

# Capítulo 29 - Indução Eletromagnética

## RODRIGO ALVES DIAS

Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

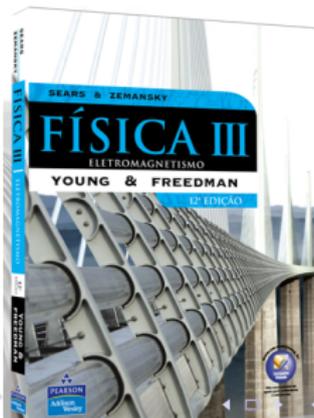
Livro texto: Física 3 - Eletromagnetismo

Autores: Sears e Zemansky

Edição: 12<sup>a</sup>

Editora: Pearson - Addison and Wesley

28 de fevereiro de 2012



## Objetivos de Aprendizagem

Ao estudar este capítulo você aprenderá:

- ▶ Sobre a evidência empírica de que a variação de um campo magnético induz uma fem.

## Objetivos de Aprendizagem

Ao estudar este capítulo você aprenderá:

- ▶ Sobre a evidência empírica de que a variação de um campo magnético induz uma fem.
- ▶ Como a lei de Faraday relaciona a fem induzida em uma espira à variação de fluxo magnético através da espira.

## Objetivos de Aprendizagem

Ao estudar este capítulo você aprenderá:

- ▶ Sobre a evidência empírica de que a variação de um campo magnético induz uma fem.
- ▶ Como a lei de Faraday relaciona a fem induzida em uma espira à variação de fluxo magnético através da espira.
- ▶ Como determinar o sentido de uma fem induzida.

## Objetivos de Aprendizagem

Ao estudar este capítulo você aprenderá:

- ▶ Sobre a evidência empírica de que a variação de um campo magnético induz uma fem.
- ▶ Como a lei de Faraday relaciona a fem induzida em uma espira à variação de fluxo magnético através da espira.
- ▶ Como determinar o sentido de uma fem induzida.
- ▶ Como calcular a fem induzida em um condutor que se move através de um campo magnético.

## Objetivos de Aprendizagem

### Ao estudar este capítulo você aprenderá:

- ▶ Sobre a evidência empírica de que a variação de um campo magnético induz uma fem.
- ▶ Como a lei de Faraday relaciona a fem induzida em uma espira à variação de fluxo magnético através da espira.
- ▶ Como determinar o sentido de uma fem induzida.
- ▶ Como calcular a fem induzida em um condutor que se move através de um campo magnético.
- ▶ Como uma variação no fluxo magnético gera um campo elétrico que é muito diferente daquele produzido por uma combinação de cargas.

## Objetivos de Aprendizagem

### Ao estudar este capítulo você aprenderá:

- ▶ Sobre a evidência empírica de que a variação de um campo magnético induz uma fem.
- ▶ Como a lei de Faraday relaciona a fem induzida em uma espira à variação de fluxo magnético através da espira.
- ▶ Como determinar o sentido de uma fem induzida.
- ▶ Como calcular a fem induzida em um condutor que se move através de um campo magnético.
- ▶ Como uma variação no fluxo magnético gera um campo elétrico que é muito diferente daquele produzido por uma combinação de cargas.
- ▶ As quatro equações fundamentais que descrevem integralmente a eletricidade e o magnetismo.

**Uma usina produz energia elétrica mediante a conversão de outras formas de energia:**

- ▶ Energia potencial gravitacional em uma usina hidroelétrica.

**Uma usina produz energia elétrica mediante a conversão de outras formas de energia:**

- ▶ Energia potencial gravitacional em uma usina hidroelétrica.
- ▶ Energia química em uma usina termoelétrica.

**Uma usina produz energia elétrica mediante a conversão de outras formas de energia:**

- ▶ Energia potencial gravitacional em uma usina hidroelétrica.
- ▶ Energia química em uma usina termoelétrica.
- ▶ Energia nuclear em uma usina nuclear.

**Uma usina produz energia elétrica mediante a conversão de outras formas de energia:**

- ▶ Energia potencial gravitacional em uma usina hidroelétrica.
- ▶ Energia química em uma usina termoelétrica.
- ▶ Energia nuclear em uma usina nuclear.
- ▶ **Como ocorre essa conversão de energia?**

## Uma usina produz energia elétrica mediante a conversão de outras formas de energia:

- ▶ Energia potencial gravitacional em uma usina hidroelétrica.
- ▶ Energia química em uma usina termoelétrica.
- ▶ Energia nuclear em uma usina nuclear.
- ▶ **Como ocorre essa conversão de energia?**
- ▶ **Qual é a física envolvida na produção de quase toda energia que consumimos?**

## Uma usina produz energia elétrica mediante a conversão de outras formas de energia:

- ▶ Energia potencial gravitacional em uma usina hidroelétrica.
- ▶ Energia química em uma usina termoelétrica.
- ▶ Energia nuclear em uma usina nuclear.
- ▶ **Como ocorre essa conversão de energia?**
- ▶ **Qual é a física envolvida na produção de quase toda energia que consumimos?**

A resposta é um fenômeno chamado *indução eletromagnética*:

- ▶ Quando o fluxo magnético varia através de um circuito, ocorre a indução de uma fem e de uma corrente no circuito.

## Uma usina produz energia elétrica mediante a conversão de outras formas de energia:

- ▶ Energia potencial gravitacional em uma usina hidroelétrica.
- ▶ Energia química em uma usina termoelétrica.
- ▶ Energia nuclear em uma usina nuclear.
- ▶ **Como ocorre essa conversão de energia?**
- ▶ **Qual é a física envolvida na produção de quase toda energia que consumimos?**

A resposta é um fenômeno chamado *indução eletromagnética*:

- ▶ Quando o fluxo magnético varia através de um circuito, ocorre a indução de uma fem e de uma corrente no circuito.
- ▶ Um **campo magnético** que varia em função do tempo pode atuar como uma fonte de **campo elétrico** [ $\vec{B}(t) \rightarrow \vec{E}(t)$ ].

## Uma usina produz energia elétrica mediante a conversão de outras formas de energia:

- ▶ Energia potencial gravitacional em uma usina hidroelétrica.
- ▶ Energia química em uma usina termoelétrica.
- ▶ Energia nuclear em uma usina nuclear.
- ▶ **Como ocorre essa conversão de energia?**
- ▶ **Qual é a física envolvida na produção de quase toda energia que consumimos?**

## A resposta é um fenômeno chamado *indução eletromagnética*:

- ▶ Quando o fluxo magnético varia através de um circuito, ocorre a indução de uma fem e de uma corrente no circuito.
- ▶ Um **campo magnético** que varia em função do tempo pode atuar como uma fonte de **campo elétrico** [ $\vec{B}(t) \rightarrow \vec{E}(t)$ ].
- ▶ Um **campo elétrico** que varia em função do tempo pode atuar como uma fonte de **campo magnético** [ $\vec{E}(t) \rightarrow \vec{B}(t)$ ].
- ▶ Ou seja,  $\vec{B}(t) \Leftrightarrow \vec{E}(t)$ .







## Experiências de Indução

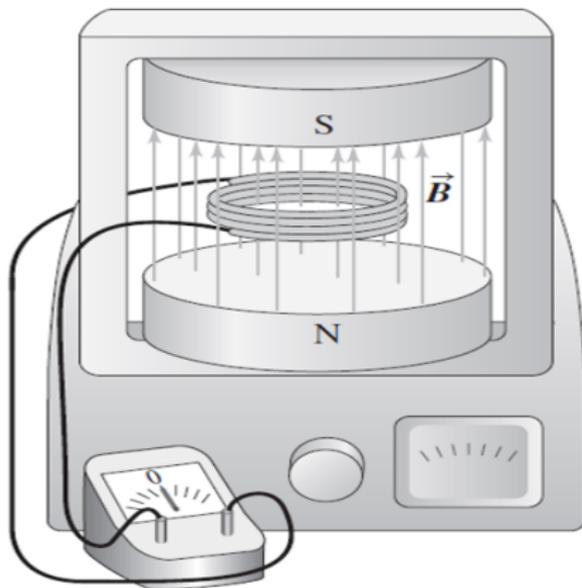
- ▶ Um ímã em repouso **não induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Um ímã em movimento **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Uma segunda bobina que transporta corrente em movimento **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Variando a corrente na segunda bobina **induz** corrente no galvanômetro.





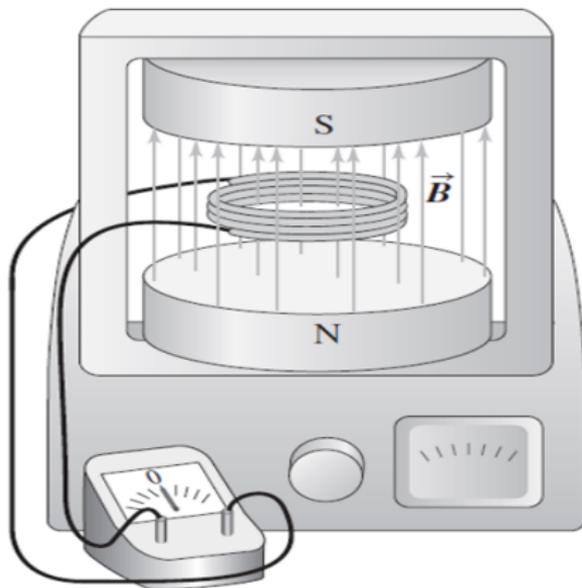
## Experiências de Indução

- ▶ Um ímã em repouso **não induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Um ímã em movimento **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Uma segunda bobina que transporta corrente em movimento **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Variando a corrente na segunda bobina **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se  $\vec{B} = 0$  ou  $\vec{B} = \text{Constante}$ , **não induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se  $d\vec{B} \neq 0$ , **induz** corrente no galvanômetro.



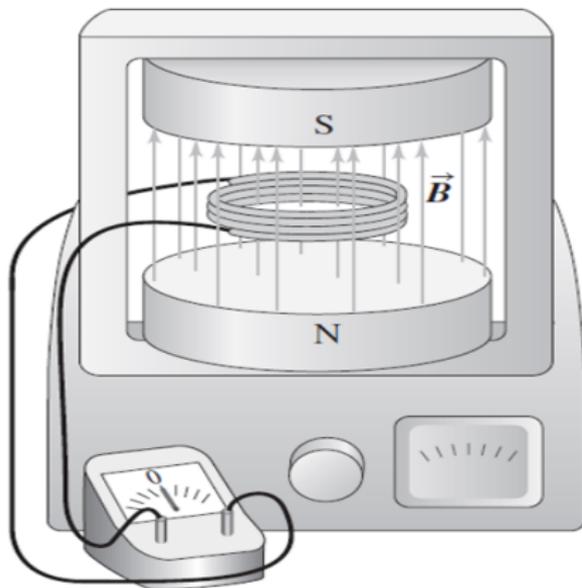
## ↳ Experiências de Indução

- ▶ Um ímã em repouso **não induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Um ímã em movimento **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Uma segunda bobina que transporta corrente em movimento **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Variando a corrente na segunda bobina **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se  $\vec{B} = 0$  ou  $\vec{B} = \text{Constante}$ , **não induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se  $d\vec{B} \neq 0$ , **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se mudamos a área da bobina,  $\Delta A \neq 0$ , **induz** corrente no galvanômetro.



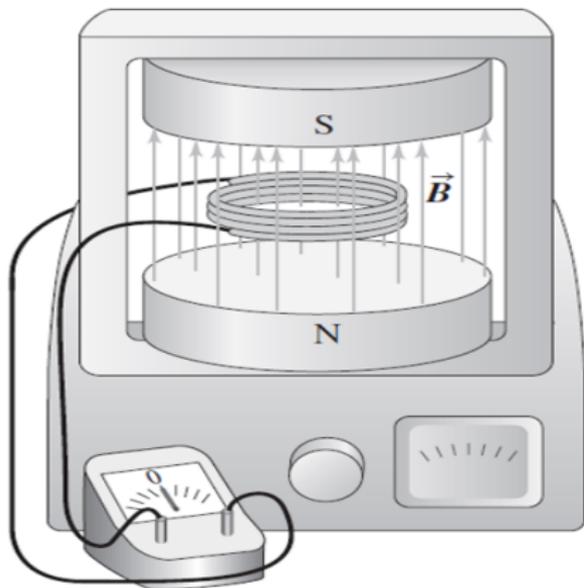
## ↳ Experiências de Indução

- ▶ Um ímã em repouso **não induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Um ímã em movimento **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Uma segunda bobina que transporta corrente em movimento **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Variando a corrente na segunda bobina **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se  $\vec{B} = 0$  ou  $\vec{B} = \text{Constante}$ , **não induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se  $d\vec{B} \neq 0$ , **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se mudamos a área da bobina,  $\Delta A \neq 0$ , **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se giramos a bobina, **induz** corrente no galvanômetro.



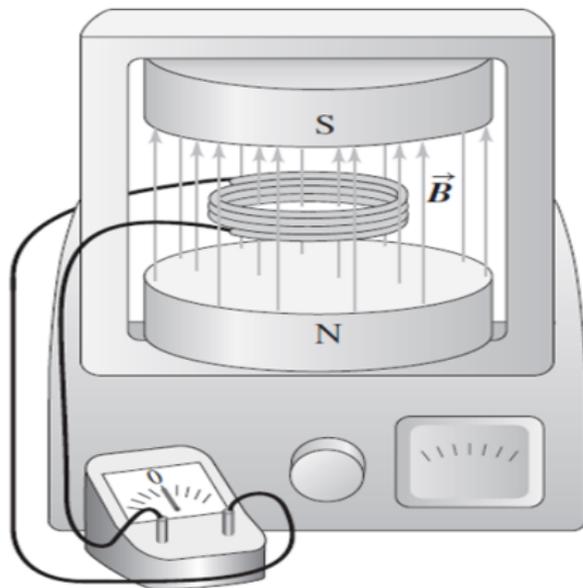
## ↳ Experiências de Indução

- ▶ Um ímã em repouso **não induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Um ímã em movimento **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Uma segunda bobina que transporta corrente em movimento **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Variando a corrente na segunda bobina **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se  $\vec{B} = 0$  ou  $\vec{B} = \text{Constante}$ , **não induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se  $d\vec{B} \neq 0$ , **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se mudamos a área da bobina,  $\Delta A \neq 0$ , **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se giramos a bobina, **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se mudamos o número  $N$  de espiras, **induz** corrente no galvanômetro.



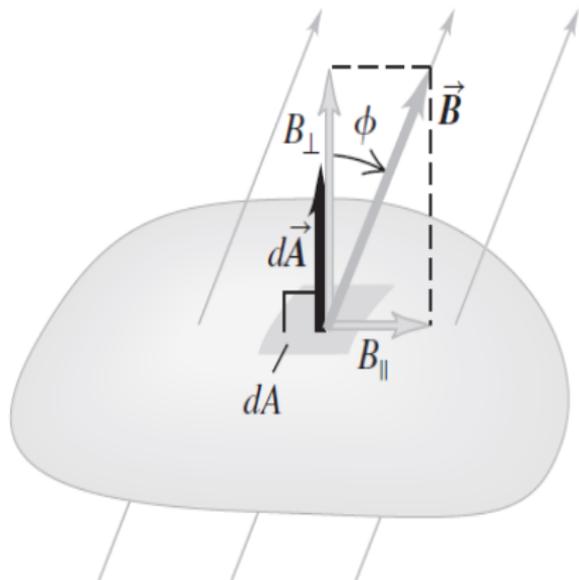
## ↳ Experiências de Indução

- ▶ Um ímã em repouso **não induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Um ímã em movimento **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Uma segunda bobina que transporta corrente em movimento **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Variando a corrente na segunda bobina **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se  $\vec{B} = 0$  ou  $\vec{B} = \text{Constante}$ , **não induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se  $d\vec{B} \neq 0$ , **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se mudamos a área da bobina,  $\Delta A \neq 0$ , **induz** corrente no galvanômetro.

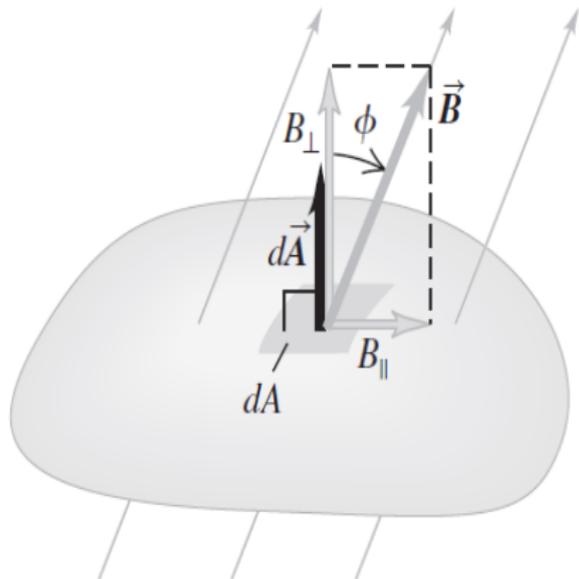


- ▶ Se giramos a bobina, **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Se mudamos o número  $N$  de espiras, **induz** corrente no galvanômetro.
- ▶ Quanto mais rápido fazemos os experimentos acima, maior é a **indução** de corrente no galvanômetro.

- ▶ O fenômeno comum em todos os efeitos de indução é a variação do fluxo magnético através de um circuito.

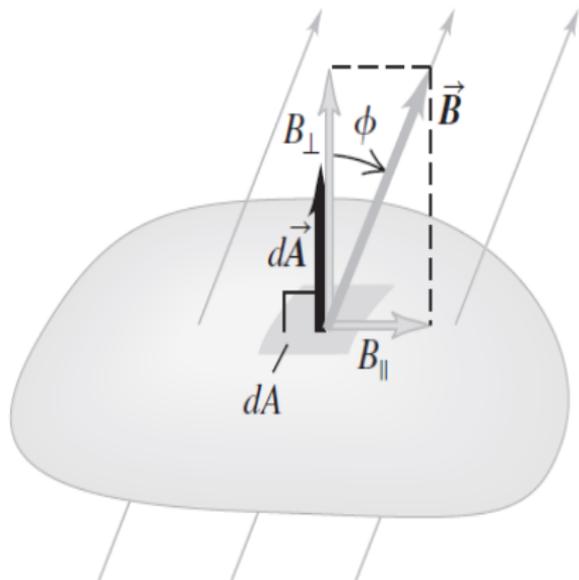


- ▶ O fenômeno comum em todos os efeitos de indução é a variação do fluxo magnético através de um circuito.
- ▶ Para um elemento de área infinitesimal  $d\vec{A}$  em um campo magnético  $\vec{B}$ , o elemento de fluxo magnético é dado por:



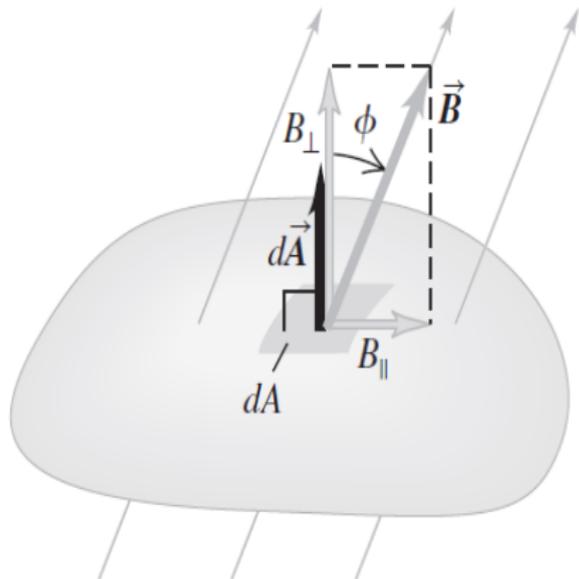
↳ Lei de Faraday

- ▶ O fenômeno comum em todos os efeitos de indução é a variação do fluxo magnético através de um circuito.
- ▶ Para um elemento de área infinitesimal  $d\vec{A}$  em um campo magnético  $\vec{B}$ , o elemento de fluxo magnético é dado por:
- ▶  $d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_{\perp} dA = B dA \cos \phi$



## Lei de Faraday

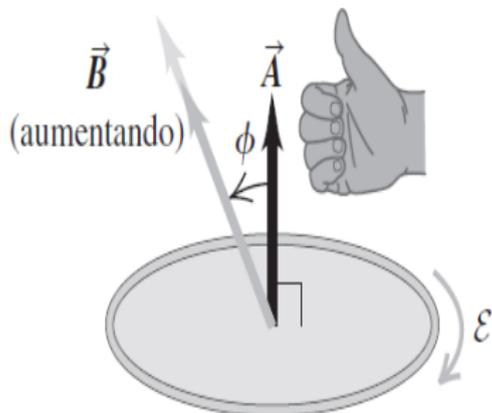
- ▶ O fenômeno comum em todos os efeitos de indução é a variação do fluxo magnético através de um circuito.
- ▶ Para um elemento de área infinitesimal  $d\vec{A}$  em um campo magnético  $\vec{B}$ , o elemento de fluxo magnético é dado por:
- ▶  $d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_{\perp} dA = BdA \cos \phi$
- ▶ O fluxo total em uma determinada área é dada por,  $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int BdA \cos \phi$ .



## Lei de Faraday

- ▶ O fenômeno comum em todos os efeitos de indução é a **variação do fluxo magnético através de um circuito.**
- ▶ Para um elemento de área infinitesimal  $d\vec{A}$  em um campo magnético  $\vec{B}$ , o elemento de fluxo magnético é dado por:
- ▶  $d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_{\perp} dA = BdA \cos \phi$
- ▶ O fluxo total em uma determinada área é dada por,  $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int BdA \cos \phi$ .
- ▶ **A fem induzida em uma espira fechada é dada pela taxa de variação do fluxo magnético, com o sinal negativo, através da área delimitada pela espira.**

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

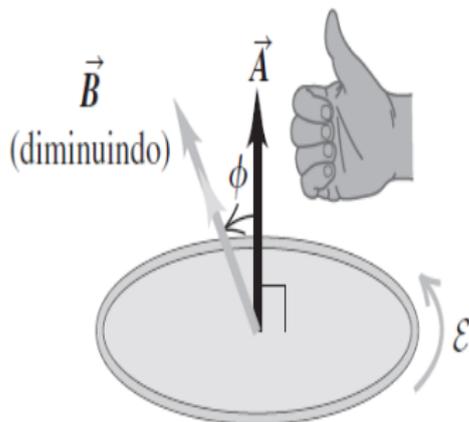


- Fluxo positivo ( $\Phi_B > 0$ ) ...
- ... e tornando-se mais positivo ( $d\Phi_B/dt > 0$ ).
- Fem induzida negativa ( $\varepsilon < 0$ ).

## Lei de Faraday

- ▶ O fenômeno comum em todos os efeitos de indução é a **variação do fluxo magnético através de um circuito.**
- ▶ Para um elemento de área infinitesimal  $d\vec{A}$  em um campo magnético  $\vec{B}$ , o elemento de fluxo magnético é dado por:
- ▶  $d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_{\perp} dA = BdA \cos \phi$
- ▶ O fluxo total em uma determinada área é dada por,  $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int BdA \cos \phi$ .
- ▶ **A fem induzida em uma espira fechada é dada pela taxa de variação do fluxo magnético, com o sinal negativo, através da área delimitada pela espira.**

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

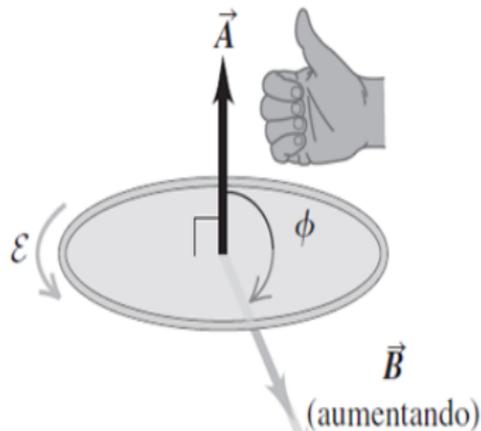


- Fluxo positivo ( $\Phi_B > 0$ ) ...
- ... e tornando-se menos positivo ( $d\Phi_B/dt < 0$ ).
- Fem induzida positiva ( $\varepsilon > 0$ ).

└ Lei de Faraday

- ▶ O fenômeno comum em todos os efeitos de indução é a variação do fluxo magnético através de um circuito.
- ▶ Para um elemento de área infinitesimal  $d\vec{A}$  em um campo magnético  $\vec{B}$ , o elemento de fluxo magnético é dado por:
- ▶  $d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_{\perp} dA = BdA \cos \phi$
- ▶ O fluxo total em uma determinada área é dada por,  $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int BdA \cos \phi$ .
- ▶ A fem induzida em uma espira fechada é dada pela taxa de variação do fluxo magnético, com o sinal negativo, através da área delimitada pela espira.

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

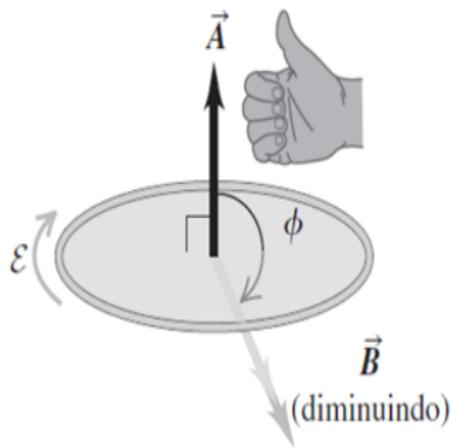


- Fluxo negativo ( $\Phi_B < 0$ ) ...
- ... e tornando-se mais negativo ( $d\Phi_B/dt < 0$ ).
- Fem induzida positiva ( $\varepsilon > 0$ ).

## Lei de Faraday

- ▶ O fenômeno comum em todos os efeitos de indução é a variação do fluxo magnético através de um circuito.
- ▶ Para um elemento de área infinitesimal  $d\vec{A}$  em um campo magnético  $\vec{B}$ , o elemento de fluxo magnético é dado por:
- ▶  $d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_{\perp} dA = BdA \cos \phi$
- ▶ O fluxo total em uma determinada área é dada por,  $\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int BdA \cos \phi$ .
- ▶ A fem induzida em uma espira fechada é dada pela taxa de variação do fluxo magnético, com o sinal negativo, através da área delimitada pela espira.

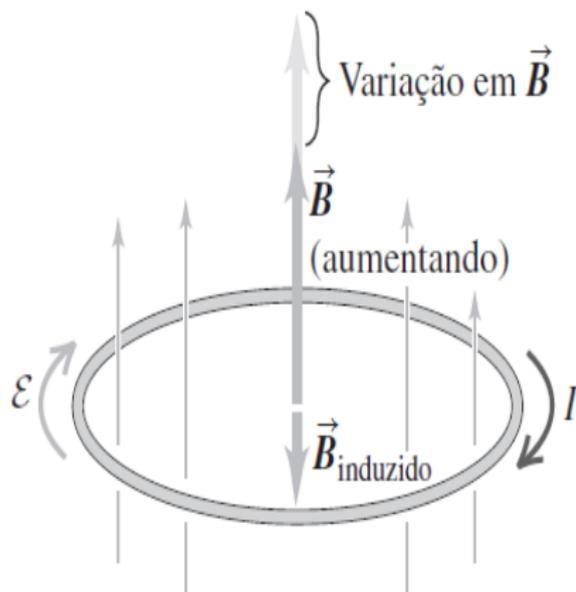
$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$



- Fluxo negativo ( $\Phi_B < 0$ ) ...
- ... e tornando-se menos negativo ( $d\Phi_B/dt > 0$ ).
- Fem induzida negativa ( $\varepsilon < 0$ ).

## Lei de Lenz

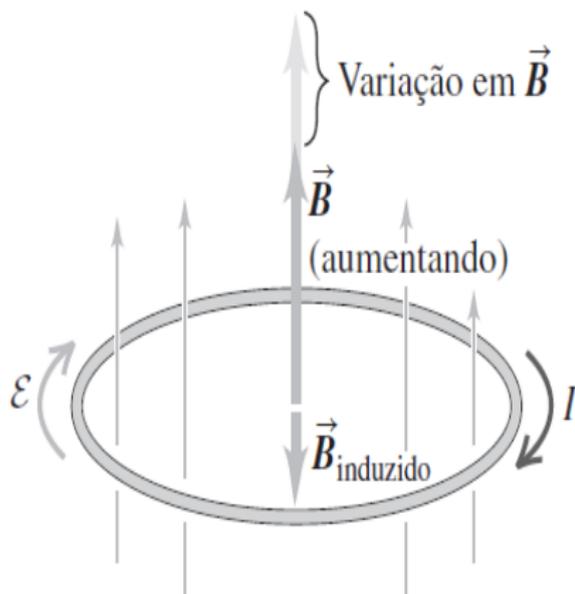
O Sentido de qualquer efeito de indução magnética é tal que ele se opõe à causa que produz o efeito.



## Lei de Lenz

O Sentido de qualquer efeito de indução magnética é tal que ele se opõe à causa que produz o efeito.

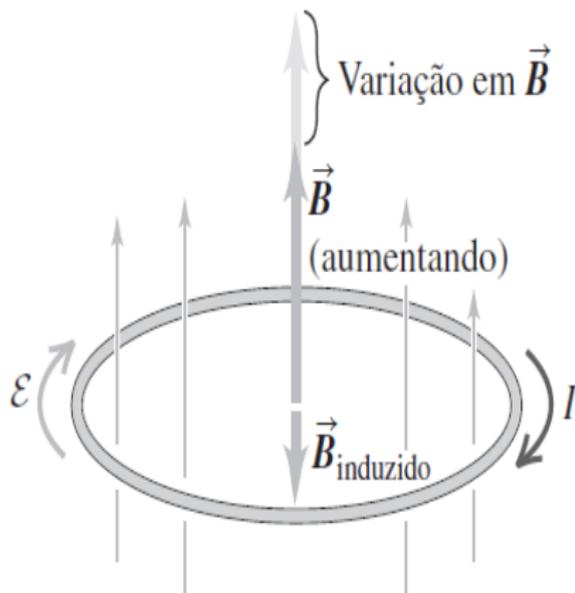
- ▶ Quando o fluxo magnético varia em um circuito em repouso, a própria corrente induzida produz um campo magnético.



## Lei de Lenz

O Sentido de qualquer efeito de indução magnética é tal que ele se opõe à causa que produz o efeito.

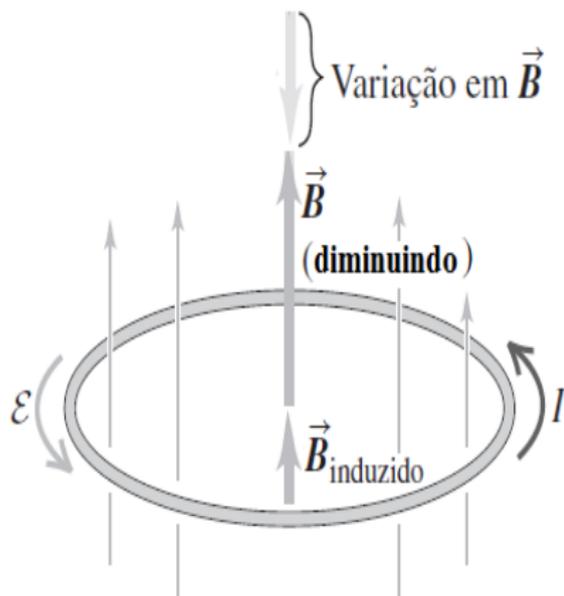
- ▶ Quando o fluxo magnético varia em um circuito em repouso, a própria corrente induzida produz um campo magnético.
- ▶ No interior da área limitada pelo circuito, esse campo é **oposto** ao campo original quando ele estiver **crescendo**.



## Lei de Lenz

O Sentido de qualquer efeito de indução magnética é tal que ele se opõe à causa que produz o efeito.

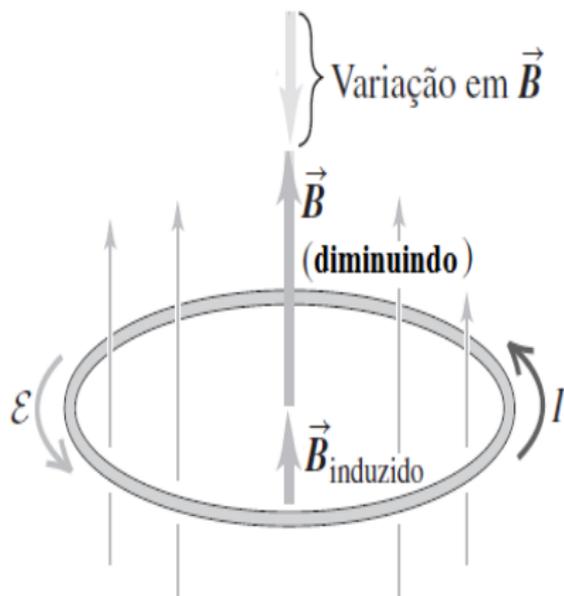
- ▶ Quando o fluxo magnético varia em um circuito em repouso, a própria corrente induzida produz um campo magnético.
- ▶ No interior da área limitada pelo circuito, esse campo é **oposto** ao campo original quando ele estiver **crescendo**.
- ▶ No interior da área limitada pelo circuito, esse campo **possui o mesmo sentido** do campo original quando ele estiver **diminuindo**.



## Lei de Lenz

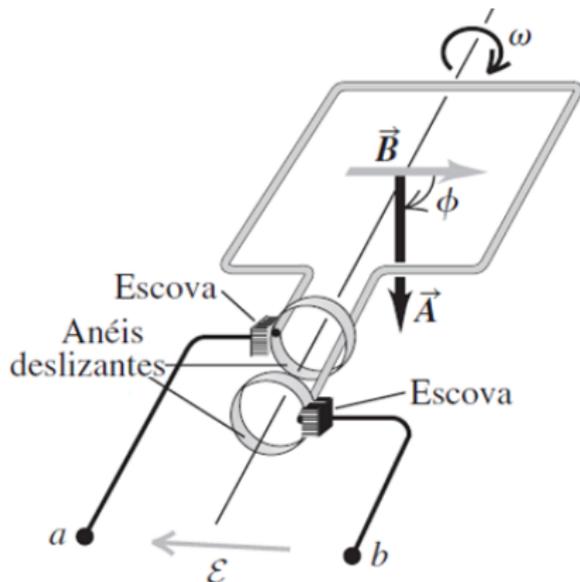
O Sentido de qualquer efeito de indução magnética é tal que ele se opõe à causa que produz o efeito.

- ▶ Quando o fluxo magnético varia em um circuito em repouso, a própria corrente induzida produz um campo magnético.
- ▶ No interior da área limitada pelo circuito, esse campo é **oposto** ao campo original quando ele estiver **crescendo**.
- ▶ No interior da área limitada pelo circuito, esse campo **possui o mesmo sentido** do campo original quando ele estiver **diminuindo**.
- ▶ A corrente induzida se opõe à variação do fluxo magnético através do circuito (**e não ao próprio fluxo**).



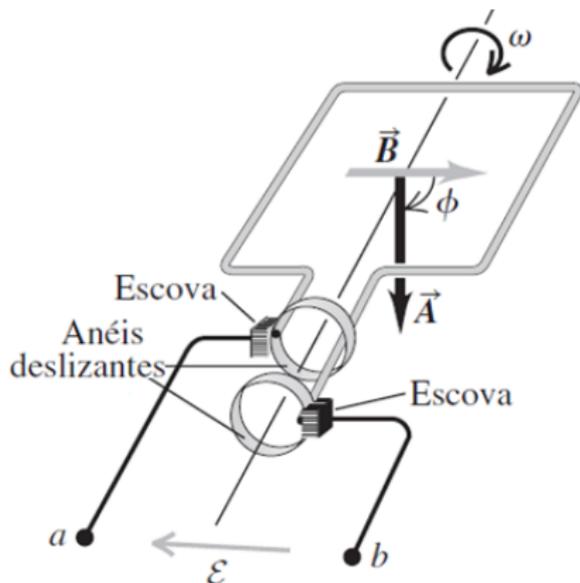
## Gerador 1: Um alternador Simples

- Uma versão simples de um alternador é uma bobina quadrada que gira com velocidade angular  $\omega$ .



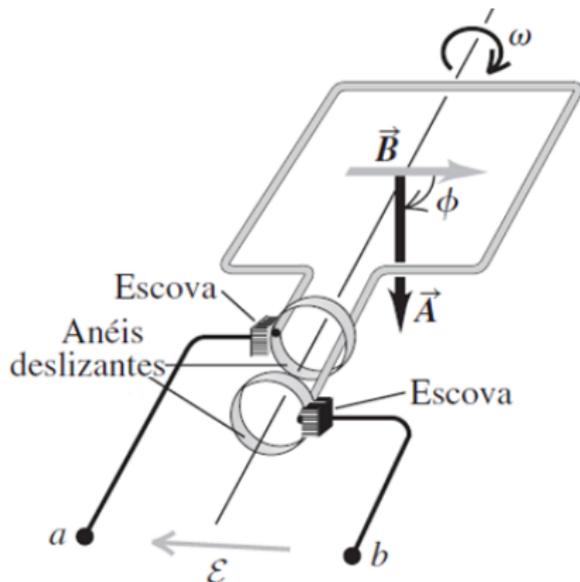
### Gerador 1: Um alternador Simples

- ▶ Uma versão simples de um alternador é uma bobina quadrada que gira com velocidade angular  $\omega$ .
- ▶ No instante  $t = 0$ ,  $\phi = 0$  e  $\vec{B}$  é uniforme e constante.



## Gerador 1: Um alternador Simples

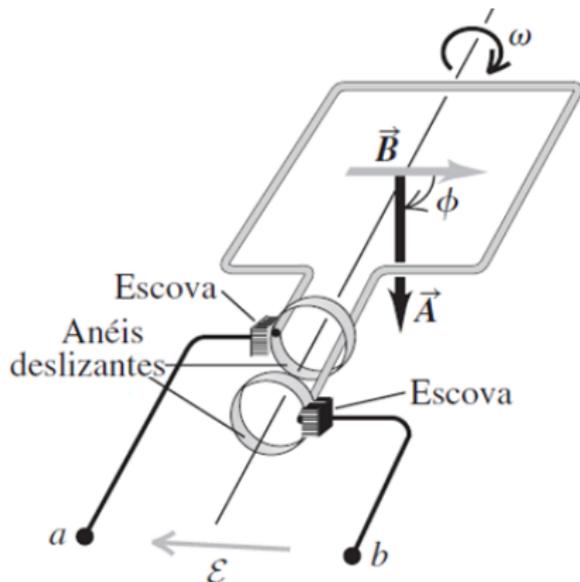
- ▶ Uma versão simples de um alternador é uma bobina quadrada que gira com velocidade angular  $\omega$ .
- ▶ No instante  $t = 0$ ,  $\phi = 0$  e  $\vec{B}$  é uniforme e constante.
- ▶ Calcule a fem induzida.



## Gerador 1: Um alternador Simples

- ▶ Uma versão simples de um alternador é uma bobina quadrada que gira com velocidade angular  $\omega$ .
- ▶ No instante  $t = 0$ ,  $\phi = 0$  e  $\vec{B}$  é uniforme e constante.
- ▶ Calcule a fem induzida.

$$\Phi_B = BA \cos(\phi) = BA \cos(\omega t)$$

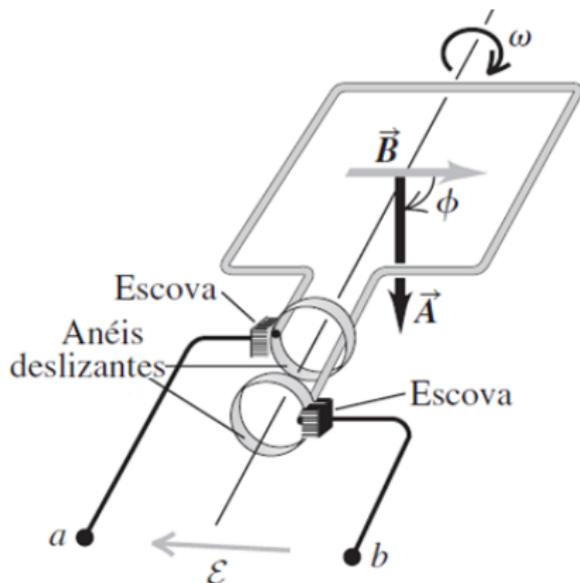


## Gerador 1: Um alternador Simples

- ▶ Uma versão simples de um alternador é uma bobina quadrada que gira com velocidade angular  $\omega$ .
- ▶ No instante  $t = 0$ ,  $\phi = 0$  e  $\vec{B}$  é uniforme e constante.
- ▶ Calcule a fem induzida.

$$\Phi_B = BA \cos(\phi) = BA \cos(\omega t)$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -BA\omega \sin(\omega t)$$



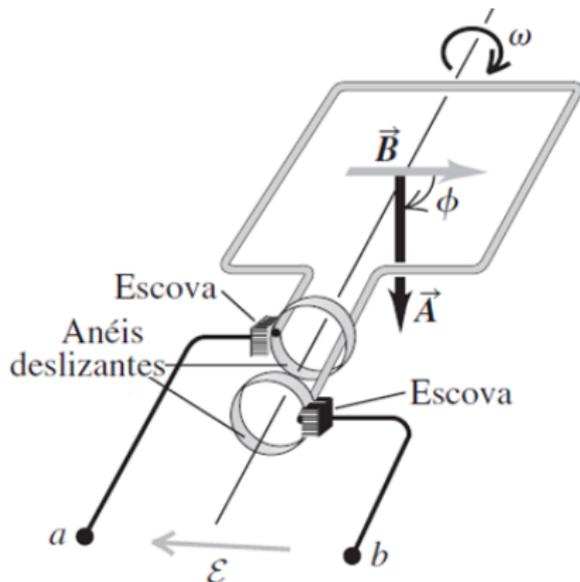
## Gerador 1: Um alternador Simples

- ▶ Uma versão simples de um alternador é uma bobina quadrada que gira com velocidade angular  $\omega$ .
- ▶ No instante  $t = 0$ ,  $\phi = 0$  e  $\vec{B}$  é uniforme e constante.
- ▶ Calcule a fem induzida.

$$\Phi_B = BA \cos(\phi) = BA \cos(\omega t)$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -BA\omega \sin(\omega t)$$

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$



## Gerador 1: Um alternador Simples

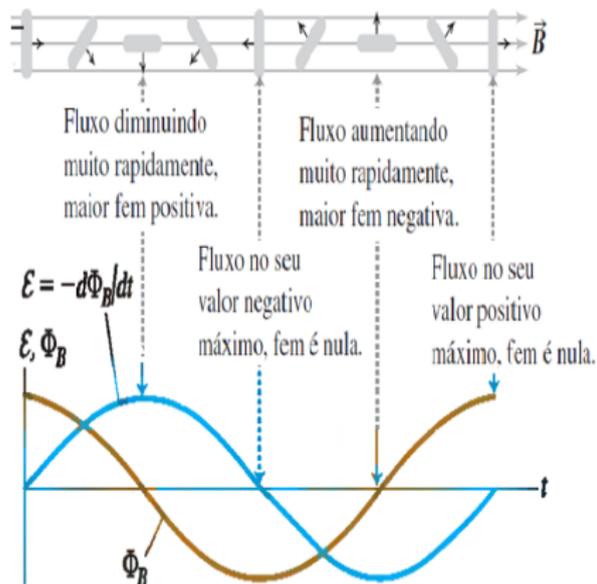
- ▶ Uma versão simples de um alternador é uma bobina quadrada que gira com velocidade angular  $\omega$ .
- ▶ No instante  $t = 0$ ,  $\phi = 0$  e  $\vec{B}$  é uniforme e constante.
- ▶ Calcule a fem induzida.

$$\Phi_B = BA \cos(\phi) = BA \cos(\omega t)$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -BA\omega \sin(\omega t)$$

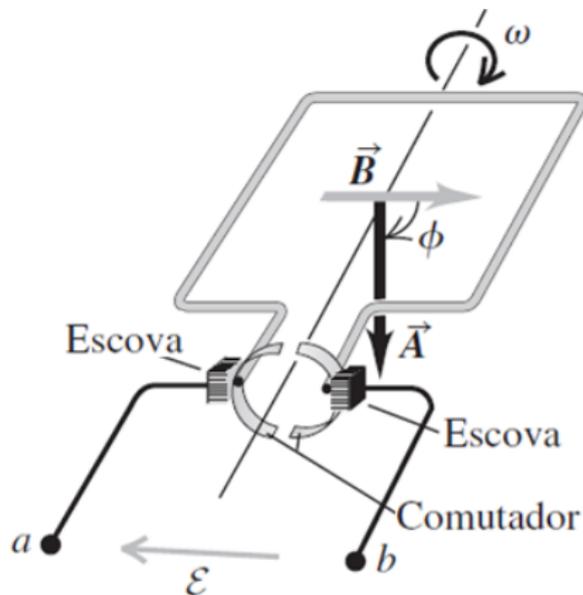
$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\varepsilon = NBA\omega \sin(\omega t)$$



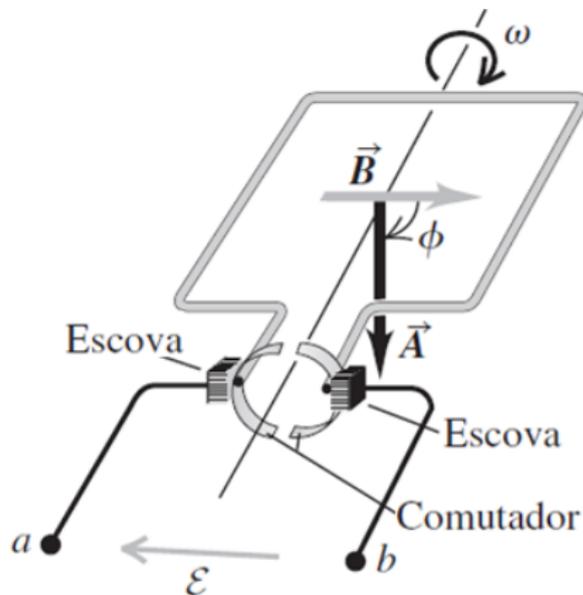
Gerador 2: Um gerador CC e fem de um motor

- ▶ Usando um esquema semelhante ao **alternador** construiremos um gerador de corrente contínua(CC) com fem sempre com o mesmo sinal.



Gerador 2: Um gerador CC e fem de um motor

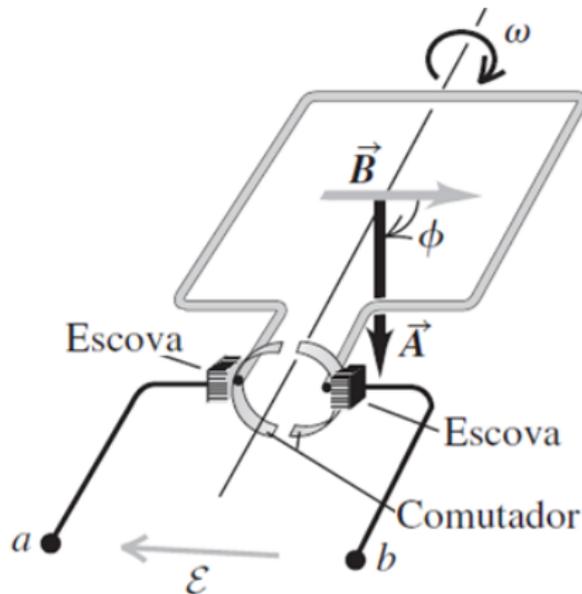
- ▶ Usando um esquema semelhante ao **alternador** construiremos um gerador de corrente contínua(CC) com fem sempre com o mesmo sinal.
- ▶ Da figura, a fem induzida será,



Gerador 2: Um gerador CC e fem de um motor

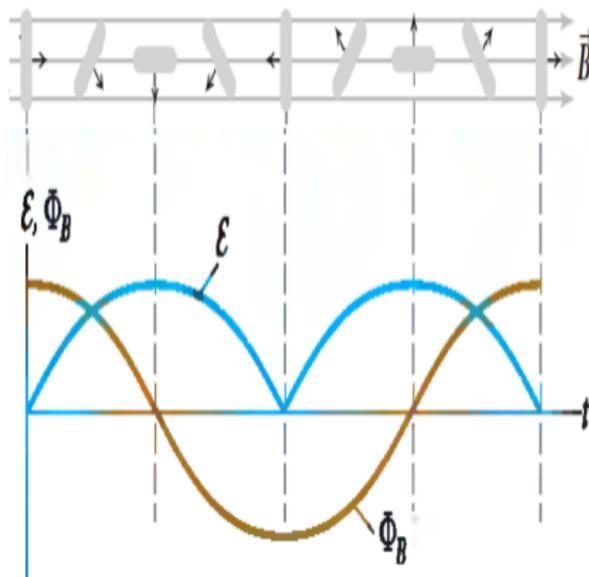
- ▶ Usando um esquema semelhante ao **alternador** construiremos um gerador de corrente contínua(CC) com fem sempre com o mesmo sinal.
- ▶ Da figura, a fem induzida será,

$$|\varepsilon| = NBA\omega |\sin(\omega t)|$$



## Gerador 2: Um gerador CC e fem de um motor

- ▶ Usando um esquema semelhante ao **alternador** construiremos um gerador de corrente contínua(CC) com fem sempre com o mesmo sinal.
- ▶ Da figura, a fem induzida será,
 
$$|\varepsilon| = NBA\omega |\sin(\omega t)|$$
- ▶ A fem induzida média é encontrada substituindo  $|\sin(\omega t)|$  por seu valor médio.



## Gerador 2: Um gerador CC e fem de um motor

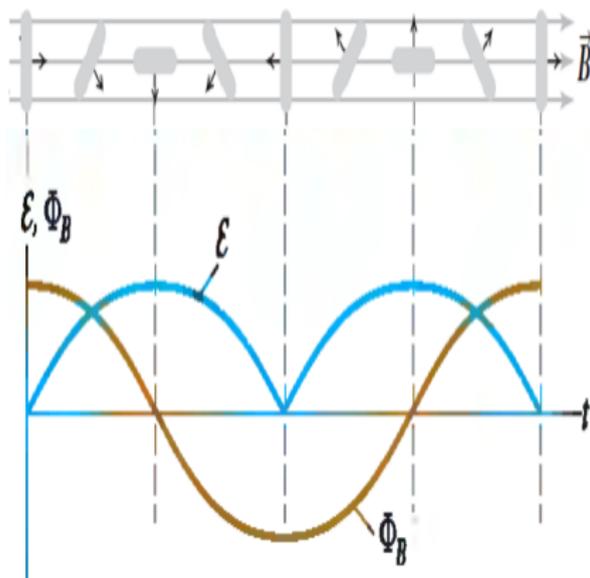
- ▶ Usando um esquema semelhante ao **alternador** construiremos um gerador de corrente contínua(CC) com fem sempre com o mesmo sinal.

- ▶ Da figura, a fem induzida será,

$$|\varepsilon| = NBA\omega |\sin(\omega t)|$$

- ▶ A fem induzida média é encontrada substituindo  $|\sin(\omega t)|$  por seu valor médio.

$$(|\sin(\omega t)|)_{med} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} \sin(\omega t) dt$$



## Gerador 2: Um gerador CC e fem de um motor

- ▶ Usando um esquema semelhante ao **alternador** construiremos um gerador de corrente contínua(CC) com fem sempre com o mesmo sinal.

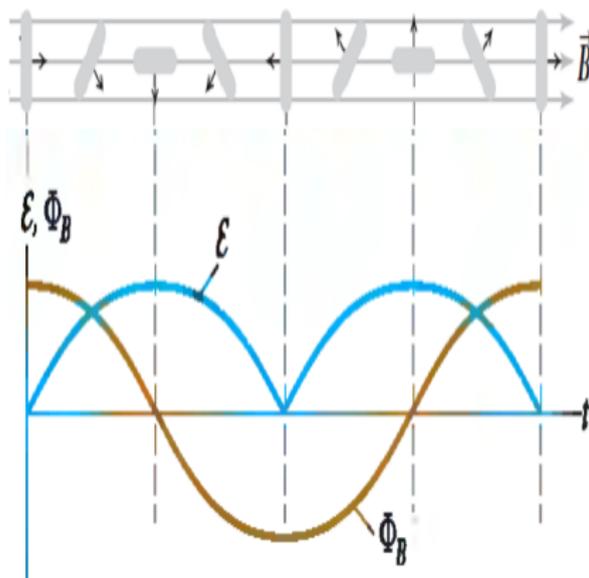
- ▶ Da figura, a fem induzida será,

$$|\varepsilon| = NBA\omega |\sin(\omega t)|$$

- ▶ A fem induzida média é encontrada substituindo  $|\sin(\omega t)|$  por seu valor médio.

$$(|\sin(\omega t)|)_{med} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} \sin(\omega t) dt$$

$$(|\sin(\omega t)|)_{med} = \frac{1}{\pi/\omega} \int_0^{\pi/\omega} \sin(\omega t) dt = \frac{2}{\pi}$$



## Gerador 2: Um gerador CC e fem de um motor

- ▶ Usando um esquema semelhante ao **alternador** construiremos um gerador de corrente contínua(CC) com fem sempre com o mesmo sinal.

- ▶ Da figura, a fem induzida será,

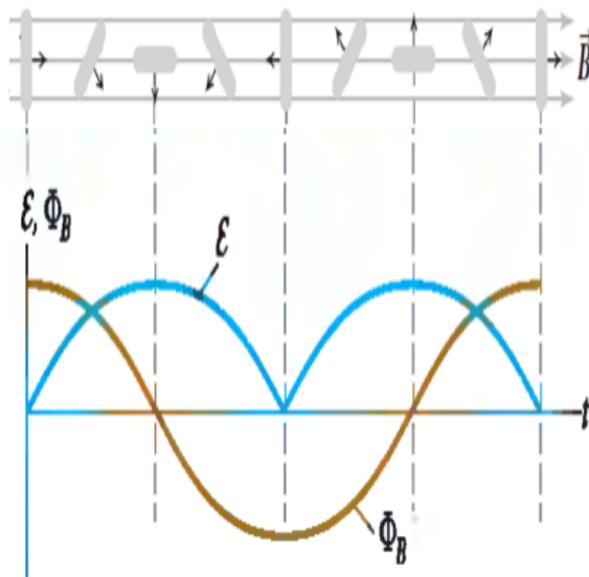
$$|\varepsilon| = NBA\omega |\sin(\omega t)|$$

- ▶ A fem induzida média é encontrada substituindo  $|\sin(\omega t)|$  por seu valor médio.

$$(|\sin(\omega t)|)_{med} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} \sin(\omega t) dt$$

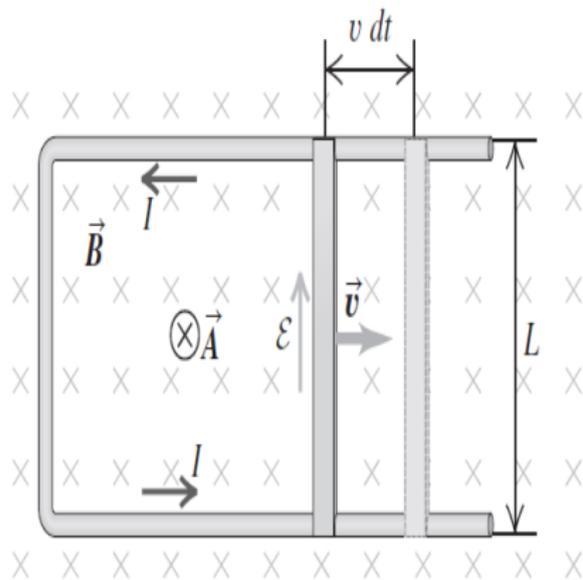
$$(|\sin(\omega t)|)_{med} = \frac{1}{\pi/\omega} \int_0^{\pi/\omega} \sin(\omega t) dt = \frac{2}{\pi}$$

$$\varepsilon_{med} = \frac{2NBA\omega}{\pi} \quad \text{ou} \quad \omega = \frac{\pi \varepsilon_{med}}{2NBA}$$



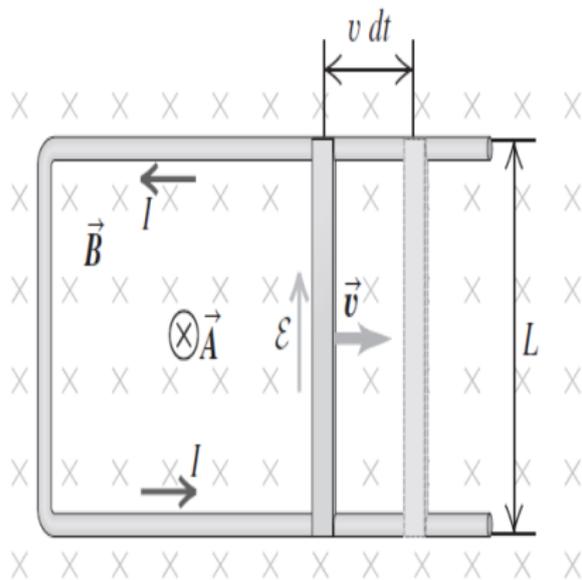
## Gerador 3: Um gerador com haste deslizante

- Uma condutor em forma de  $U$  está imerso em  $\vec{B}$  que é uniforme e constante.



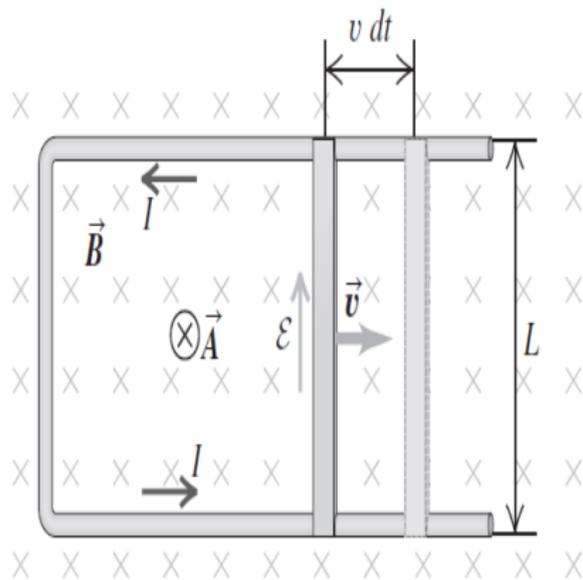
## Gerador 3: Um gerador com haste deslizante

- ▶ Uma condutor em forma de  $U$  está imerso em  $\vec{B}$  que é uniforme e constante.
- ▶ Uma haste de tamanho  $L$  é puxada com  $\vec{v}$ .



### Gerador 3: Um gerador com haste deslizante

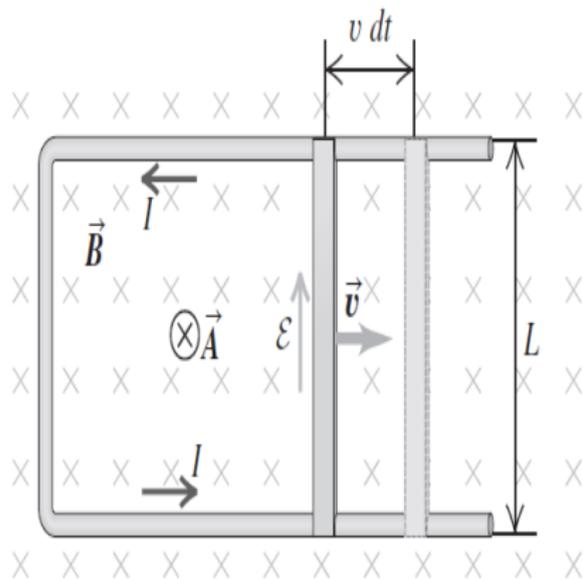
- ▶ Uma condutor em forma de  $U$  está imerso em  $\vec{B}$  que é uniforme e constante.
- ▶ Uma haste de tamanho  $L$  é puxada com  $\vec{v}$ .
- ▶ Calcule a fem induzida.



## Gerador 3: Um gerador com haste deslizante

- ▶ Uma condutor em forma de  $U$  está imerso em  $\vec{B}$  que é uniforme e constante.
- ▶ Uma haste de tamanho  $L$  é puxada com  $\vec{v}$ .
- ▶ Calcule a fem induzida.

$$d\Phi_B = B dA = BLv dt$$

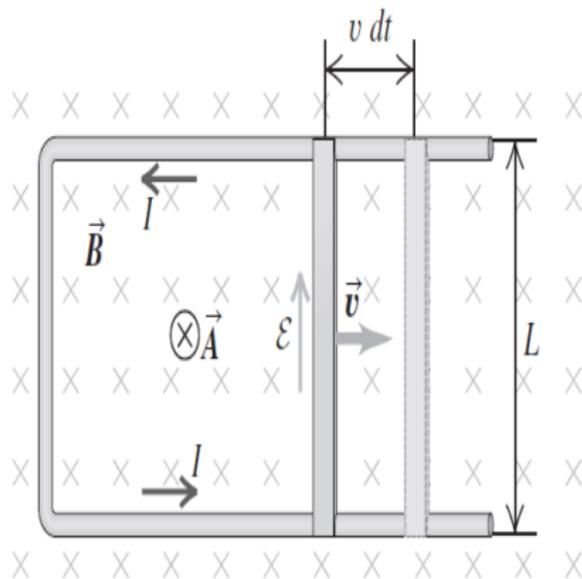


## Gerador 3: Um gerador com haste deslizante

- ▶ Uma condutor em forma de  $U$  está imerso em  $\vec{B}$  que é uniforme e constante.
- ▶ Uma haste de tamanho  $L$  é puxada com  $\vec{v}$ .
- ▶ Calcule a fem induzida.

$$d\Phi_B = B dA = BLv dt$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = BLv$$



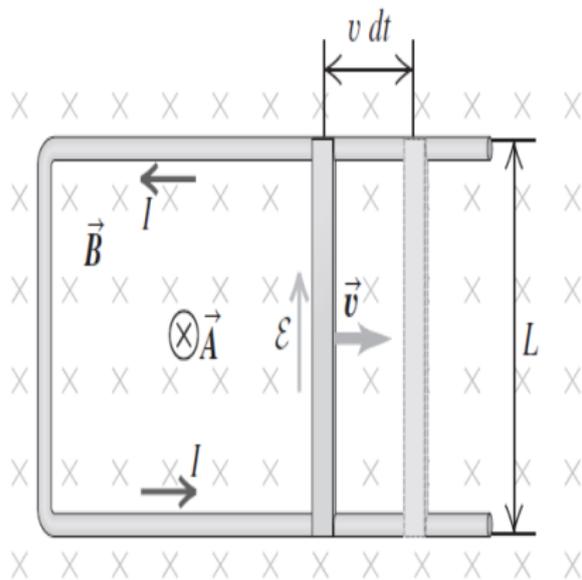
## Gerador 3: Um gerador com haste deslizante

- ▶ Uma condutor em forma de  $U$  está imerso em  $\vec{B}$  que é uniforme e constante.
- ▶ Uma haste de tamanho  $L$  é puxada com  $\vec{v}$ .
- ▶ Calcule a fem induzida.

$$d\Phi_B = B dA = BLv dt$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = BLv$$

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -BLv$$



## Gerador 3: Um gerador com haste deslizante

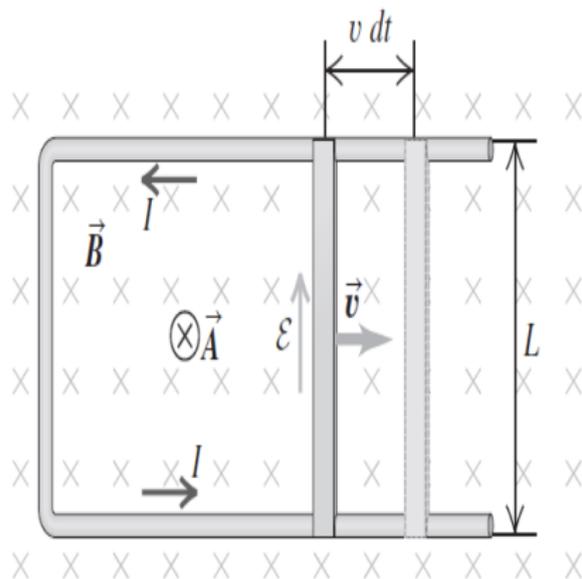
- ▶ Uma condutor em forma de  $U$  está imerso em  $\vec{B}$  que é uniforme e constante.
- ▶ Uma haste de tamanho  $L$  é puxada com  $\vec{v}$ .
- ▶ Calcule a fem induzida.

$$d\Phi_B = B dA = BLv dt$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = BLv$$

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -BLv$$

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{BLv}{R}$$



## Gerador 3: Um gerador com haste deslizante

- ▶ Um condutor em forma de  $U$  está imerso em  $\vec{B}$  que é uniforme e constante.
- ▶ Uma haste de tamanho  $L$  é puxada com  $\vec{v}$ .
- ▶ Calcule a fem induzida.

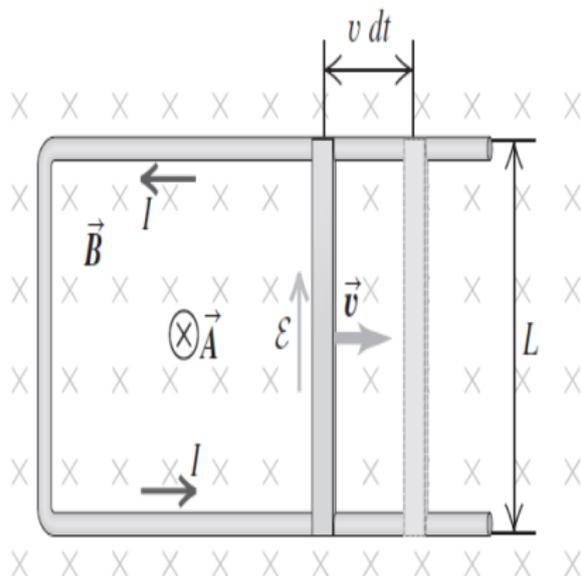
$$d\Phi_B = B dA = BLv dt$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = BLv$$

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -BLv$$

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{BLv}{R}$$

$$Pot_{diss} = I^2 R = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$$



## Gerador 3: Um gerador com haste deslizante

- ▶ Um condutor em forma de  $U$  está imerso em  $\vec{B}$  que é uniforme e constante.
- ▶ Uma haste de tamanho  $L$  é puxada com  $\vec{v}$ .
- ▶ Calcule a fem induzida.

$$d\Phi_B = BdA = BLvdt$$

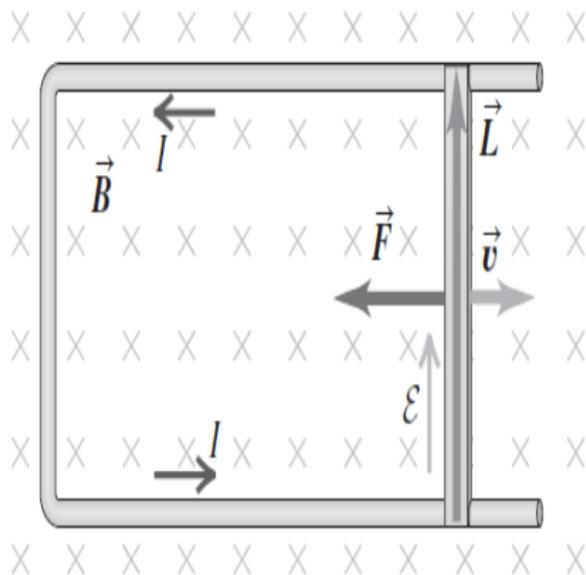
$$\frac{d\Phi_B}{dt} = BLv$$

$$\epsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -BLv$$

$$I = \frac{|\epsilon|}{R} = \frac{BLv}{R}$$

$$Pot_{diss} = I^2 R = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$$

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} \Rightarrow F = ILB$$



## Gerador 3: Um gerador com haste deslizante

- ▶ Um condutor em forma de  $U$  está imerso em  $\vec{B}$  que é uniforme e constante.
- ▶ Uma haste de tamanho  $L$  é puxada com  $\vec{v}$ .
- ▶ Calcule a fem induzida.

$$d\Phi_B = B dA = BLv dt$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = BLv$$

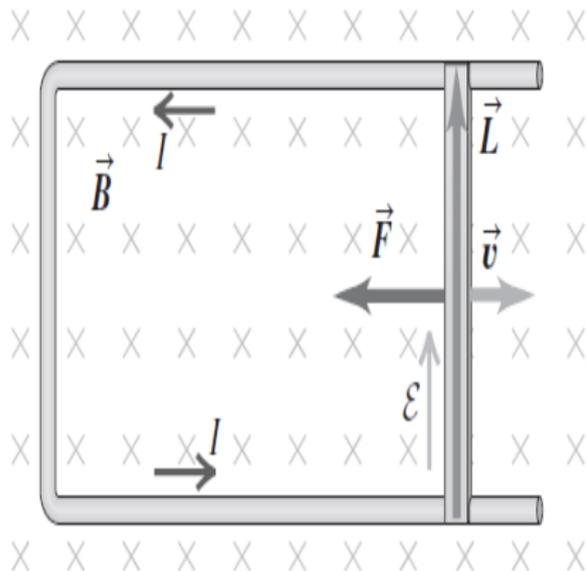
$$\epsilon = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -BLv$$

$$I = \frac{|\epsilon|}{R} = \frac{BLv}{R}$$

$$Pot_{diss} = I^2 R = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$$

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B} \Rightarrow F = ILB$$

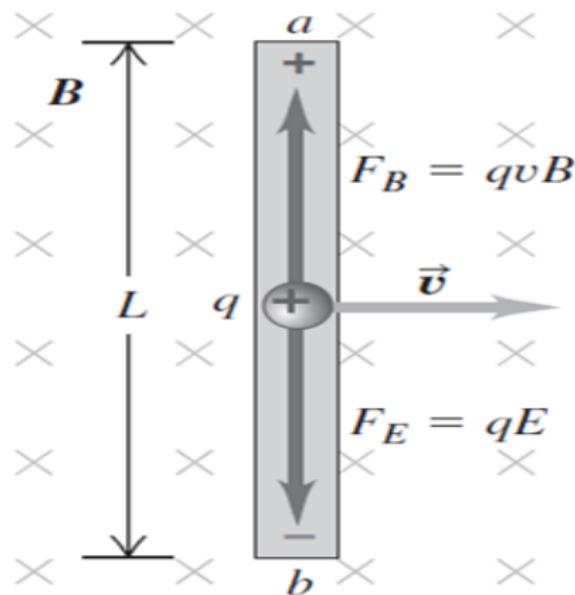
$$Pot_{diss} = Fv = ILBv = \frac{BLv}{R} LBv = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$$



## Força Eletromotriz Produzida pelo Movimento

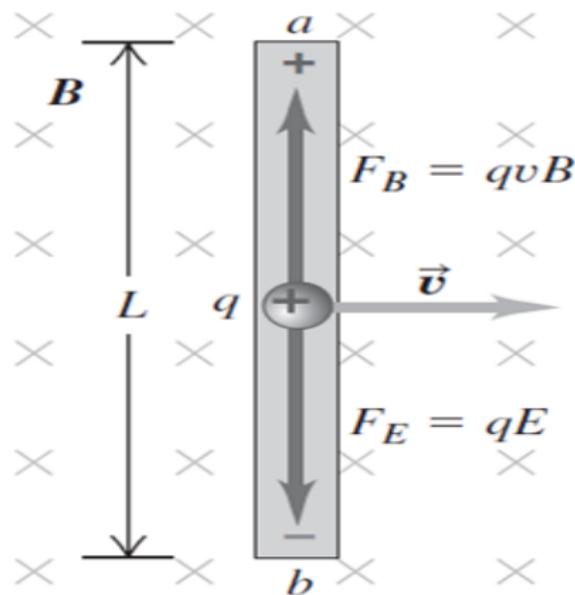
- Quando uma haste se move em um campo magnético as cargas sofrem uma força magnética dada por,

$$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow F_M = qvB.$$



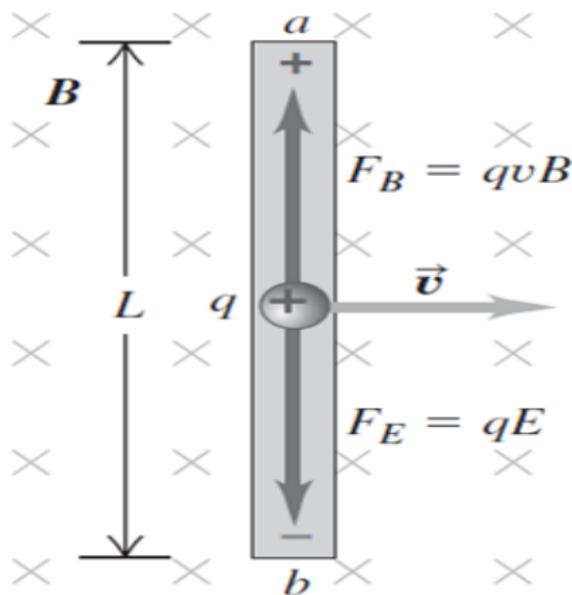
## Força Eletromotriz Produzida pelo Movimento

- ▶ Quando uma haste se move em um campo magnético as cargas sofrem uma força magnética dada por,  
 $\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow F_M = qvB.$
- ▶ Esta força criará uma separação de cargas criando assim uma força elétrica dada por:  
 $\vec{F}_E = q\vec{E} \Rightarrow F_E = qE$



## Força Eletromotriz Produzida pelo Movimento

- ▶ Quando uma haste se move em um campo magnético as cargas sofrem uma força magnética dada por,  
 $\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow F_M = qvB$ .
- ▶ Esta força criará uma separação de cargas criando assim uma força elétrica dada por:  
 $\vec{F}_E = q\vec{E} \Rightarrow F_E = qE$
- ▶ No equilíbrio  $F_M = F_E$ , assim  $E = vB$







Fem do movimento: Forma Generalizada

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Fem do movimento: Forma Generalizada

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ dW &= \vec{F} \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

Fem do movimento: Forma Generalizada

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ dW &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ dW &= qd\varepsilon\end{aligned}$$

Fem do movimento: Forma Generalizada

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ dW &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ dW &= qd\varepsilon \\ qd\varepsilon &= (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

Fem do movimento: Forma Generalizada

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ dW &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ dW &= qd\varepsilon \\ qd\varepsilon &= (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ d\varepsilon &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

Fem do movimento: Forma Generalizada

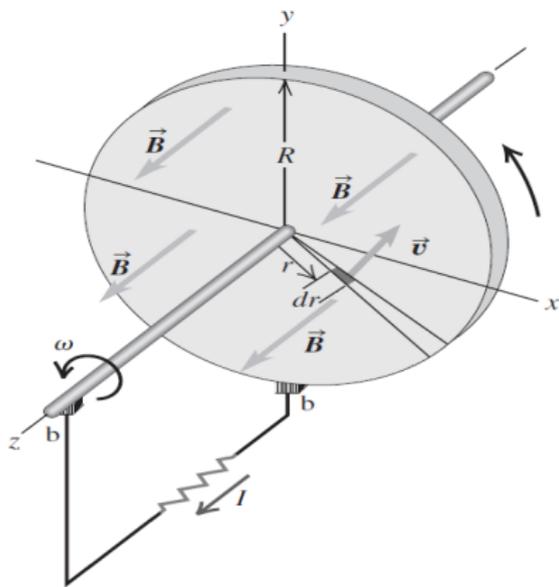
$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ dW &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ dW &= qd\varepsilon \\ qd\varepsilon &= (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ d\varepsilon &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ \varepsilon &= \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

## Força Eletromotriz Produzida pelo Movimento

Fem do movimento: Forma Generalizada

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ dW &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ dW &= qd\varepsilon \\ qd\varepsilon &= (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ d\varepsilon &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ \varepsilon &= \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

Considere um disco que gira com velocidade angular  $\omega$  constante. Calcule a fem.

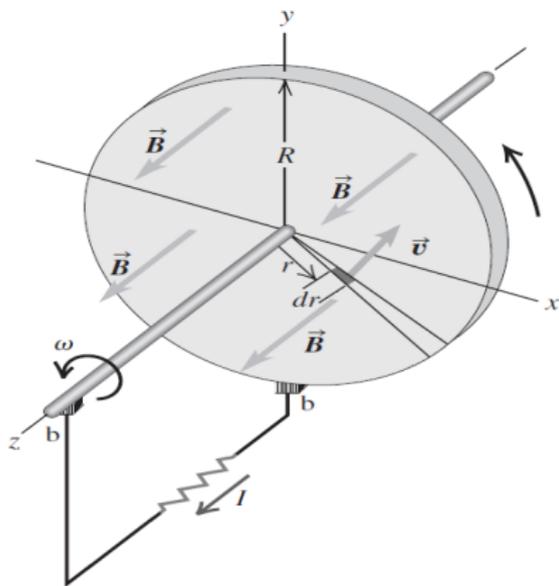


Fem do movimento: Forma Generalizada

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ dW &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ dW &= qd\varepsilon \\ qd\varepsilon &= (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ d\varepsilon &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ \varepsilon &= \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

Considere um disco que gira com velocidade angular  $\omega$  constante. Calcule a fem.

$$d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = vB\hat{r} \cdot d\vec{l} = \omega r B dr$$

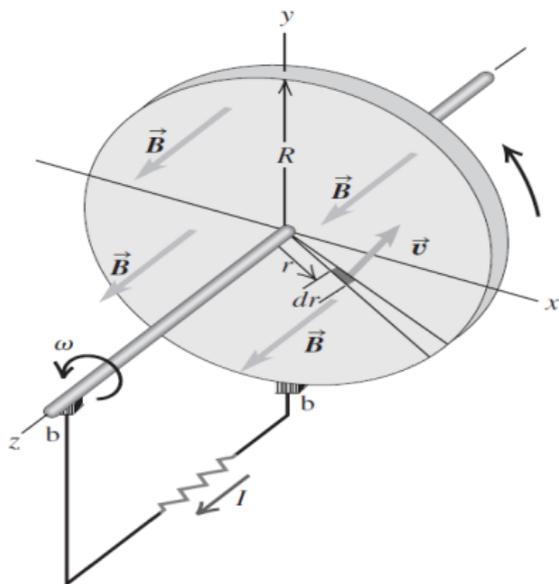


Fem do movimento: Forma Generalizada

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q\vec{v} \times \vec{B} \\ dW &= \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ dW &= qd\varepsilon \\ qd\varepsilon &= (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ d\varepsilon &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ \varepsilon &= \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

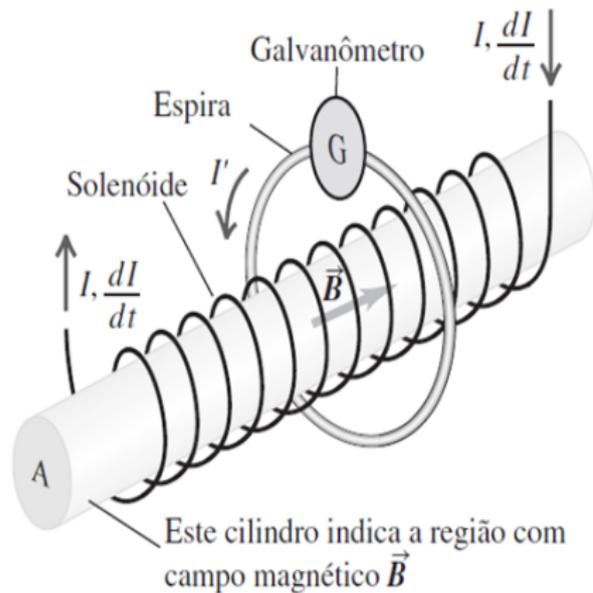
Considere um disco que gira com velocidade angular  $\omega$  constante. Calcule a fem.

$$\begin{aligned}d\varepsilon &= (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = vB\hat{r} \cdot d\vec{l} = \omega rBdr \\ \varepsilon &= \int_0^R \omega Brdr = \frac{1}{2}\omega BR^2\end{aligned}$$



O campo  $\vec{B}$  gerado por um solenóide com  $n$  espiras por unidade de comprimento transportando uma corrente  $I$  é dado por,

$$B = \mu_0 n I$$











O fluxo magnético na espira com área  $\vec{A}$  tomada na mesma direção e sentido de  $\vec{B}$  será,

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA = \mu_0 nIA$$

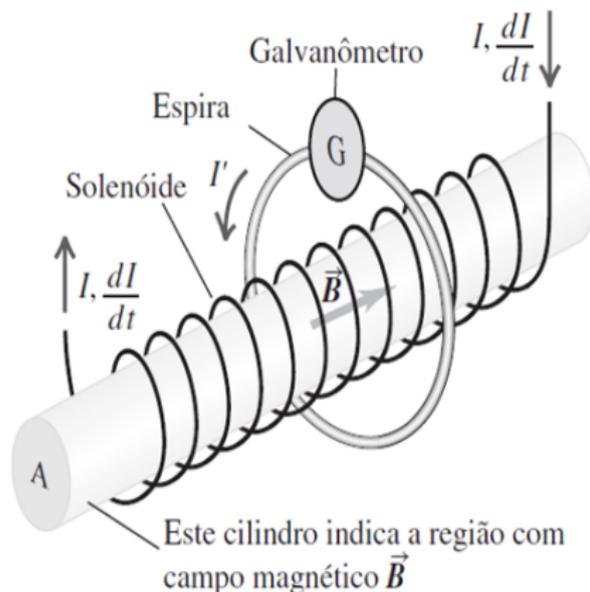
Quando a corrente variar no tempo a fem induzida será,

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 nA \frac{dI}{dt}$$

Dado a resistência  $R$ , da bobina então a corrente induzida  $I'$ , será:

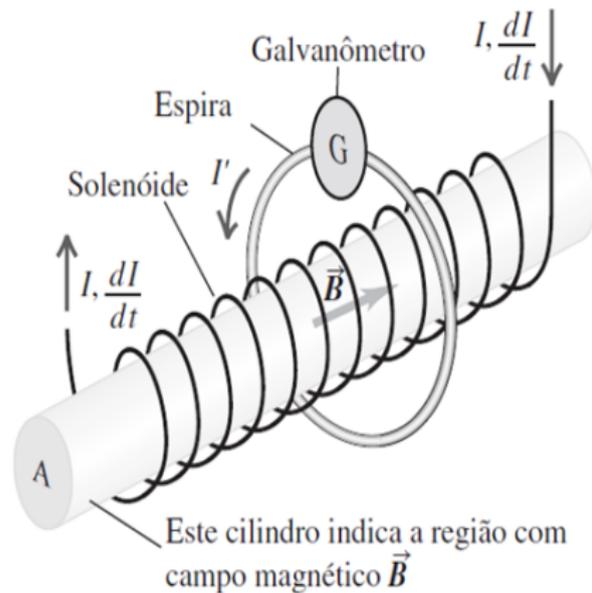
$$I' = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{\mu_0 nA}{R} \frac{dI}{dt}$$

- ▶ Qual a força que atua sobre as cargas obrigando-as a se mover ao longo do circuito?
- ▶ Somos forçados a concluir que se trata de um **campo elétrico induzido** no condutor produzido pela **variação do fluxo magnético**.



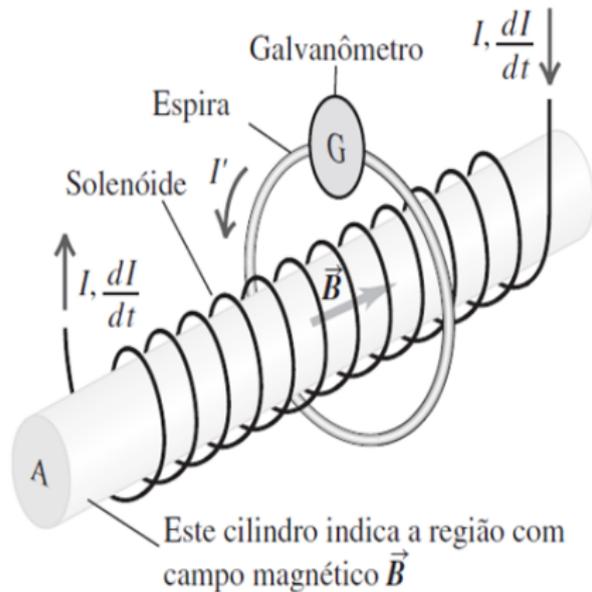
- ▶ Quando uma carga  $q$  completa uma volta o

$$W = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = q\varepsilon.$$



## Campos Elétricos Induzidos

- ▶ Quando uma carga  $q$  completa uma volta o  $W = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = q\varepsilon$ .
- ▶ Logo o campo elétrico induzido **não é conservativo**, porque a integral de linha do campo elétrico em um circuito fechada não é igual a zero.



- ▶ Quando uma carga  $q$  completa uma volta o  $W = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = q\varepsilon$ .
- ▶ Logo o campo elétrico induzido **não é conservativo**, porque a integral de linha do campo elétrico em um circuito fechada não é igual a zero.
- ▶ No entanto é igual a,

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- ▶ Quando uma carga  $q$  completa uma volta o  $W = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = q\varepsilon$ .
- ▶ Logo o campo elétrico induzido **não é conservativo**, porque a integral de linha do campo elétrico em um circuito fechada não é igual a zero.
- ▶ No entanto é igual a,

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

- ▶ Quando uma carga  $q$  completa uma volta o  $W = q \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = q\varepsilon$ .
- ▶ Logo o campo elétrico induzido **não é conservativo**, porque a integral de linha do campo elétrico em um circuito fechada não é igual a zero.
- ▶ No entanto é igual a,

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Válida somente quando o percurso utilizado na integração permanece constante.

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

**Válida somente quando o percurso utilizado na integração permanece constante.**

- Do teorema de Stokes temos que,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}$$

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Válida somente quando o percurso utilizado na integração permanece constante.

• Do teorema de Stokes temos que,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}$$

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = \int_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{A}$$

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

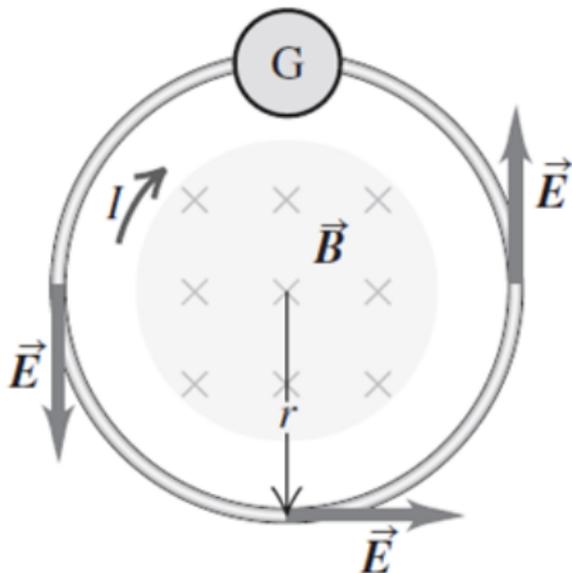
Válida somente quando o percurso utilizado na integração permanece constante.

• Do teorema de Stokes temos que,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A}$$

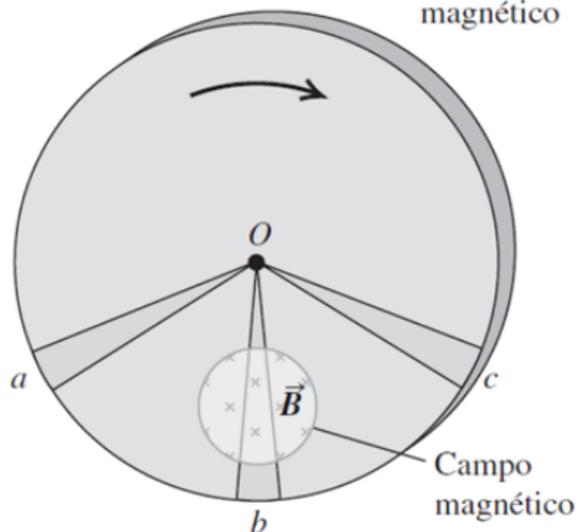
$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = \int_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$



- ▶ O setor  $Ob$  se desloca através do campo magnético e possui uma fem induzida através dele.

Um disco metálico girando em um campo magnético







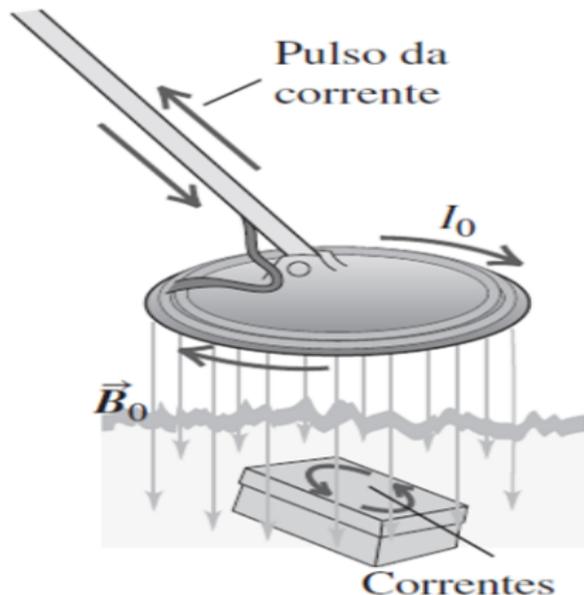


## └ Correntes de Foucault

- ▶ O setor  $Ob$  se desloca através do campo magnético e possui uma fem induzida através dele.
- ▶ Os setores  $Oa$  e  $Oc$  não estão no campo magnético.
- ▶ No entanto, permitem um caminho de retorno para as cargas que se deslocaram para  $b$  retornar para  $O$ .

### Exemplo de aplicação:

- ▶ Detectores de metais.
- ▶ Freios magnéticos.

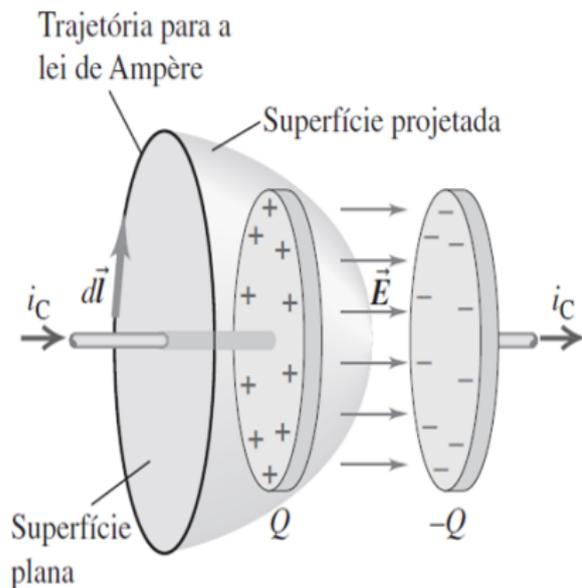




## Generalização da Lei de Ampère

- A lei de Ampère: equação está incompleta!

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{liq}$$









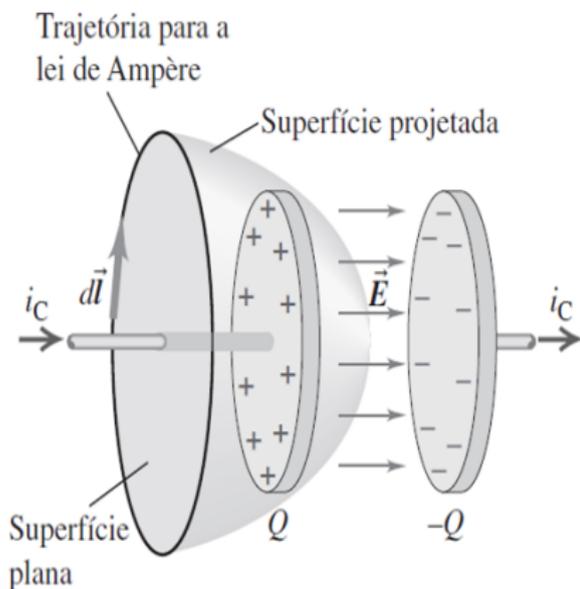
## Generalização da Lei de Ampère

- ▶ **A lei de Ampere: equação está incompleta!**

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{liq}$$

- ▶ Considere o processo de carga de um capacitor.
- ▶ Fios conduzem uma corrente de condução  $i_c$  de uma placa para outra. A carga  $Q$  aumenta e o campo elétrico  $\vec{E}$  entre as placas aumenta.
- ▶ Da superfície plana vemos que:

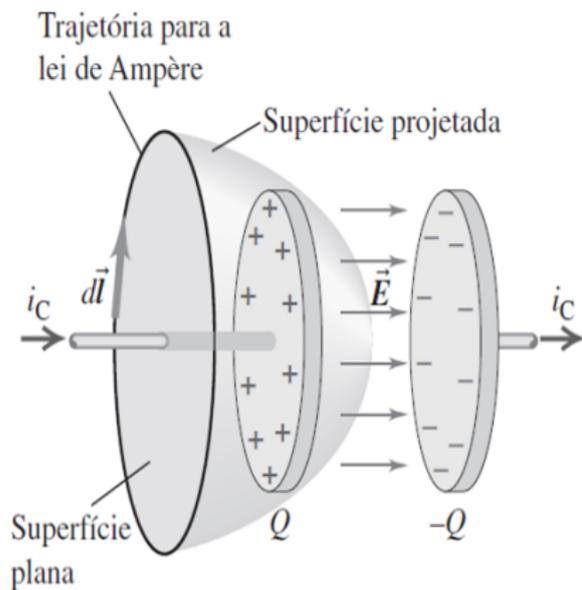
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_c$$





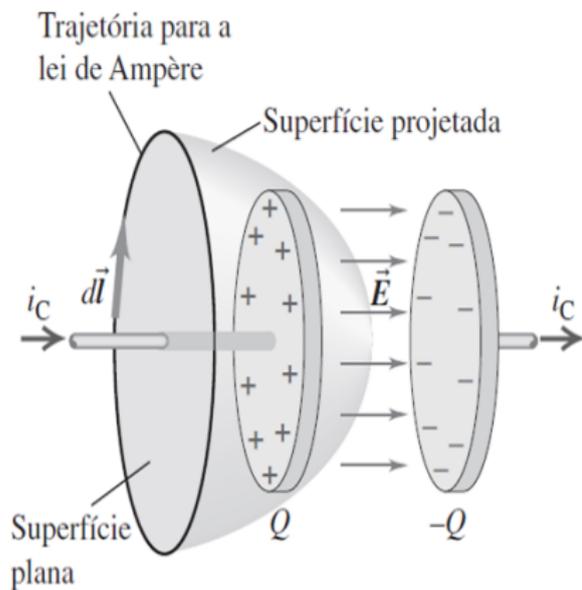


- ▶ Na superfície projetada, a medida que o capacitor carrega o fluxo elétrico  $\Phi_E$  que atravessa essa superfície aumenta.



- ▶ Na superfície projetada, a medida que o capacitor carrega o fluxo elétrico  $\Phi_E$  que atravessa essa superfície aumenta.

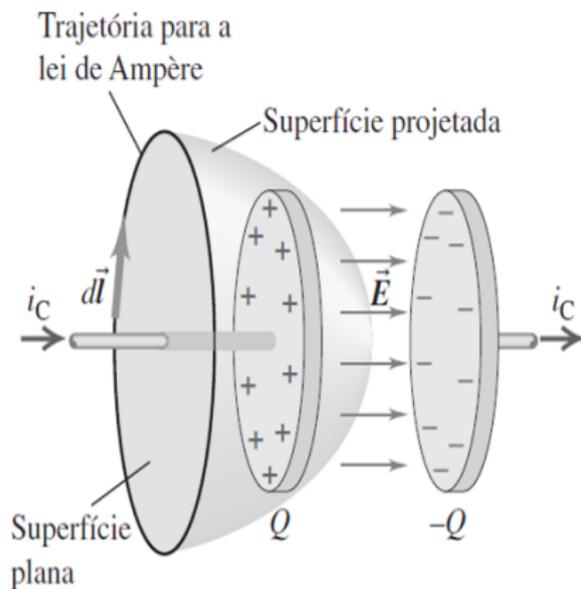
$$q(t) = Cv(t)$$



- ▶ Na superfície projetada, a medida que o capacitor carrega o fluxo elétrico  $\Phi_E$  que atravessa essa superfície aumenta.

$$q(t) = Cv(t)$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$





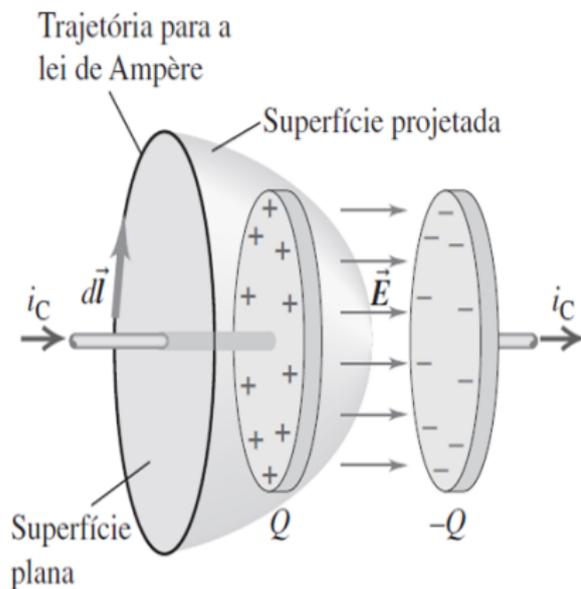
- ▶ Na superfície projetada, a medida que o capacitor carrega o fluxo elétrico  $\Phi_E$  que atravessa essa superfície aumenta.

$$q(t) = C_V(t)$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$v(t) = E(t)d$$

$$q(t) = \frac{\epsilon_0 A}{d} dE(t) = \epsilon_0 A E(t)$$



- Na superfície projetada, a medida que o capacitor carrega o fluxo elétrico  $\Phi_E$  que atravessa essa superfície aumenta.

$$q(t) = C v(t)$$

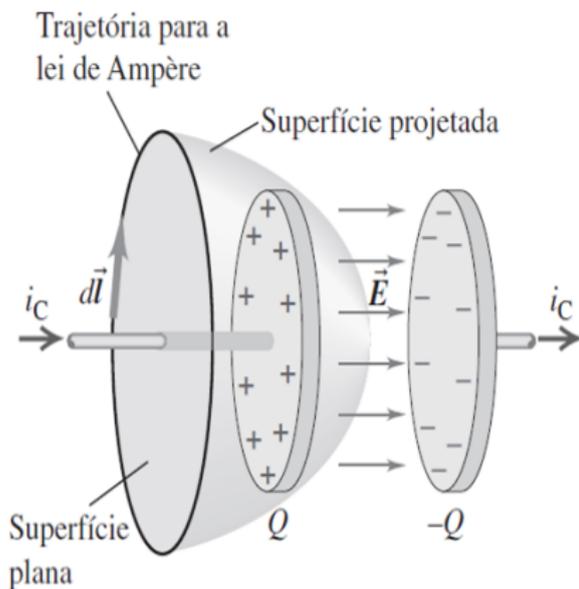
$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$v(t) = E(t)d$$

$$q(t) = \frac{\epsilon_0 A}{d} dE(t) = \epsilon_0 A E(t)$$

$$q(t) = \epsilon_0 \Phi_E(t)$$

$$i_c(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E(t)}{dt}$$





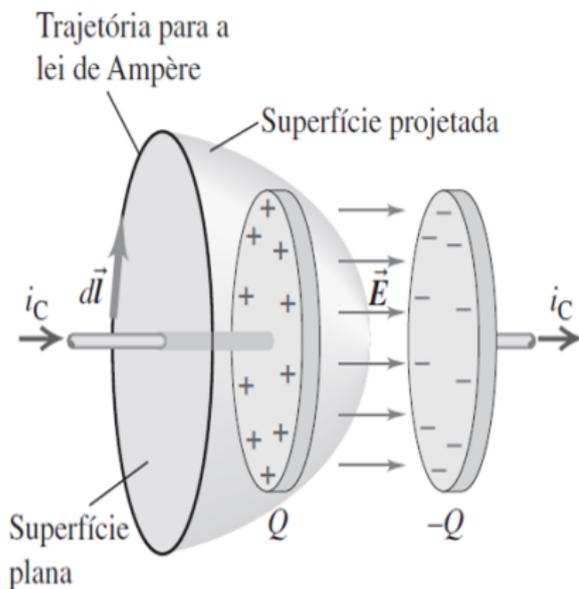
- Definiremos que existe uma corrente na região entre as placas, chamada de **corrente de deslocamento**  $i_D$ , dada por:

$$i_D(t) = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E(t)}{dt}$$

- A lei de Ampere se tornará:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_c + i_D)_{liq}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( i_c + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{liq}$$



## Corrente de deslocamento e equações de Maxwell

- Definiremos que existe uma corrente na região entre as placas, chamada de **corrente de deslocamento**  $i_D$ , dada por:

$$i_D(t) = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E(t)}{dt}$$

- A lei de Ampere se tornará:

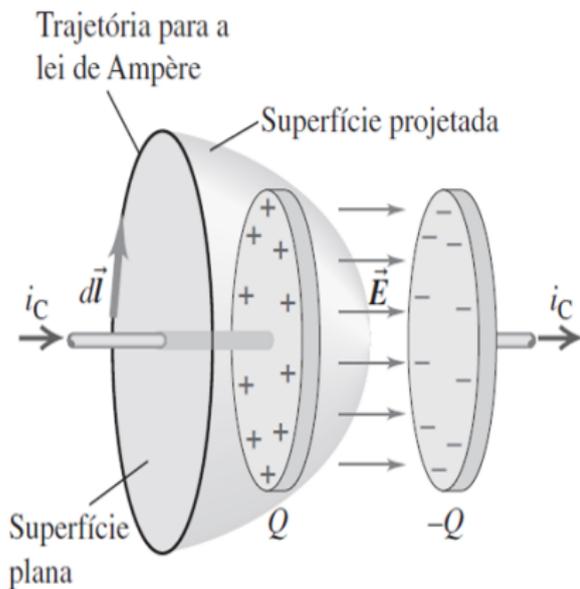
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0(i_c + i_D)_{liq}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( i_c + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{liq}$$

- Podemos definir uma densidade de corrente de deslocamento  $\vec{J}_D$  por:

$$i_D = \int \vec{J}_D \cdot d\vec{A} = \int \left( \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} \right) \cdot d\vec{A}$$

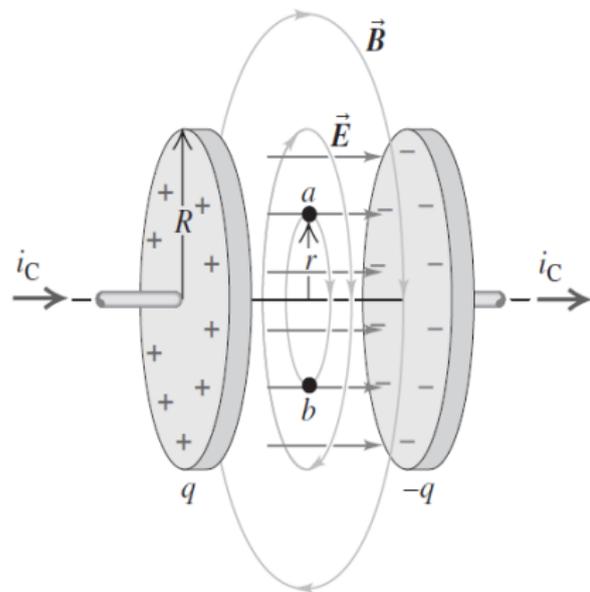
$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$



## A realidade da corrente de deslocamento

- Aplicando a lei de Ampere em um círculo de raio  $r < R$  dentro do capacitor temos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi rB = \mu_0 j_D A$$

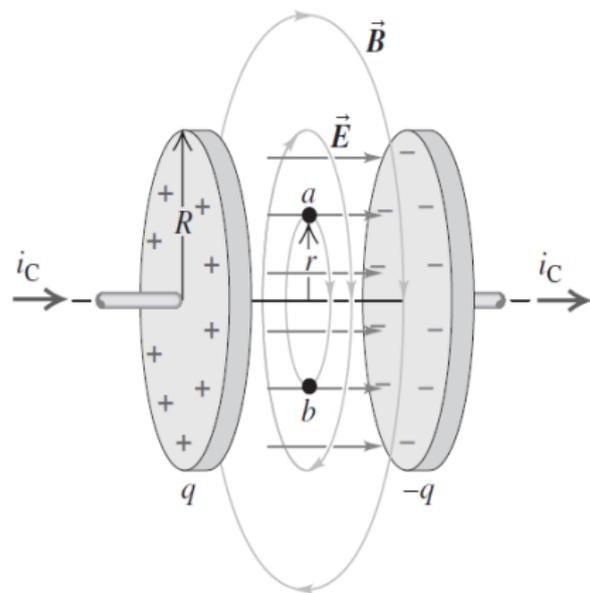


## A realidade da corrente de deslocamento

- Aplicando a lei de Ampere em um círculo de raio  $r < R$  dentro do capacitor temos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi rB = \mu_0 j_D A$$

$$2\pi rB = \mu_0 \frac{i_c}{\pi R^2} \pi r^2$$



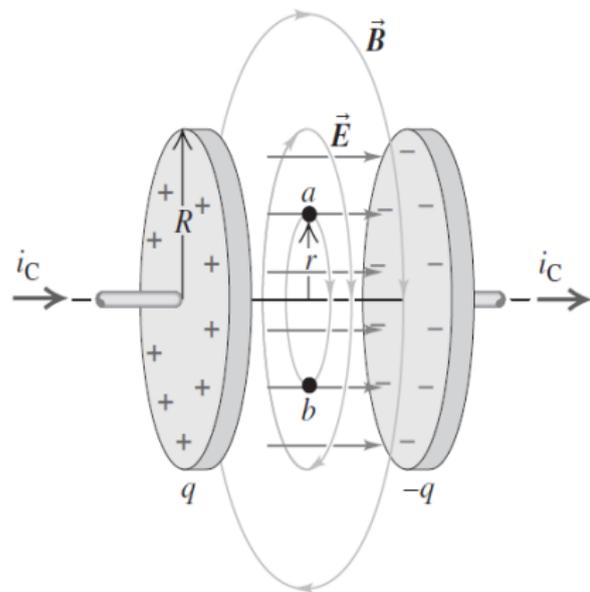
## A realidade da corrente de deslocamento

- Aplicando a lei de Ampere em um círculo de raio  $r < R$  dentro do capacitor temos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi rB = \mu_0 j_D A$$

$$2\pi rB = \mu_0 \frac{i_c}{\pi R^2} \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} i_c, \text{ se } r < R$$



## A realidade da corrente de deslocamento

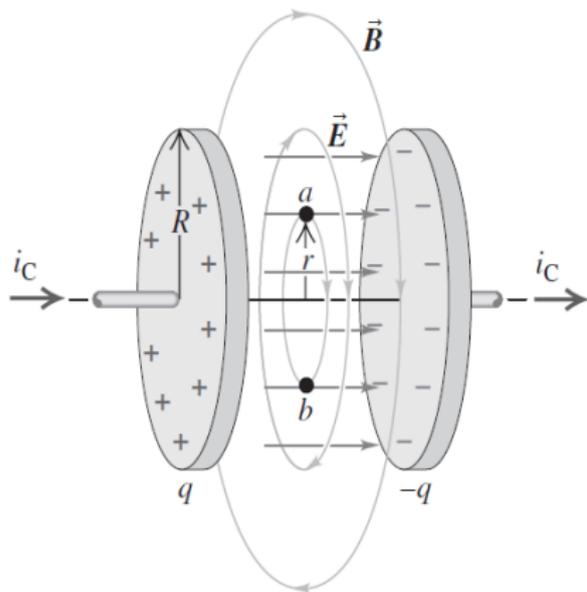
- Aplicando a lei de Ampere em um círculo de raio  $r < R$  dentro do capacitor temos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi rB = \mu_0 j_D A$$

$$2\pi rB = \mu_0 \frac{i_c}{\pi R^2} \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} i_c, \text{ se } r < R$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_c}{R}, \text{ se } r \geq R$$



## A realidade da corrente de deslocamento

- ▶ Aplicando a lei de Ampere em um círculo de raio  $r < R$  dentro do capacitor temos:

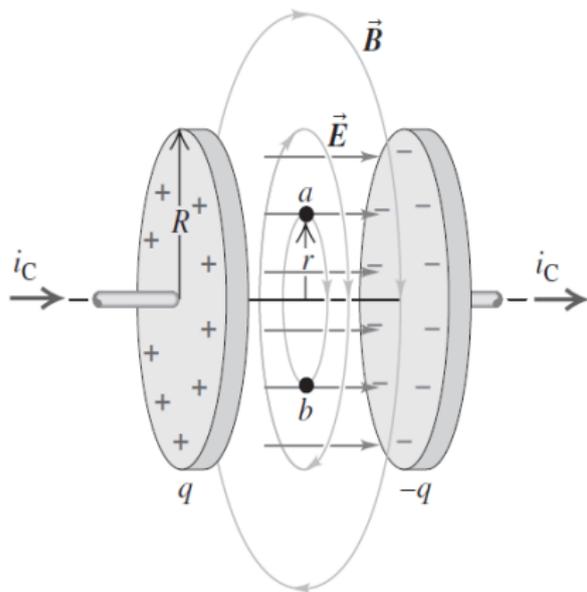
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi rB = \mu_0 j_D A$$

$$2\pi rB = \mu_0 \frac{i_c}{\pi R^2} \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{r}{R^2} i_c, \text{ se } r < R$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_c}{R}, \text{ se } r \geq R$$

- ▶ Esse resultado é confirmado experimentalmente.



## Equações de Maxwell para o Eletromagnetismo

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{A} = \int (\nabla \cdot \vec{f}) dV \quad ; \quad \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{f}) \cdot d\vec{A}$$

$$Q = \int \rho dV \quad ; \quad I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad ; \quad \Phi_f = \int \vec{f} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{Lig}}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

## Equações de Maxwell para o Eletromagnetismo

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{A} = \int (\nabla \cdot \vec{f}) dV \quad ; \quad \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{f}) \cdot d\vec{A}$$

$$Q = \int \rho dV \quad ; \quad I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad ; \quad \Phi_f = \int \vec{f} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{Lig}}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

## Equações de Maxwell para o Eletromagnetismo

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{A} = \int (\nabla \cdot \vec{f}) dV \quad ; \quad \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{f}) \cdot d\vec{A}$$

$$Q = \int \rho dV \quad ; \quad I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad ; \quad \Phi_f = \int \vec{f} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{Lig}}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

## Equações de Maxwell para o Eletromagnetismo

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{A} = \int (\nabla \cdot \vec{f}) dV \quad ; \quad \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{f}) \cdot d\vec{A}$$

$$Q = \int \rho dV \quad ; \quad I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} \quad ; \quad \Phi_f = \int \vec{f} \cdot d\vec{A}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{Lig}}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left( I_c + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)_{liq}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

## A luz como uma onda eletromagnética

- ▶ No vácuo, não existe carga assim,  $\rho = 0$  e  $\vec{J}_c = 0$ .

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

## A luz como uma onda eletromagnética

- No vácuo, não existe carga assim,  $\rho = 0$  e  $\vec{J}_c = 0$ .

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$$

## A luz como uma onda eletromagnética

► No vácuo, não existe carga assim,  $\rho = 0$  e

$$\vec{J}_c = 0.$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial(\nabla \times \vec{B})}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \times \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial(\nabla \times \vec{E})}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

## A luz como uma onda eletromagnética

- No vácuo, não existe carga assim,  $\rho = 0$  e  $\vec{J}_c = 0$ .

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial(\nabla \times \vec{B})}{\partial t} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) &= \nabla \times \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial(\nabla \times \vec{E})}{\partial t} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) &= -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

## A luz como uma onda eletromagnética

► No vácuo, não existe carga assim,  $\rho = 0$  e

$$\vec{J}_c = 0.$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial(\nabla \times \vec{B})}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \times \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial(\nabla \times \vec{E})}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$-\nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

Equação de Onda