a saber: $\mathbf{p}(p) \equiv \frac{1}{3}\text{Tr } \tau_p$, e $\hat{\tau}_p \equiv \tau_p - \mathbf{p}(p)\mathbb{I}$. Fisicamente, $\mathbf{p}(p)$ é a *pressão* no ponto p , e $\hat{\tau}_p$ descreve uma *tensão de cisalhamento*.

Lei de Hooke generalizada. Num corpo sólido elástico, a relação entre tensão e deformação pode ser aproximada, para pequenas deformações, por uma relação linear. Por isso, existe para cada ponto p no corpo uma aplicação linear $\Lambda_p : T_1^1(V) \rightarrow T_1^1(V)$ tal que vale

$$\tau_p = \Lambda_p S_p. \quad (228)$$

A aplicação inversa Λ_p^{-1} descreve a deformação do corpo provocada por uma dada tensão. Λ_p depende somente do *material* do corpo.

Em analogia com o isomorfismo $\text{End}(V) \cong T_1^1(V)$, tal aplicação Λ_p pode ser identificado com um tensor em $T_2^2(V)$: o chamado *tensor de elasticidade*. Tal tensor em 3 dimensões tem, em geral, $3^4 = 81$ componentes. O fato que τ_p e S_p são simétricos, e o produto escalar também é, implicam as simetrias dos componentes covariantes deste tensor

$$\Lambda_{kl ij} = \Lambda_{ij kl} = \Lambda_{jikl} = \Lambda_{ijlk},$$

que reduzem o número de componentes independentes a 21. 3 graus de liberdade podem ser fixos pela escolha de um sistema de coordenadas. Os outros 18 números correspondem a 18 constantes do material. No caso de um sólido policristalino ou isotrópico, o número se reduz a 2, os chamados módulos de compressão e de rigidez.

Vamos discutir em mais detalhe este caso de um sólido *isotrópico*, i.e., que não possui nenhuma direção discriminada (em contraste a um cristal). Neste caso, se nós submetemos todos instrumentos em nosso laboratório a uma rotação R (deixando o sólido fixo), as propriedades do sólido, e então o tensor de elasticidade, não mudam. Matematicamente, isto significa que Λ_p commuta

com a representação $T \mapsto T_R$ do grupo das rotações em $T_1^1(V)$ dada por $(\mathbf{v} \otimes \eta)_R := R\mathbf{v} \otimes (R^{-1})^t \eta$, onde R^T é a aplicação “transposta”, definida por $(R^T \eta)(\mathbf{v}) := \eta(R\mathbf{v})$. Em coordenadas:

$$(T_R)^j_i = R^k_i (R^{-1})^j_l T^l_k.$$

O espaço $T_1^1(V)$ contém 3 subespaços invariantes sob esta representação, a saber os escalares (os múltiplos da unidade), os tensores anti-simétricos e os tensores simétricos com traço zero, correspondente as representações irredutíveis do grupo de rotações com spin 0, 1 e 2, respectivamente. (No caso presente, tratamos só com tensores simétricos, então o subespaço dos tensores anti-simétricos é ausente.)

Como o nosso tensor de elasticidade Λ_p comuta com a representação, o Lema de Schur implica que ele age em cada uma destes dois subespaços (escalares e tensores simétricos com traço zero) como um certo múltiplo da unidade. Por isso, existem duas constantes, K e μ , tal que $\Lambda_p(S_p) = 3K S_p$ se $S_p = c\mathbb{I}$, e $\Lambda_p(S_p) = 2\mu S_p$ se S_p tem traço zero. Usando a decomposição (226), a Eq. $\tau_p = \Lambda_p S_p$ então se reduz à equação

$$\begin{aligned} \tau_p &= 3K D_p + 2\mu C_p \\ &= K (\text{Tr } S_p) \mathbb{I} + 2\mu (S_p - \frac{1}{3} (\text{Tr } S_p) \mathbb{I}). \end{aligned} \quad (229)$$

Isto é o Lei de Hooke generalizado, e as constantes K e μ são chamadas de *módulo de compressão* e *de rigidez*, respectivamente. Esta equação pode facilmente ser invertido, $S_p = \Lambda_p^{-1} \tau_p$, a saber

$$S_p = \frac{1}{9K} (\text{Tr } \tau_p) \mathbb{I} + \frac{1}{2\mu} (\tau_p - \frac{1}{3} (\text{Tr } \tau_p) \mathbb{I}). \quad (230)$$

Isto dá a deformação causada por uma tensão.

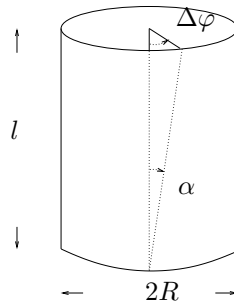


Figura 4: $\Delta\varphi \approx \alpha/R = kl$.

Exemplo: Torção de um Bastão. Um bastão (cilindro do raio R e comprimento $l \gg R$) é torto por um ângulo α como na Figura 4. O homeomorfismo ϕ correspondente é dado (em coordenadas cilíndricas r, φ, z) por

$$\phi : \mathbf{r}(r, \varphi, z) \mapsto \mathbf{r}(r, \varphi + kz, z).$$

(Aqui, $k \approx \alpha/R$, ver Figura 4.)

A Divergência e Rotacional na Geometria Diferencial.

A.1 Caracterização da Divergência na Geometria Diferencial.

Na geometria diferencial, é costume caracterizar a divergência de um campo vetorial \mathbf{A} de uma outra maneira, a saber: O campo \mathbf{A} gera um “fluxo” (inglês: *flow*, a distinguir do fluxo através uma superfície!) em E , ver eq. (233) abaixo. Heuristicamente, $\text{div } \mathbf{A}$ é a taxa de variação relativa do volume $\text{Vol}(G)$ de uma região G sob o fluxo gerado por \mathbf{A} , no limite $\text{Vol}(G) \rightarrow 0$. Como veremos

abaixo, ver Eq.s (238) e (240), para um (pequeno) paralelepípedo $\Pi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ a taxa de variação do volume sob o fluxo é aproximadamente dada por

$$\sum_{i=1}^n \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, D_{\mathbf{v}_i} \mathbf{A}(p), \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n). \quad (231)$$

Então, a divergência de \mathbf{A} no ponto p deveria ser esta expressão dividida pelo volume do paralelepípedo, $\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Realmente, a expressão (231) é n -linear e totalmente antissimétrica em $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, e o Lema 1.6 afirma que ela é proporcional à determinante $\det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Então, o quociente é independente do paralelepípedo e depende só do campo \mathbf{A} , e a seguinte definição faz sentido:

Definição 12 (Alternativa) A *divergência* de um campo vetorial \mathbf{A} é o campo escalar caracterizado pelo fato que vale

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})(p) \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \sum_{i=1}^n \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, D_{\mathbf{v}_i} \mathbf{A}(p), \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n) \quad (232)$$

para quaisquer n vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$. □

Mostramos primeiro que isto coincide com a Definição (120) da divergência. Substituindo $\mathbf{v}_i := \partial_i \mathbf{r}$ na Eq. (232), e considerando $D_{\partial_i \mathbf{r}} \mathbf{A} = \partial_i \mathbf{A}$ e $\det(\partial_1 \mathbf{r}, \dots, \partial_n \mathbf{r}) = v$, a Eq. (232) implica

$$\begin{aligned} v \operatorname{div} \mathbf{A} &= \det(\partial_1 \mathbf{A}, \partial_2 \mathbf{r}, \partial_3 \mathbf{r}, \dots) + \det(\partial_1 \mathbf{r}, \partial_2 \mathbf{A}, \partial_3 \mathbf{r}, \dots) + \dots \\ &= \partial_1 \det(\mathbf{A}, \partial_2 \mathbf{r}, \partial_3 \mathbf{r}, \dots) + \partial_2 \det(\partial_1 \mathbf{r}, \mathbf{A}, \partial_3 \mathbf{r}, \dots) + \dots \\ &= \partial_1(A^1 v) + \partial_2(A^2 v) + \partial_3(A^3 v), \end{aligned}$$

com os mesmos argumentos como na prova da Proposição 7.4. Isso mostra que a divergência, como definida aqui, também satisfaz a Eq. (122) e então coincide com a divergência como definida antes.

Vamos fazer a mencionada interpretação da Definição 12 em termos do fluxo de \mathbf{A} precisa. Primeiro, alguns definições: A *curva integral* de um campo \mathbf{A} através um ponto p , em símbolos $t \mapsto \psi_t(p)$, é a curva caracterizada pela seguinte EDO e condição inicial:

$$\frac{d}{dt} \psi_t(p) = \mathbf{A}(\psi_t(p)), \quad \psi_0(p) = p. \quad (233)$$

A família de transformações $p \mapsto \psi_t(p)$ de E definida dessa maneira é chamada a *fluxo* gerado pelo campo \mathbf{A} (inglês: *flow of A*). Para $t \rightarrow 0$ vale

$$\psi_t(p) = p + t\mathbf{A}(p) + O(t^2). \quad (234)$$

Esta noção de “fluxo” é relacionado com o “fluxo de \mathbf{A} através uma superfície” S como seguinte. Seja S^+ a parte de S que consiste dos pontos p onde o campo $\mathbf{A}(p)$ aponta para o mesmo lado de S como o vetor normal $\mathbf{n}(p)$ da superfície, em fórmulas $\mathbf{A}(p) \cdot \mathbf{n}(p) > 0$ para $p \in S^+$. Seja ψ_t o fluxo gerado pelo campo \mathbf{A} como definido na Eq. (233). Para $t > 0$ consideramos o conjunto G_t^+ de pontos p cuja curva integral $s \mapsto \psi_s(p)$ atravessa a parte S^+ da superfície (na direção \mathbf{n} por hipótese) no intervalo de “tempo” $[0, t]$, em fórmulas

$$G_t^+ := \bigcup_{s \in [0, t]} \psi_s(S^+) \equiv \{\psi_s(p) \mid s \in [0, t], p \in S^+\}. \quad (235)$$

Da mesma maneira definimos o conjunto G_t^- de pontos p cuja curva integral $s \mapsto \psi_s(p)$ atravessa a superfície no sentido *oposto* ao vetor normal \mathbf{n} . Então, o fluxo de \mathbf{A} através S é

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{d}{dt} \{\operatorname{Vol}(G_t^+) - \operatorname{Vol}(G_t^-)\} \Big|_{t=0}. \quad (236)$$

Consideramos agora uma região G e a imagem $G_t := \psi_t(G)$ dela sob o fluxo ψ_t . Sejam $\{u^1, \dots, u^n\}$ coordenadas na região G , com orientação positiva, e com valores num certo cubo Q_0 . Na região G_t definimos coordenadas u_t^i por $u_t^i(\psi_t(p)) := u^i(p)$. Se então um ponto $p \in G$

tem valores de coordenadas $(u^1, \dots, u^n) \in Q_0$, o ponto $\psi_t(p)$ tem os mesmos valores em termos das coordenadas u^i . Nesta situação, denotamos o vetor posição do ponto p por $\mathbf{r}(u^1, \dots, u^n)$ e o vetor posição do ponto $\psi_t(p)$ por $\mathbf{r}_t(u^1, \dots, u^n)$. Conforme eq. (234), temos $\mathbf{r}_t(u^1, \dots, u^n) = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^n) + t\mathbf{A}(u^1, \dots, u^n) + O(t^2)$, então

$$\partial_i \mathbf{r}_t(u^1, \dots, u^n) = \partial_i \mathbf{r}(u^1, \dots, u^n) + t\partial_i \mathbf{A}(\mathbf{r}(u^1, \dots, u^n)) + O(t^2). \quad (237)$$

Consideramos agora o paralelepípedo gerado por $\partial_1 \mathbf{r}_t, \dots, \partial_n \mathbf{r}_t$, com vértice em $\psi_t(p)$. Pela Eq. (237), a taxa da variação do volume (orientado) deste paralelepípedo é dada por

$$\frac{d}{dt} \det(\partial_1 \mathbf{r}_t, \dots, \partial_n \mathbf{r}_t)|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \det(\partial_1 \mathbf{r}, \dots, \partial_i \mathbf{A}, \dots, \partial_n \mathbf{r}). \quad (238)$$

Mas $\partial_i \mathbf{A}$ coincide com a derivada covariante de \mathbf{A} na direção $\partial_i \mathbf{r}$, então pela definição da divergência, temos

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(p) \cdot \det(\partial_1 \mathbf{r}, \dots, \partial_n \mathbf{r}) = \frac{d}{dt} \det(\partial_1 \mathbf{r}_t, \dots, \partial_n \mathbf{r}_t)|_{t=0}. \quad (239)$$

Para interpretar esta equação geometricamente, consideramos o pequeno “cubo” G_ε com vértice $\mathbf{r}(u^1, \dots, u^n)$, ver Fig. 3:

$$G_\varepsilon := \{\mathbf{r}(u^1 + s^1, \dots, u^n + s^n) \mid s^i \in [0, \varepsilon]\}.$$

Como $\mathbf{r}(u^1, \dots, u^i + \varepsilon, \dots, u^n) = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^n) + \varepsilon \partial_i \mathbf{r} + O(\varepsilon^2)$, o paralelepípedo gerado por $\varepsilon \partial_1 \mathbf{r}, \dots, \varepsilon \partial_n \mathbf{r}$ é uma versão linearizada de G_ε , e o volume dele coincide com o volume de G_ε módulo termos da ordem ε^{n+1} . Similarmente, o paralelepípedo gerado por $\varepsilon \partial_1 \mathbf{r}_t, \dots, \varepsilon \partial_n \mathbf{r}_t$ é uma versão linearizada da imagem, $\psi_t(G_\varepsilon)$. A Eq. (239) então afirma que $\operatorname{div} \mathbf{A}(p)$ é a taxa de variação relativa do volume da imagem de um pequeno cubo G_ε sob o fluxo gerado por \mathbf{A} , no limite $\varepsilon \rightarrow 0$.²³

A Eq. (239) também implica a seguinte variante não-infinitesimal desta afirmação:

Proposição A.1 *Seja \mathbf{A} um campo vetorial com fluxo ψ_t , G uma região em E , e $G_t := \psi_t(G)$ a imagem de G sob o fluxo ψ_t , com volume orientado $\operatorname{Vol}(G_t)$. Então vale*

$$\int_G \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \frac{d}{dt} \operatorname{Vol}(G_t)|_{t=0}. \quad (241)$$

²³ A Eq. (239) pode ser escrito numa maneira sem coordenadas, usando a noção da derivada de Lie da geometria diferencial. Em detalhes: Seja $\Pi \equiv \Pi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ o paralelepípedo gerado por n vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ começando no ponto p . Para t fixo, define-se o chamado diferencial do difeomorfismo ψ_t pela aplicação linear $V \rightarrow V$ dado por

$$T_p \psi_t(\mathbf{v}) := \frac{d}{ds} \psi_t(p + s\mathbf{v})|_{s=0}.$$

(Esta aplicação joga nosso vetor $\partial_i \mathbf{r}$ em $\partial_i \mathbf{r}_t$.) $T_p \psi_t(\mathbf{v})$ é o vetor deslocamento entre as imagens dos pontos vizinhos p e $p + \mathbf{v}$, módulo termos da ordem $\|\mathbf{v}\|^2$. Por isso,

$$\Pi_t := \Pi(T_p \psi_t(\mathbf{v}_1), \dots, T_p \psi_t(\mathbf{v}_n))$$

é uma versão linearizada ou infinitesimal (para pequenas \mathbf{v}_i) da imagem de Π sob o fluxo, $\psi_t(\Pi)$. Agora calcula-se $\frac{d}{dt} T_p \psi_t(\mathbf{v})|_{t=0} = D_{\mathbf{v}} \mathbf{A}(p)$ (generalizando a Eq. (237)), e a regra de produto dá

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Vol} \Pi_t|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, D_{\mathbf{v}_i} \mathbf{A}(p), \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_n). \quad (240)$$

A Definição (232) então é equivalente com a equação

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \cdot \operatorname{Vol} \Pi = \frac{d}{dt} \operatorname{Vol} \Pi_t|_{t=0}.$$

Vale mencionar que na geometria diferencial, $\frac{d}{dt} \operatorname{Vol} \Pi_t|_{t=0}$ é chamada a derivada de Lie com respeito a \mathbf{A} da determinante (ou seja, do elemento de volume), $(L_{\mathbf{A}} \det)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

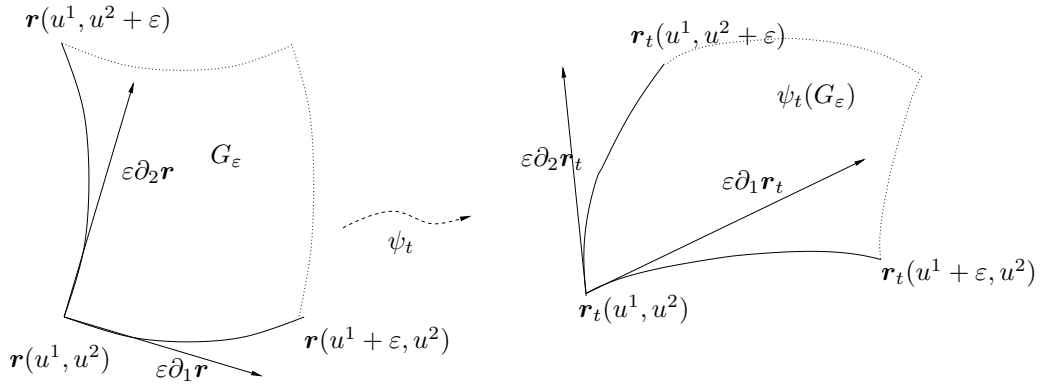


Figura 5: Interpretação da divergência.

Demonstração. Nós usamos coordenadas $\{u^1, \dots, u^n\}$ com vetores posição $\mathbf{r}(u^1, \dots, u^n) \in G$ e $\mathbf{r}_t(u^1, \dots, u^n) \in G_t$ como acima. Conforme eq. (239), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Vol} G_t \Big|_{t=0} &= \int \int \int_{Q_0} \frac{d}{dt} \det(\partial_1 \mathbf{r}_t, \dots, \partial_n \mathbf{r}_t) \Big|_{t=0} du^1 \dots du^n \\ &= \int \int \int_{Q_0} \text{div } \mathbf{A}(u^1, \dots, u^n) \det(\partial_1 \mathbf{r}, \dots, \partial_n \mathbf{r}) du^1 \dots du^n \\ &= \int_G \text{div } \mathbf{A} dV. \end{aligned}$$

□

A Proposição A.1 implica diretamente o Teorema de Gauss, porque a taxa de variação $\frac{d}{dt} \text{Vol}(G_t) \Big|_{t=0}$ coincide com o fluxo de \mathbf{A} através do contorno de G . Para ver isto, lembramos dos conjuntos G_t^\pm de pontos p cuja curva integral $t \mapsto \psi_t(p)$ atravessa a superfície na direção do vetor normal \mathbf{n} (G_t^+) ou oposto (G_t^-), respectivamente, ver Eq. (235). A diferença dos volumes deles é o volume dos pontos que entram menos o volume dos pontos que saem durante o intervalo $[0, t]$, e coincide com a diferença dos volumes de G_t e G :

$$\text{Vol}(G_t^+) - \text{Vol}(G_t^-) = \text{Vol}(G_t) - \text{Vol}(G).$$

Mas a derivada com respeito a t , em $t = 0$, do lado esquerdo é pela Eq. (236) justamente o fluxo de \mathbf{A} através ∂G . Então temos

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \frac{d}{dt} \text{Vol}(G_t) \Big|_{t=0}. \quad (242)$$

Por outro lado, graças à Proposição A.1 o lado direito coincide com $\int_G \text{div } \mathbf{A} dV$. Isto mostra o teorema de Gauss se nós definimos a divergência como na Definição 12. Aquele teorema, por sua vez, implica que a divergência satisfaz a Eq. (120). (Isto mostra de novo que nossas duas definições da divergência, através Eq. (120) e (232), respectivamente, são equivalentes.)

A.2 Caracterização do Rotacional na Geometria Diferencial.

O rotacional de um campo vetorial é, na forma presente, só definido no espaço afim de dimensão $n = 3$.

Definição 13 O *rotacional* de um campo vetorial \mathbf{A} no ponto p , em símbolos $(\text{rot } \mathbf{A})(p)$, é o único vetor tal que para qualquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ vale

$$(\text{rot } \mathbf{A})(p) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = D_{\mathbf{u}} \mathbf{A}(p) \cdot \mathbf{v} - D_{\mathbf{v}} \mathbf{A}(p) \cdot \mathbf{u}. \quad (243)$$

(Observe que o lado direito da eq. (243) é bilinear e anti-simétrico em \mathbf{u} e \mathbf{v} , então linear em $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. O Lema 1.9 então afirma a existência e unicidade de um vetor $(\text{rot } \mathbf{A})(p)$ satisfazendo a eq. (243).)

□

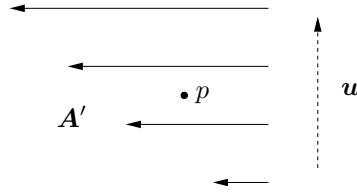


Figura 6: Interpretação de $\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$. A figura mostra o plano \mathbf{n}^\perp e a projeção \mathbf{A}' do campo \mathbf{A} a este plano. $\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ é a taxa de variação da norma de \mathbf{A}' em direção $\mathbf{u} \perp \mathbf{A}'$, neste exemplo positivo.

Vamos interpretar o rotacional de \mathbf{A} no ponto p , ver Fig. 4. Dado um vetor unitário \mathbf{n} (não colinear com $\mathbf{A}(p)$), consideramos o plano \mathbf{n}^\perp e a projeção do campo \mathbf{A} neste plano, $\mathbf{A}'(q) := P_{\mathbf{n}^\perp}(\mathbf{A}(q))$ para q numa vizinhança de p no plano $p + \mathbf{n}^\perp$. Seja \mathbf{u} o (único) vetor unitário no plano \mathbf{n}^\perp ortogonal a $\mathbf{A}'(p)$ tal que $\mathbf{u}, \mathbf{A}'(p), \mathbf{n}$ são positivamente orientados. Nesta situação a Definição 13 implica²⁴

$$\text{rot } \mathbf{A}(p) \cdot \mathbf{n} = D_{\mathbf{u}} \|\mathbf{A}'(p)\|, \quad (244)$$

ou seja: A componente de $\text{rot } \mathbf{A}(p)$ na direção \mathbf{n} é a taxa de variação da norma de $\mathbf{A}'(p)$ em direção \mathbf{u} ortogonal a $\mathbf{A}'(p)$, ver Fig. 4.

Vamos calcular o rotacional em coordenadas. Seja $\{u^1, \dots, u^n\}$ um sistema de coordenadas ortogonais.

Proposição A.2 *O rotacional de um campo vetorial \mathbf{A} , conforme Definição 13, é dado em coordenadas pela eq. (130).*

Demonstração. Seja $\mathbf{e}_i = \partial_i \mathbf{r} / h_i$. Substituindo $\eta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ por $D_{\mathbf{u}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - D_{\mathbf{v}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$ no Lema 1.9, a Eq. (45) implica

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} = & (D_{\mathbf{e}_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_3 - D_{\mathbf{e}_3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_1 + \\ & (D_{\mathbf{e}_3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1 - D_{\mathbf{e}_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_2 + (D_{\mathbf{e}_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_2 - D_{\mathbf{e}_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Tomando em conta que $D_{\partial_i \mathbf{r}} \mathbf{A} = \partial_i \mathbf{A}$, e $\partial_i \mathbf{A} \cdot \partial_j \mathbf{r} - \partial_j \mathbf{A} \cdot \partial_i \mathbf{r} = \partial_i (\mathbf{A} \cdot \partial_j \mathbf{r}) - \partial_j (\mathbf{A} \cdot \partial_i \mathbf{r})$, isso dá Eq. (130). \square

Vamos agora demonstrar o Teorema 7.10 de Stokes, usando a Definição 13 do rotacional.

Demonstração do Teorema de Stokes. Seja, no primeiro passo, a superfície $S : (s, t) \mapsto \mathbf{r}(s, t)$ a imagem de um retângulo K , i.e., $(s, t) \in K = [0, s_0] \times [0, t_0]$. O contorno ∂S de S então consiste de 4 curvas suaves $C_k : \tau \mapsto \mathbf{r}_k(\tau)$, $k = 1, \dots, 4$, com a seguinte parametrização:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{r}_1(\tau) := \mathbf{r}(\tau, 0), & \tau \in [0, s_0], & \dot{\mathbf{r}}_1(\tau) = \partial_s \mathbf{r}(\tau, 0) \\ \mathbf{r}_2(\tau) := \mathbf{r}(s_0, \tau), & \tau \in [0, t_0], & \dot{\mathbf{r}}_2(\tau) = \partial_s \mathbf{r}(s_0, \tau) \\ \mathbf{r}_3(\tau) := \mathbf{r}(\tau, t_0), & \tau \in [0, s_0], & \dot{\mathbf{r}}_3(\tau) = \partial_s \mathbf{r}(\tau, t_0) \\ \mathbf{r}_4(\tau) := \mathbf{r}(0, \tau), & \tau \in [0, t_0], & \dot{\mathbf{r}}_4(\tau) = \partial_s \mathbf{r}(0, \tau). \end{array}$$

As curvas C_1, C_2 tem a orientação de ∂S , e as curvas C_3, C_4 tem a orientação oposta a ∂S . Nos escrevemos $\mathbf{A}(s, t) := \mathbf{A}(\mathbf{r}(s, t))$, e tomamos em consideração que

$$D_{\partial_s} \mathbf{A}(\mathbf{r}(s, t)) = \partial_s \mathbf{A}(s, t), \quad D_{\partial_t} \mathbf{A}(\mathbf{r}(s, t)) = \partial_t \mathbf{A}(s, t).$$

²⁴Definindo $\mathbf{v} := \mathbf{A}'(p) / \|\mathbf{A}'(p)\|$, temos $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ e $\mathbf{A}(p) \cdot \mathbf{v} \equiv \mathbf{A}'(p) \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{A}'(p)\|$, pois $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + c\mathbf{n}$. Usando $D_{\mathbf{v}} \mathbf{A}(p) \cdot \mathbf{u} = D_{\mathbf{v}} (\mathbf{A}(p) \cdot \mathbf{u}) = 0$, a definição (243) implica Eq. (244).

Temos então

$$\begin{aligned}
\int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} &= \int_0^{t_0} \int_0^{s_0} \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}(s, t)) \cdot (\partial_s \mathbf{r}(s, t) \times \partial_t \mathbf{r}(s, t)) ds dt \\
&= \int_0^{t_0} \int_0^{s_0} \left\{ (\partial_s \mathbf{A} \cdot \partial_t \mathbf{r})(s, t) - (\partial_t \mathbf{A} \cdot \partial_s \mathbf{r})(s, t) \right\} ds dt \\
&= \int_0^{t_0} \int_0^{s_0} \left\{ \partial_s (\mathbf{A} \cdot \partial_t \mathbf{r})(s, t) - \partial_t (\mathbf{A} \cdot \partial_s \mathbf{r})(s, t) \right\} ds dt \\
&= \int_0^{t_0} \left\{ (\mathbf{A} \cdot \partial_t \mathbf{r})(s_0, t) - (\mathbf{A} \cdot \partial_t \mathbf{r})(0, t) \right\} dt - \int_0^{s_0} \left\{ (\mathbf{A} \cdot \partial_s \mathbf{r})(s, t_0) - (\mathbf{A} \cdot \partial_s \mathbf{r})(s, 0) \right\} ds \\
&= \int_0^{t_0} \left\{ \mathbf{A}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}_2(t) - \mathbf{A}(\mathbf{r}_4(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}_4(t) \right\} dt - \int_0^{s_0} \left\{ \mathbf{A}(\mathbf{r}_3(s)) \cdot \dot{\mathbf{r}}_3(s) - \mathbf{A}(\mathbf{r}_1(s)) \cdot \dot{\mathbf{r}}_1(s) \right\} ds \\
&= \int_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_4} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.
\end{aligned}$$

Na terceira equação usamos a regra do produto $\partial_s (\mathbf{A} \cdot \partial_t \mathbf{r}) = \partial_s \mathbf{A} \cdot \partial_t \mathbf{r} + (\mathbf{A} \cdot \partial_s \partial_t \mathbf{r})$, e o Teorema de Schwartz, $\partial_s \partial_t \mathbf{r} = \partial_t \partial_s \mathbf{r}$. Na quarta equação usamos o Teorema Fundamental do Cálculo. Num segundo passo consideramos uma superfície S arbitrária. Se nós dividirmos ela em duas superfícies parciais S_1 e S_2 , com contornos C_1 e C_2 , vale por um lado

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} + \int_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

porque a integral é aditiva. Por outro lado vale também

$$\oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r},$$

porque a divisa entre S_1 e S_2 é sendo percorrida duas vezes, com sentidos opostos, tal que os termos correspondentes se cancelam. Por isso, se a Eq. (134) vale para S_1 e S_2 ela também vale para S . Iterando a subdivisão, podemos escrever S como união (possivelmente infinita) de “retângulos” S_i da forma considerada no primeiro passo. Isto mostra a Eq. (134) para S arbitrária. \square

O teorema de Stokes implica que o rotacional pode ser caracterizado pela eq. (128). Então as duas definições do rotacional, (128) e (243), são equivalentes.

B Exercícios.

Ex. 1. (Espaço Vetorial.) Seja $C([0, 1])$ o conjunto de funções contínuas definidas no intervalo $[0, 1]$, com valores reais.

- Dado $f, g \in C([0, 1])$ e $s \in \mathbb{R}$, define uma função $f + g$ e uma função $s \cdot f$.
- Mostre que, com sua definição da soma e da multiplicação por os escalares, o conjunto $C([0, 1])$ constitui um espaço vetorial.

Ex. 2. (Espaço vetorial.) Lembra que o seguinte axioma foi parte da nossa definição de um espaço vetorial V :

“Para cada vetor $\mathbf{u} \in V$ existe um vetor $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.”

Usando os outros axiomas, mostre que este vetor é dado por $-\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u}$.

Ex. 3. (Dependência linear.) Mostre que, no \mathbb{R}^2 , os dois vetores $\{(1, 0), (1, 1)\}$ são linearmente independentes, mas os três vetores $\{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$ são linearmente dependentes.

Ex. 4. (Projeção ortogonal.) Seja V um espaço euclidiano de dimensão n , e $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$ (onde $r \leq n$) um sistema ortonormal. Seja U a varredura deles (as combinações lineares), e seja P_U o projetor sobre U . Então, para qualquer dado $\mathbf{v} \in V$, $P_U \mathbf{v}$ é o vetor definido por

$$P_U \mathbf{v} = \sum_{i=1}^r (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v}) \mathbf{e}_i.$$

Mostre que o vetor $\mathbf{v} - P_U \mathbf{v}$ é ortogonal ao subespaço U .

(**Dica:** Mostre primeiro que este vetor é ortogonal a $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$.)

Ex. 5. (Produto vetorial no \mathbb{R}^3 .) Seja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ em \mathbb{R}^3 . Mostre que o produto vetorial $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ é dado por

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Ex. 6. (Coordenadas polares no plano.) Supomos que no plano temos discriminado uma origem o e uma BON de vetores deslocamento $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$, com coordenadas x, y , correspondentes: Recordamos que as coordenadas x, y de um ponto p são definidas por

$$\mathbf{r}(p) = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y, \quad (245)$$

onde $\mathbf{r}(p)$ é o vetor-posição do ponto p . Definimos agora coordenadas polares (r, φ) implicitamente pelas equações

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (246)$$

com as restrições $r > 0$ e $0 \leq \varphi < 2\pi$.

(a) Escreva os vetores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$ (derivadas parciais) como combinação linear dos vetores $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$, e determine a norma deles.

Dica: Vale a pena substituir x e y na eq. (245) em termos de r e φ .

(b) Mostre que, para qualquer dado (r, φ) , os vetores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$ e $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$ são uma base de \mathbb{R}^2 .

Ex. 7. (Área e volume.)

(a) Os vértices de um triângulo plano têm coordenadas Cartesianas $(2, 1, 5)$, $(5, 2, 8)$ e $(4, 8, 2)$. Calcular a área do triângulo, usando o produto vetorial. (**Dica:** Esta área é a metade da área do paralelogramo gerado por dois vetores convenientes.)

(b) Um paralelepípedo no plano tem vértices com coordenadas Cartesianas $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$ e $(0, 3, 1)$. (Os 3 outros vértices são fixados pela definição de um paralelepípedo.) Calcular o volume, usando a determinante de três vetores convenientes.

Ex. 8. (Coordenadas polares no plano.) Determinar as componentes Cartesianas, bem como a norma, dos vetores

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}(p), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(p) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}(p) - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(p)$$

para os seguintes pontos (em coordenadas Cartesianas, $p = (x, y)$):

(a) $p = (1, 0)$ e $p = (2, 0)$,

(b) $p = (0, 1)$ e $p = (0, 2)$,

(c) $p = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ e $p = \frac{2}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

Ex. 9. (Transformação de coordenadas no plano.) Seja \mathbf{A} um campo no plano dado (em coordenadas polares) por

$$\mathbf{A}(r, \varphi) := \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(r, \varphi).$$

Determine as componentes $A^x(x, y)$ e $A^y(x, y)$ de $\mathbf{A}(p)$ com respeito às coordenadas Cartesianas, usando a fórmula de transformação de componentes de vetores no Lema 3.4.

Ex. 10. (Coordenadas esféricas.)

(a) Para um ponto p arbitrário, calcule o vetor $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}(p) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(p)$. Para este fim, use a BON $\{\mathbf{e}_r(p), \mathbf{e}_\theta(p), \mathbf{e}_\varphi(p)\}$. (I.e., faz a decomposição dos vetores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}(p)$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(p)$ com respeito a esta base, e calcule o vetor $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}(p) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(p)$ em termos da mesma base.) Calcule também a norma deste vetor.

(b) Dito com o vetor $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}(p) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}(p)$. Considera em particular os pontos p com $\theta(p) = \frac{\pi}{2}$ (i.e., pontos no equador).

Ex. 11. (Coordenadas cilíndricas.) O movimento de um elétron num campo magnético seja a superposição de um movimento retilíneo uniforme na direção z com velocidade v_z , e um movimento circular uniforme no plano x - y com velocidade angular ω e raio R .

- Achar a parametrização $\varrho(t)$, $\varphi(t)$, $z(t)$ da curva em coordenadas cilíndricas.
- Determinar a velocidade $\dot{\mathbf{r}}(t)$ em termos da base $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}$.
- Determinar as normas $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|$, $\|\ddot{\mathbf{r}}(t)\|$ da velocidade.

Ex. 12. (Comprimento de curvas.) O movimento de um elétron num campo magnético uniforme é composto por um movimento uniforme linear na direção do campo com velocidade constante \mathbf{v}_0 , e um movimento uniforme circular no plano perpendicular a \mathbf{v}_0 , com frequência angular ω e raio R .

- Qual é o sistema de coordenadas melhor adaptado ao problema?
- Calcule o comprimento da curva percorrida pelo elétron depois uma período T (“período” refere ao movimento uniforme circular no plano).

Ex. 13. (Integral de curva no plano.) Seja \mathbf{A} o campo vetorial no plano dado por

$$\mathbf{A}(r, \varphi) := \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$$

(em coordenadas polares), e $\gamma : t \mapsto \mathbf{r}(t)$ uma curva fechada que faz uma volta em torno da origem (um laço). Calcular a integral de \mathbf{A} sobre a curva γ ! Comente sobre o resultado. (*Obs.:* Primeiro tem que achar uma parametrização de tal curva. Qual sistema de coordenadas?)

Ex. 14. (Área da hemisfera.) Calcular a área da hemisfera com raio R , escolhendo uma parametrização e usando a fórmula da aula para áreas.

Ex. 15. (Derivada direcional.) Calcular $(D_{\mathbf{v}}f)(p)$, onde f , \mathbf{v} e as coordenadas (u^1, u^2, u^3) de p são dados por

- $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^3 + z$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_y$, $(x, y, z) = (3, 1, 4)$;
- $f(r, \theta, \varphi) = \sin(\theta)r^{-2}$, $\mathbf{v} = 5\partial_r \mathbf{r} + 2\partial_\theta \mathbf{r} - \partial_\varphi \mathbf{r}$, $(r, \theta, \varphi) = (1, \pi/2, \pi/4)$;
- $f(x, y) = \exp(x)\cos(y)$, $\mathbf{v} = \mathbf{e}_x$, $(x, y) = (0, 0)$.

Ex. 16. (Integral de volume.) Seja G a região dos pontos com coordenada- z entre 0 e 1, $G = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$, e seja $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ a função dado por

$$f(x, y, z) := z \exp(-x^2 - y^2).$$

Calcular a integral de f sobre G , usando a fórmula da aula. Como primeiro passo, escolha coordenadas bem-adaptadas!

Ex. 17. (Integral de volume.) Um corpo tem a forma de um paralelepípedo com vértices $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(1, 4, 2)$ e $(1, 1, 2)$ (os outros 3 vértices são fixados pela definição de um paralelepípedo). Ele tem a densidade $\varrho(x, y, z) = x + 2y + z$. Calcular a massa do corpo. –

Dica: Um possível jeito é o seguinte: Escolhendo um vértice p_0 do paralelepípedo como origem, os três lados incidentes em p_0 definem uma base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ do \mathbb{R}^3 . Isto dá coordenadas u^i no paralelepípedo pela definição

$$p\vec{0}p =: \sum_{i=1}^3 u^i(p) \mathbf{a}_i.$$

(Quais valores têm estas coordenadas para pontos no interior do paralelepípedo – ou seja, com a notação da aula: qual é o domínio G_0 das coordenadas u^i ?) Escreva as coordenadas Cartesianas (x, y, z) usadas inicialmente, bem como a densidade ϱ , em termos das novas coordenadas (u^1, u^2, u^3) . (Cuidado! O origem escolhido inicialmente $\neq p_0$!) Determine $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}(p)$ e use a fórmula da aula sobre integrais de volume. *Nicht eindeutig!!*

Ex. 18. (Fluxo do campo elétrico.)

- (a) Seja
- S
- a esfera do raio
- R
- , com orientação tal que o vetor normal aponta para fora, e seja

$$\mathbf{E}(p) := \frac{kq}{\|\vec{op}\|^3} \vec{op}$$

o campo elétrico no ponto p gerado por uma carga puntiforme na origem o . Calcule o fluxo de \mathbf{E} sobre a superfície S . Comente sobre o resultado!

- (b)* Seja agora
- S
- uma deformação contínua da esfera, mais precisamente: uma superfície fechada que contem a origem
- o
- , e que tem a propriedade que cada raio começando em
- o
- passa por
- S
- exatamente uma vez. Determine uma parametrização para
- S
- , e calcule o fluxo de
- \mathbf{E}
- sobre
- S
- . Comente!

Dica: Escolha a parametrização analogamente com a esfera em termos de coordenadas esféricas, mas *sem* fixar $r(s, t) = R$!

Ex. 19. (Campos conservativos no plano.) No plano, seja C uma curva fechada que segue somente as linhas de r e de φ , e não contem o origem no interior. Então, ela consiste de 4 segmentos, a saber entre 4 pontos com coordenadas respectivas (r_1, φ_1) , (r_2, φ_1) , (r_2, φ_2) e (r_1, φ_2) , onde $0 < r_1 < r_2$ e $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < 2\pi$.

- (a) Achar uma parametrização da curva C .
 (b) Seja \mathbf{A} um campo vetorial da forma $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = f(r) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$ (em coordenadas polares). Calcule a integral de \mathbf{A} sobre a curva C do item (a). Mostre: Os integrais sobre todas curvas fechadas da mesma forma²⁵ como C são zero se e somente se $f(r) = cr^{-2}$ para uma constante c .
 (c)* Seja \mathbf{E} um campo vetorial da forma $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = f(r) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$. Mostre: Os integrais de \mathbf{E} sobre todas curvas fechadas da mesma forma como C são zero se e somente se f é da forma $f(\mathbf{r}) = \hat{f}(r)$.

Ex. 20. (Campo conservativo e gradiente no \mathbb{R}^2 .)

- (a) Seja
- \mathbf{A}
- o campo vetorial dado (em coordenadas polares) por
- $\mathbf{A}(r, \varphi) := \frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$
- . No domínio
- $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$
- o campo
- \mathbf{A}
- é conservativo [isso segue do exercício 5.1.(b)]. Então deve existir uma função
- ϕ
- t.q.

$$\mathbf{A} = \text{grad } \phi \quad \text{em } D. \quad (247)$$

Calcule este “potencial” ϕ , e faz o check que realmente vale eq. (247), usando a formula explicita do gradiente em coordenadas polares.

- (b) Fazer o mesmo com o campo $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = f(r) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$, que também é conservativo.
 (c) Visualizar os campos \mathbf{A} e \mathbf{E} dos itens (a) e (b), respectivamente, e as “superfícies” (neste caso bidimensional, as linhas) de nível dos potenciais ϕ correspondentes. Faz 2 comentários sobre a direção dos gradientes em relação a estas linhas de nível.

Ex. 21. (Gradientes.) Calcule os gradientes das seguintes funções, em termos de coordenadas indicadas²⁶ em parenteses:

- (a) $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^3 + z$ (Coordenadas Cartesianas),
 (b) $f(r, \theta, \varphi) = \sin(\theta) r^{-2}$ (Coordenadas esféricas),
 (c) $f(\varrho, \varphi, z) = \exp(-\varrho) \sin(\varphi) z^2$ (Coordenadas cilíndricas).

Ex. 22. (Superfície de nível.) Seja $f(\varrho, \varphi, z) := \varrho^2 - z$ (em coordenadas cilíndricas), e seja S a superfície de nível $f = 0$ desta função, i.e. o parabolóide

$$S := \{p : f(p) = 0\}.$$

- (a) Calcule o gradiente de f , em termos de coordenadas cilíndricas².
 (b) Achar uma parametrização de S , e calcule o vetor normal (unitário) $\mathbf{n}(p)$, $p \in S$.
 (c) Para qual lado (fora ou dentro) do parabolóide S aponta $\mathbf{n}(p)$? Achar outra parametrização com a orientação inversa (i.e., com \mathbf{n} apontando para o outro lado)!
 (d) Qual relação temos entre os vetores $\mathbf{n}(p)$ e $(\text{grad } f)(p)$, para $p \in S$? Por que isto deve ser assim?

²⁵mais precisamente, com *winding number* 0

²⁶I.e., em termos da base $\{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}\}$ se as coordenadas $\{u^i\}$ foram indicadas.

Ex. 23. (Corpo rígido em rotação.) O campo de velocidade de um corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo \mathbf{n} , com velocidade angular ω , é dado por $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \omega \times \mathbf{r}$, onde $\omega := \omega \mathbf{n}$, e \mathbf{r} é o vetor posição com respeito a um origem no eixo.

- (a) Calcule \mathbf{v} e $\text{rot } \mathbf{v}$ em coordenadas cilíndricas. **Dica:** Usar o fato que as coordenadas cilíndricas satisfazem

$$\mathbf{r}(p) = \varrho(p) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varrho}(p) + z(p) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}(p). \quad (248)$$

- (b) Integrar $\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ ao longo de um círculo C no plano ortogonal a \mathbf{n} que faz uma volta em torno do eixo \mathbf{n} no sentido contra-horário. Verifique que

$$\frac{\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}}{\text{área}} = \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z.$$

Ex. 24. (Rotacional.) Calcule o rotacional dos seguintes campos.

- (a) $\mathbf{A}(\varrho, \varphi, z) = f(\varrho) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$ (em coordenadas cilíndricas).
 (b) $\mathbf{A}(\varrho, \varphi, z) = \varrho^{-2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$ (em coordenadas cilíndricas).
 (c) $\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = f(r) \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$ (em coordenadas esféricas).
 (d) $\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = r^5 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}$ (em coordenadas esféricas).

Ex. 25. (Divergência.) Calcular a divergência do campo eletrostático \mathbf{E} gerado por uma esfera uniformemente carregada, com carga total Q e raio R .

- (a) No interior, onde \mathbf{E} é dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \frac{Q}{R^3} r \mathbf{e}_r.$$

- (b) No exterior, onde \mathbf{E} é dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r.$$

- (c)* Pelos resultados dos itens anteriores: $\text{div } \mathbf{E}$ é proporcional a qual grandeza física?

Ex. 26. (Aceleração em coordenadas cilíndricas sem símbolos de Christoffel.) Seja $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ a curva de uma partícula. Achar as componentes da velocidade $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}}$ e da aceleração $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ em coordenadas cilíndricas. (Ou com respeito à base $\{\partial_\varrho \mathbf{r}, \partial_\varphi \mathbf{r}, \partial_z \mathbf{r}\}$, i.e., as componentes v^i definido por $\mathbf{v} = \sum v^i \partial_i \mathbf{r}$; ou com respeito à base $\{\mathbf{e}_\varrho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$, i.e., as componentes $v^{(i)}$ definido por $\mathbf{v} = \sum v^{(i)} \mathbf{e}_i$.) Tome em consideração que $\mathbf{e}_\varrho(p)$ e $\mathbf{e}_\varphi(p)$ (em contraste a \mathbf{e}_z) dependem do ponto p (e por conseguinte, de t)! — **Dica:** Use a eq. (248), e $\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = 0$ (Por que?) para determinar esta dependência de t .

Ex. 27. (Potencial-vetor do fio reto infinito.) O campo magnético de um fio condutor infinitamente estendido no eixo- z e com corrente I na direção das z positivas é dado, em coordenadas cilíndricas, por

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \varrho} \mathbf{e}_\varphi. \quad (249)$$

Mostre que um potencial-vetor do campo magnético é dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) := \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\varrho}\right) \mathbf{e}_z.$$

Ex. 28. (Grad e rot do vetor posição.)

- (a) Calcule $\text{div } \mathbf{r}$. Use o resultado para calcular

$$\oint_{\partial G} \mathbf{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

onde a superfície ∂G é o contorno de uma região G .

- (b) Calcule $\text{rot } \mathbf{r}$. Use o resultado para calcular

$$\oint_{\partial S} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r},$$

onde a curva ∂S é o contorno de uma superfície S .

- (c) Mostre que $\text{grad}(1/r) = (-1/r^2)\mathbf{e}_r$.
 (d) Use a equação do item anterior para mostrar $\Delta \frac{1}{r} = 0$ se $r \neq 0$, enquanto

$$\int_G \Delta \frac{1}{r} dV = -4\pi \quad (250)$$

para qualquer região G que contém a origem. (Em outras palavras, $\Delta \frac{1}{r}$ é -4π vezes a distribuição-delta.) **Dica:** Mostre eq. (250) primeiro para uma bola do raio R centrada na origem, e depois para regiões arbitrárias.

Ex. 29. (Potencial-vetor do solenóide.) O campo magnético de um solenóide do raio R , infinitamente estendido na direção \mathbf{e} , é dado por

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mu_0 n I \mathbf{e} & \text{no interior, e} \\ \mathbf{0} & \text{no exterior do solenóide,} \end{cases} \quad (251)$$

onde I é a corrente e n é o número de espiras por metro. Calcular o potencial-vetor \mathbf{A} do campo magnético (satisfazendo $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$), usando nossa formula geral

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) := \int_0^1 s \mathbf{B}(s\mathbf{r}) \times \mathbf{r} ds : \quad (252)$$

- (a) No interior do solenóide. (A eq. (252) depende, via $\mathbf{r}(p) = \vec{op}$, da escolha da origem o . Onde voce escolha o ?) Escreva o resultado em termos de \mathbf{B} e \mathbf{r} , sem usar coordenadas.
 (b) No interior do solenóide, usando coordenadas cilíndricas. (Escolha o eixo- z apropriadamente!) **Dica:** Use a formula

$$\mathbf{r}(\varrho, \varphi, z) = \varrho \mathbf{e}_\varrho + z \mathbf{e}_z. \quad (253)$$

- (c) No exterior do solenóide, usando coordenadas cilíndricas. **Dica:** Mostre primeiro que a coordenada ϱ satisfaz

$$\varrho(s\mathbf{r}) = s\varrho(\mathbf{r}). \quad (254)$$

Ex. 30. (Regras para Nabla.) Mostre: Para uma superfície S com contorno ∂S e funções f, g vale

$$\oint_{\partial S} (f \text{ grad } g) \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\text{grad } f \times \text{grad } g) \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

Referências

- [1] G. Arfken, H. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, New York, 1995)
- [2] G. Birkhoff, S. MacLane, *Álgebra Moderna Básica* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 4ª edição, 1980)
- [3] E. Butkov, *Física Matemática* (Guanabara Dois, Rio de Janeiro)
- [4] R.V. Churchill, *Variáveis Complexas e Suas Aplicações* (Mc Graw-Hill do Brasil, São Paulo)
- [5] H. Feshbach, P.M. Morse, *Methods of Theoretical Physics* (Mc Graw-Hill, New York)
- [6] E. Kreyszig, *Matemática Superior* (John Wiley & Sons, New York, 2ª edição, 1984)
- [7] M. Reed, and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I* (Academic Press, New York, 1975)
- [8] W. Rudin, *Real and Complex Analysis* (McGraw-Hill, 1986)
- [9] G.E. Shilov, B.L. Gurevich, *Integral, Measure and Derivative: A Unified Approach* (Prentice-Hall, New York 1966)