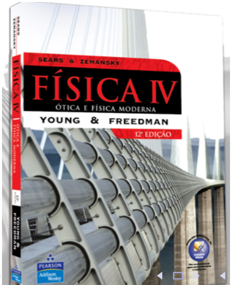
Capítulo 41 Estrutura Atômica

RODRIGO ALVES DIAS

Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF

Livro texto: Física 3 - Eletromagnetismo
Autores: Sears e Zemansky
Edição: 12ª
Editora: Pearson - Addisson and Wesley

20 de agosto de 2013



Objetivos de Aprendizagem

Ao estudar este capítulo você aprenderá:

- Como descrever as estados de um átomo de hidrogênio em termos de números quânticos.

Objetivos de Aprendizagem

Ao estudar este capítulo você aprenderá:

- Como descrever as estados de um átomo de hidrogênio em termos de números quânticos.
- De que forma os campos magnéticos afetam o movimento orbital dos elétrons.

Objetivos de Aprendizagem

Ao estudar este capítulo você aprenderá:

- Como descrever as estados de um átomo de hidrogênio em termos de números quânticos.
- De que forma os campos magnéticos afetam o movimento orbital dos elétrons.
- Como sabemos que as elétrons são dotados de momento angular intrínseco.

Objetivos de Aprendizagem

Ao estudar este capítulo você aprenderá:

- Como descrever as estados de um átomo de hidrogênio em termos de números quânticos.
- De que forma os campos magnéticos afetam o movimento orbital dos elétrons.
- Como sabemos que as elétrons são dotados de momento angular intrínseco.
- A maneira de analisar a estrutura de átomos com muitos elétrons.

Objetivos de Aprendizagem

Ao estudar este capítulo você aprenderá:

- Como descrever as estados de um átomo de hidrogênio em termos de números quânticos.
- De que forma os campos magnéticos afetam o movimento orbital dos elétrons.
- Como sabemos que as elétrons são dotados de momento angular intrínseco.
- A maneira de analisar a estrutura de átomos com muitos elétrons.
- Como raios X emitidos por átomos revelam sua estrutura interna.

Quantização do momento angular orbital

- O vetor momento angular é definido por:
  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

Quantização do momento angular orbital

- O vetor momento angular é definido por: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.
- O operador momento linear é definido por: $\vec{p} = -i\hbar\nabla$.

$$
\begin{aligned}
p_x &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \\
p_y &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} \\
p_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}
$$

Quantização do momento angular orbital

- O vetor momento angular é definido por: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.
- O operador momento linear é definido por: $\vec{p} = -i\hbar\nabla$.

$$
\begin{aligned}
p_x &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \\
p_y &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} \\
p_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}
$$

- O operador momento angular será,

$$
\begin{aligned}
L_x &= yp_z - zp_y = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
L_y &= zp_x - xp_z = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\
L_z &= xp_y - yp_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

Quantização do momento angular orbital

- O vetor momento angular é definido por: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.
- O operador momento linear é definido por: $\vec{p} = -i\hbar\nabla$.

$$\begin{aligned} p_x &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \\ p_y &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} \\ p_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

- O operador momento angular será,

$$\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ L_y &= zp_x - xp_z = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ L_z &= xp_y - yp_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{aligned}$$

- Em coordenadas polares $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$ e $z = r\cos\theta$.

$$\begin{aligned} L_x &= -i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + cotg\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ L_y &= -i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + cotg\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ L_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \end{aligned}$$

- Os valores possíveis do modulo do momento angular L são determinados por:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \quad (l = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

Número quântico orbital

Quantização do momento angular orbital

- Os valores permitidos para os componentes do vetor $\vec{L}$, digamos L_z são:

$$L_z = \hbar m_l, \quad (m_l = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l)$$

Número quântico magnético

- Em coordenadas polares $x = r \sin\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \sin\phi$ e $z = r\cos\theta$.

$$\begin{aligned} L_x &= -i\hbar\left(\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + cotg\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ L_y &= -i\hbar\left(-\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + cotg\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\ L_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} \end{aligned}$$

- Os valores possíveis do modulo do momento angular L são determinados por:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \quad (l = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

Número quântico orbital

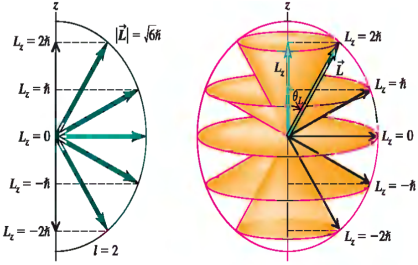
Quantização do momento angular orbital

- Os valores permitidos para os componentes do vetor $\vec{L}$, digamos L_z são:

$$L_z = \hbar m_l, \quad (m_l = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l)$$

Número quântico magnético

- A componente L_z nunca pode ser igual a L (a menos que ambos sejam nulos).



$$\theta_L = \arccos \frac{L_z}{L}$$

- Em coordenadas polares $x = r \sin\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \sin\phi$ e $z = r\cos\theta$.

$$L_x = -i\hbar\left(\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + cotg\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_y = -i\hbar\left(-\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + cotg\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi}$$

- Os valores possíveis do modulo do momento angular L são determinados por:

$$L = \hbar\sqrt{l(l+1)}, \quad (l = 0, 1, 2, ..., n-1)$$

Número quântico orbital

- Para $l = 2$, $m_l = 0, \pm 1, \pm 2$
  $L = \sqrt{6}\hbar$, $L_z = 2\hbar$ e $\theta_L = 35,3^o$.

- A eq. de Schrödinger indep. do tempo para o átomo de Hidrogênio é,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y,z)-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\psi(x,y,z) \quad = \quad E\psi(x,y,z)$$

- A eq. de Schrödinger indep. do tempo para o átomo de Hidrogênio é,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y,z) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\psi(x,y,z) \quad = \quad E\psi(x,y,z)$$

- Como a energia potencial é esfericamente simétrica, dependendo somente de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

- A eq. de Schrödinger indep. do tempo para o átomo de Hidrogênio é,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y,z)-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\psi(x,y,z) \quad = \quad E\psi(x,y,z)$$

- Como a energia potencial é esfericamente simétrica, dependendo somente de $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- Usaremos essa simetria, fazendo $\psi(x,y,z)\rightarrow\psi(r,\theta,\phi)$.

- A eq. de Schrödinger indep. do tempo para o átomo de Hidrogênio é,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y,z)-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\psi(x,y,z) \quad = \quad E\psi(x,y,z)$$

- Como a energia potencial é esfericamente simétrica, dependendo somente de $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- Usaremos essa simetria, fazendo $\psi(x,y,z)\rightarrow\psi(r,\theta,\phi)$.

$$\nabla^2\psi \quad = \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

- A eq. de Schrödinger indep. do tempo para o átomo de Hidrogênio é,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y,z) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\psi(x,y,z) \quad = \quad E\psi(x,y,z)$$

- Como a energia potencial é esfericamente simétrica, dependendo somente de $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Usaremos essa simetria, fazendo $\psi(x,y,z) \to \psi(r,\theta,\phi)$.

$$\nabla^2\psi \quad = \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla^2\psi \quad = \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)}{r^2}\psi$$

- A eq. de Schrödinger indep. do tempo para o átomo de Hidrogênio é,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y,z) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\psi(x,y,z) \quad = \quad E\psi(x,y,z)$$

- Como a energia potencial é esfericamente simétrica, dependendo somente de $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- Usaremos essa simetria, fazendo $\psi(x,y,z) \to \psi(r,\theta,\phi)$.

$$\nabla^2\psi \quad = \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

$$\nabla^2\psi \quad = \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)}{r^2}\psi$$

$$\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)\psi \quad = \quad \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

- A eq. de Schrödinger indep. do tempo para o átomo de Hidrogênio é,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y,z) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\psi(x,y,z) \quad = \quad E\psi(x,y,z)$$

- Como a energia potencial é esfericamente simétrica, dependendo somente de $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- Usaremos essa simetria, fazendo $\psi(x,y,z) \rightarrow \psi(r,\theta,\phi)$.

$$\nabla^2\psi \quad = \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2\psi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)}{r^2}\psi \\
\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)\psi &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \\
\psi(r,\theta,\phi) &= R(r)T(\theta)P(\phi)
\end{aligned}$$

- A eq. de Schrödinger indep. do tempo para o átomo de Hidrogênio é,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y,z) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\psi(x,y,z) \quad = \quad E\psi(x,y,z)$$

- Como a energia potencial é esfericamente simétrica, dependendo somente de $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
- Usaremos essa simetria, fazendo $\psi(x,y,z) \to \psi(r,\theta,\phi)$.

$$\nabla^2\psi \quad = \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2\psi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)}{r^2}\psi \\
\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)\psi &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \\
\psi(r,\theta,\phi) &= R(r)T(\theta)P(\phi)
\end{aligned}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r}\right) + \frac{\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)}{r^2}\psi\right] - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\psi(r,\theta,\phi) \quad = \quad E\psi(r,\theta,\phi)$$

- A eq. de Schrödinger indep. do tempo para o átomo de Hidrogênio é,

$$\begin{aligned}
\nabla^2\psi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)}{r^2}\psi \\
\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)\psi &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \\
\psi(r,\theta,\phi) &= R(r)T(\theta)P(\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r}\right)+\frac{\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)}{r^2}\psi\right]-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\psi(r,\theta,\phi) &= E\psi(r,\theta,\phi) \\
\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)\right]+\frac{1}{R}\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[E+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]R(r) &= \frac{1}{TP}\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)T(\theta)P(\phi)=C
\end{aligned}$$

- A eq. de Schrödinger indep. do tempo para o átomo de Hidrogênio é,

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\psi &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)}{r^2}\psi \\
\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)\psi &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \\
\psi(r,\theta,\phi) &= R(r)T(\theta)P(\phi)
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r}\right) + \frac{\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)}{r^2}\psi\right] - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\psi(r,\theta,\phi) \quad = \quad E\psi(r,\theta,\phi)
$$

$$
\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)\right] + \frac{1}{R}\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]R(r) \quad = \quad \frac{1}{TP}\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)T(\theta)P(\phi) = C
$$

$$
\frac{1}{TP}\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)TP = \left[\frac{1}{T}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{P}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial\phi^2}\right] \quad = \quad C
$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r}\right)+\frac{\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)}{r^2}\psi\right]-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\psi(r,\theta,\phi) \quad = \quad E\psi(r,\theta,\phi)$$

$$\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)\right]+\frac{1}{R}\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[E+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]R(r) \quad = \quad \frac{1}{TP}\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)T(\theta)P(\phi)=C$$

$$\frac{1}{TP}\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)TP=\left[\frac{1}{T}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{P}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial\phi^2}\right] \quad = \quad C$$

$$\left[\frac{1}{T}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)-C\sin^2\theta\right] \quad = \quad -\frac{1}{P}\frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial\phi^2}=m_l^2$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r}\right)+\frac{\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)}{r^2}\psi\right]-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\psi(r,\theta,\phi) &= E\psi(r,\theta,\phi) \\
\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)\right]+\frac{1}{R}\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[E+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]R(r) &= \frac{1}{TP}\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)T(\theta)P(\phi)=C \\
\frac{1}{TP}\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)TP=\left[\frac{1}{T}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{P}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2P(\phi)}{\partial\phi^2}\right] &= C \\
\left[\frac{1}{T}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)-C\sin^2\theta\right] &= -\frac{1}{P}\frac{\partial^2P(\phi)}{\partial\phi^2}=m_l^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2P(\phi)}{\partial\phi^2} &= -m_l^2P(\phi) \\
P(\phi) &= e^{-im_l\phi}
\end{aligned}
$$

- As $T(\theta)$ e $P(\phi)$ devem ser periódicas.

$$
\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r}\right)+\frac{\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)}{r^2}\psi\right]-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\psi(r,\theta,\phi) &= E\psi(r,\theta,\phi) \\
\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)\right]+\frac{1}{R}\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[E+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]R(r) &= \frac{1}{TP}\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)T(\theta)P(\phi)=C \\
\frac{1}{TP}\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)TP=\left[\frac{1}{T}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{P}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial\phi^2}\right] &= C \\
\left[\frac{1}{T}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)-C\sin^2\theta\right] &= -\frac{1}{P}\frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial\phi^2}=m_l^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial\phi^2} &= -m_l^2 P(\phi) \\
P(\phi) &= e^{-im_l\phi}
\end{aligned}
$$

- $T(\theta)=T(\theta+\pi)$ e $P(\phi)=P(\phi+2\pi)$.

$$
\begin{aligned}
P(0) &= P(2\pi) \\
\cos(m_l 2\pi)-i\sin(m_l 2\pi) &= 1
\end{aligned}
$$

- As $T(\theta)$ e $P(\phi)$ devem ser periódicas.

$$
\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r}\right)+\frac{\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)}{r^2}\psi\right]-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\psi(r,\theta,\phi) &= E\psi(r,\theta,\phi) \\
\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)\right]+\frac{1}{R}\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[E+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]R(r) &= \frac{1}{TP}\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)T(\theta)P(\phi)=C \\
\frac{1}{TP}\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)TP=\left[\frac{1}{T}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{P}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial\phi^2}\right] &= C \\
\left[\frac{1}{T}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)-C\sin^2\theta\right] &= -\frac{1}{P}\frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial\phi^2}=m_l^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial\phi^2} &= -m_l^2 P(\phi) \\
P(\phi) &= e^{-im_l\phi}
\end{aligned}
$$

- As $T(\theta)$ e $P(\phi)$ devem ser periódicas.

- $T(\theta)=T(\theta+\pi)$ e $P(\phi)=P(\phi+2\pi)$.

$$
\begin{aligned}
P(0) &= P(2\pi) \\
\cos(m_l 2\pi)-i\sin(m_l 2\pi) &= 1 \\
m_l &= 0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)\right]+\frac{1}{R}\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[E+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]R(r) = \frac{1}{TP}\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)T(\theta)P(\phi)=C$$

$$\frac{1}{TP}\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)TP=\left[\frac{1}{T}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{P}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial\phi^2}\right] = C$$

$$\left[\frac{1}{T}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)-C\sin^2\theta\right] = -\frac{1}{P}\frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial\phi^2}=m_l^2$$

$$\frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial\phi^2} = -m_l^2 P(\phi)$$
$$P(\phi) = e^{-im_l\phi}$$

- As $T(\theta)$ e $P(\phi)$ devem ser periódicas.

- $T(\theta)=T(\theta+\pi)$ e $P(\phi)=P(\phi+2\pi)$.

$$\begin{aligned}P(0) &= P(2\pi)\\ \cos(m_l 2\pi)-i\sin(m_l 2\pi) &= 1\\ m_l &= 0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{m_l^2}{\sin^2\theta}T(\theta) = CT(\theta)$$

$$\frac{1}{TP}\vec{L}^2_{op}(\theta,\phi)TP = \left[\frac{1}{T}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{P}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial\phi^2}\right] = C$$

$$\left[\frac{1}{T}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)-C\sin^2\theta\right] = -\frac{1}{P}\frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial\phi^2} = m_l^2$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P(\phi)}{\partial\phi^2} &= -m_l^2 P(\phi)\\ P(\phi) &= e^{-im_l\phi}\end{aligned}$$

- As $T(\theta)$ e $P(\phi)$ devem ser periódicas.
- $T(\theta)=T(\theta+\pi)$ e $P(\phi)=P(\phi+2\pi)$.

$$\begin{aligned}P(0) &= P(2\pi)\\ \cos(m_l 2\pi)-i\sin(m_l 2\pi) &= 1\\ m_l &= 0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{m_l^2}{\sin^2\theta}T(\theta) = CT(\theta)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]R(r) = \frac{C}{r^2}R(r)$$

Solução da parte angular em $T(\theta)$.

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{m_l^2}{\sin^2\theta}T(\theta) \quad = \quad CT(\theta)$$

Solução da parte angular em $T(\theta)$.

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{m_l^2}{\sin^2\theta}T(\theta) = CT(\theta)$$

- Para, $x=\cos\theta$ temos $\partial x=-\sin\theta\partial\theta$ e $\sin^2\theta=(1-x^2)$ obtemos,

Solução da parte angular em $T(\theta)$.

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{m_l^2}{\sin^2\theta}T(\theta) \quad = \quad CT(\theta)$$

- Para, $x=\cos\theta$ temos $\partial x=-\sin\theta\partial\theta$ e $\sin^2\theta=(1-x^2)$ obtemos,

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial T(x)}{\partial x}\right]+\left[\frac{m_l^2}{(1-x^2)}-C\right]T(x) \quad = \quad 0$$

Solução da parte angular em $T(\theta)$.

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{m_l^2}{\sin^2\theta}T(\theta) \quad = \quad CT(\theta)$$

- Para, $x=\cos\theta$ temos $\partial x=-\sin\theta\partial\theta$ e $\sin^2\theta=(1-x^2)$ obtemos,

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial T(x)}{\partial x}\right]+\left[\frac{m_l^2}{(1-x^2)}-C\right]T(x) \quad = \quad 0$$

- Quando $x\to\pm 1$, temos uma singularidade que deve ser removida.

Solução da parte angular em $T(\theta)$.

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{m_l^2}{\sin^2\theta}T(\theta) = CT(\theta)$$

- Para, $x=\cos\theta$ temos $\partial x = -\sin\theta\partial\theta$ e $\sin^2\theta = (1-x^2)$ obtemos,

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial T(x)}{\partial x}\right]+\left[\frac{m_l^2}{(1-x^2)}-C\right]T(x) = 0$$

- Quando $x\to\pm1$, temos uma singularidade que deve ser removida.
- Se $T(x)=(1-x^2)^S F(x)$ obtemos $S=|m_l|/2$ para remover a singularidade.

Solução da parte angular em $T(\theta)$.

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{m_l^2}{\sin^2\theta}T(\theta) \quad = \quad CT(\theta)$$

- Para, $x=\cos\theta$ temos $\partial x=-\sin\theta\partial\theta$ e $\sin^2\theta=(1-x^2)$ obtemos,

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial T(x)}{\partial x}\right]+\left[\frac{m_l^2}{(1-x^2)}-C\right]T(x) \quad = \quad 0$$

- Quando $x\to\pm1$, temos uma singularidade que deve ser removida.
- Se $T(x)=(1-x^2)^S F(x)$ obtemos $S=|m_l|/2$ para remover a singularidade.
- Logo, $T(x)=(1-x^2)^{|m_l|/2}F(x)$ e assim,

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2}-2(m_l+1)x\frac{\partial F(x)}{\partial x}+[C-m_l(m_l+1)]F(x) \quad = \quad 0$$

Solução da parte angular em $T(\theta)$.

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{m_l^2}{\sin^2\theta}T(\theta) \quad = \quad CT(\theta)$$

- Para, $x=\cos\theta$ temos $\partial x = -\sin\theta\partial\theta$ e $\sin^2\theta = (1-x^2)$ obtemos,

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial T(x)}{\partial x}\right]+\left[\frac{m_l^2}{(1-x^2)}-C\right]T(x) \quad = \quad 0$$

- Quando $x\to\pm1$, temos uma singularidade que deve ser removida.
- Se $T(x)=(1-x^2)^S F(x)$ obtemos $S=|m_l|/2$ para remover a singularidade.
- Logo, $T(x)=(1-x^2)^{|m_l|/2}F(x)$ e assim,

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2}-2(m_l+1)x\frac{\partial F(x)}{\partial x}+[C-m_l(m_l+1)]F(x) \quad = \quad 0$$

- Para uma solução com série de potência, $F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$, obtemos a seguinte relação de recorrência,

Solução da parte angular em $T(\theta)$.

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{m_l^2}{\sin^2\theta}T(\theta) \quad = \quad CT(\theta)$$

- Para, $x=\cos\theta$ temos $\partial x=-\sin\theta\partial\theta$ e $\sin^2\theta=(1-x^2)$ obtemos,

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial T(x)}{\partial x}\right]+\left[\frac{m_l^2}{(1-x^2)}-C\right]T(x) \quad = \quad 0$$

- Quando $x\to\pm1$, temos uma singularidade que deve ser removida.
- Se $T(x)=(1-x^2)^S F(x)$ obtemos $S=|m_l|/2$ para remover a singularidade.
- Logo, $T(x)=(1-x^2)^{|m_l|/2}F(x)$ e assim,

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2}-2(m_l+1)x\frac{\partial F(x)}{\partial x}+[C-m_l(m_l+1)]F(x) \quad = \quad 0$$

- Para uma solução com série de potência, $F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$, obtemos a seguinte relação de recorrência,

$$a_{k+2} \quad = \quad \frac{(m_l+k)(m_l+k+1)-C}{(k+2)(k+1)}a_k$$

Solução da parte angular em $T(\theta)$

- Para, $x = \cos\theta$ temos $\partial x = -\sin\theta\partial\theta$ e $\sin^2\theta = (1-x^2)$ obtemos,

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial T(x)}{\partial x}\right] + \left[\frac{m_l^2}{(1-x^2)} - C\right]T(x) = 0$$

- Quando $x \to \pm 1$, temos uma singularidade que deve ser removida.
- Se $T(x) = (1-x^2)^S F(x)$ obtemos $S = |m_l|/2$ para remover a singularidade.
- Logo, $T(x) = (1-x^2)^{|m_l|/2}F(x)$ e assim,

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} - 2(m_l+1)x\frac{\partial F(x)}{\partial x} + [C - m_l(m_l+1)]F(x) = 0$$

- Para uma solução com série de potência, $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, obtemos a seguinte relação de recorrência,

$$a_{k+2} = \frac{(m_l+k)(m_l+k+1) - C}{(k+2)(k+1)}a_k$$

- Para limitar o polinômio em $k = k'$ fazemos $a_{k+2} = 0$ logo: $C = [m_l + k'][m_l + k' + 1]$ e definindo $l = m_l + k'$ e assim $C = l(l+1)$.

Solução da parte angular em $T(\theta)$.

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-x^2)\frac{\partial T(x)}{\partial x}\right]+\left[\frac{m_l^2}{(1-x^2)}-C\right]T(x) \quad = \quad 0$$

- Quando $x \to \pm 1$, temos uma singularidade que deve ser removida.
- Se $T(x) = (1-x^2)^S F(x)$ obtemos $S = |m_l|/2$ para remover a singularidade.
- Logo, $T(x) = (1-x^2)^{|m_l|/2} F(x)$ e assim,

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} - 2(m_l+1)x\frac{\partial F(x)}{\partial x} + [C - m_l(m_l+1)]F(x) \quad = \quad 0$$

- Para uma solução com série de potência, $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, obtemos a seguinte relação de recorrência,

$$a_{k+2} \quad = \quad \frac{(m_l+k)(m_l+k+1)-C}{(k+2)(k+1)}a_k$$

- Para limitar o polinômio em $k = k^{'}$ fazemos $a_{k+2} = 0$ logo: $C = [m_l + k^{'}][m_l + k^{'} + 1]$ e definindo $l = m_l + k^{'}$ e assim $C = l(l+1)$.
- Temos $l = |m_l|, |m_l|+1, |m_l|+2, |m_l|+3, \ldots.$

Solução da parte angular em $T(\theta)$.

- Quando $x \to \pm 1$, temos uma singularidade que deve ser removida.
- Se $T(x) = (1-x^2)^S F(x)$ obtemos $S = |m_l|/2$ para remover a singularidade.
- Logo, $T(x) = (1-x^2)^{|m_l|/2} F(x)$ e assim,

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} - 2(m_l+1)x\frac{\partial F(x)}{\partial x} + [C - m_l(m_l+1)]F(x) = 0$$

- Para uma solução com série de potência, $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, obtemos a seguinte relação de recorrência,

$$a_{k+2} = \frac{(m_l+k)(m_l+k+1) - C}{(k+2)(k+1)} a_k$$

- Para limitar o polinômio em $k = k^{'}$ fazemos $a_{k+2} = 0$ logo: $C = [m_l + k^{'}][m_l + k^{'} + 1]$ e definindo $l = m_l + k^{'}$ e assim $C = l(l+1)$.
- Temos $l = |m_l|, |m_l|+1, |m_l|+2, |m_l|+3, \ldots$.
- Logo, $T_{l,m_l}(\theta) = (\sin\theta)^{|m_l|} F_{l,m_l}(\cos\theta)$ onde, $F_{l,m_l}(\cos\theta)$ são os polinômios associados de Legendre.

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]R(r) \quad = \quad \frac{l(l+1)}{r^2}R(r)$$

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]R(r) = \frac{l(l+1)}{r^2}R(r)$$

$$r^2\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+2r\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\left[\alpha^2 r^2+\beta r-l(l+1)\right]R(r) = 0$$

- $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$ e $\beta = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]R(r) &= \frac{l(l+1)}{r^2}R(r) \\
r^2\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left[\alpha^2 r^2 + \beta r - l(l+1)\right]R(r) &= 0
\end{aligned}$$

- $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$ e $\beta = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$
- Impondo as cond. de cont. que $R(r)$ deve se manter finito para $r \to 0$ e $r \to \infty$.

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]R(r) = \frac{l(l+1)}{r^2}R(r)$$

$$r^2\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+2r\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\left[\alpha^2 r^2+\beta r-l(l+1)\right]R(r) = 0$$

- $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$ e $\beta = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$
- Impondo as cond. de cont. que $R(r)$ deve se manter finito para $r \to 0$ e $r \to \infty$.

- Para $r \to 0$ $R(r) \to R_0(r) = f_0(r)/r$,

$$r^2\frac{\partial^2 f_0(r)}{\partial r^2}+\left[\alpha^2 r^2+\beta r-l(l+1)\right]f_0(r) = 0$$

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]R(r) = \frac{l(l+1)}{r^2}R(r)$$

$$r^2\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+2r\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\left[\alpha^2 r^2+\beta r-l(l+1)\right]R(r) = 0$$

- $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$ e $\beta = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$
- Impondo as cond. de cont. que $R(r)$ deve se manter finito para $r \to 0$ e $r \to \infty$.

- Para $r \to 0$ $R(r) \to R_0(r) = f_0(r)/r$,

$$r^2\frac{\partial^2 f_0(r)}{\partial r^2}+\left[\alpha^2 r^2+\beta r-l(l+1)\right]f_0(r) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_0(r)}{\partial r^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}f_0(r) = 0$$

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]R(r) = \frac{l(l+1)}{r^2}R(r)$$

$$r^2\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+2r\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\left[\alpha^2 r^2+\beta r-l(l+1)\right]R(r) = 0$$

- $\alpha^2=\frac{2m}{\hbar^2}E$ e $\beta=\frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$
- Impondo as cond. de cont. que $R(r)$ deve se manter finito para $r\to 0$ e $r\to\infty$.

- Para $r\to 0$ $R(r)\to R_0(r)=f_0(r)/r$,

$$r^2\frac{\partial^2 f_0(r)}{\partial r^2}+\left[\alpha^2 r^2+\beta r-l(l+1)\right]f_0(r) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_0(r)}{\partial r^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}f_0(r) = 0$$

$$f_0(r) = \sum_{k=0}^{N} a_k r^k$$

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E+\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\right]R(r) &= \frac{l(l+1)}{r^2}R(r) \\ r^2\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}+2r\frac{\partial R(r)}{\partial r}+\left[\alpha^2 r^2+\beta r-l(l+1)\right]R(r) &= 0 \end{aligned}$$

- $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}E$ e $\beta = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$
- Impondo as cond. de cont. que $R(r)$ deve se manter finito para $r \to 0$ e $r \to \infty$.

- Para $r \to 0$ $R(r) \to R_0(r) = f_0(r)/r$,

$$r^2\frac{\partial^2 f_0(r)}{\partial r^2}+\left[\alpha^2 r^2+\beta r-l(l+1)\right]f_0(r) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_0(r)}{\partial r^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}f_0(r) = 0$$

$$f_0(r) = \sum_{k=0}^{N} a_k r^k$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k r^k[k(k-1)-l(l+1)] = 0$$

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$r^2 \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left[\alpha^2 r^2 + \beta r - l(l+1)\right] R(r) = 0$$

- $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$ e $\beta = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$
- Impondo as cond. de cont. que $R(r)$ deve se manter finito para $r \to 0$ e $r \to \infty$.

- Para $r \to 0$ $R(r) \to R_0(r) = f_0(r)/r$,

$$r^2 \frac{\partial^2 f_0(r)}{\partial r^2} + \left[\alpha^2 r^2 + \beta r - l(l+1)\right] f_0(r) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_0(r)}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} f_0(r) = 0$$

$$f_0(r) = \sum_{k=0}^{N} a_k r^k$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k r^k [k(k-1) - l(l+1)] = 0$$

$$k = l+1 \to f_0(r) \sim r^{l+1}$$

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left[\alpha^2 + \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) = 0$$

- $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$ e $\beta = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$
- Impondo as cond. de cont. que $R(r)$ deve se manter finito para $r \to 0$ e $r \to \infty$.

- Para $r \to 0$ $R(r) \to R_0(r) = f_0(r)/r$,

$$r^2\frac{\partial^2 f_0(r)}{\partial r^2} + \left[\alpha^2 r^2 + \beta r - l(l+1)\right] f_0(r) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_0(r)}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} f_0(r) = 0$$

$$f_0(r) = \sum_{k=0}^{N} a_k r^k$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k r^k [k(k-1) - l(l+1)] = 0$$

$$k = l+1 \;\to\; f_0(r) \sim r^{l+1}$$

- Para $r \to \infty$ $R(r) \to R_\infty(r) = f_\infty(r)/r$,

$$\frac{\partial^2 f_\infty(r)}{\partial r^2} + \left[\alpha^2 + \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] f_\infty(r) = 0$$

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left[\alpha^2 + \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) = 0$$

- $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$ e $\beta = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$
- Impondo as cond. de cont. que $R(r)$ deve se manter finito para $r \to 0$ e $r \to \infty$.

- Para $r \to 0$ $R(r) \to R_0(r) = f_0(r)/r$,

$$r^2 \frac{\partial^2 f_0(r)}{\partial r^2} + \left[\alpha^2 r^2 + \beta r - l(l+1)\right] f_0(r) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_0(r)}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} f_0(r) = 0$$

$$f_0(r) = \sum_{k=0}^{N} a_k r^k$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k r^k [k(k-1) - l(l+1)] = 0$$

$$k = l+1 \rightarrow f_0(r) \sim r^{l+1}$$

- Para $r \to \infty$ $R(r) \to R_\infty(r) = f_\infty(r)/r$,

$$\frac{\partial^2 f_\infty(r)}{\partial r^2} + \left[\alpha^2 + \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] f_\infty(r) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_\infty(r)}{\partial r^2} + \alpha^2 f_\infty(r) = 0$$

$$f_\infty(r) \sim e^{-\alpha r}$$

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left[\alpha^2 + \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) = 0$$

- $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$ e $\beta = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$
- Impondo as cond. de cont. que $R(r)$ deve se manter finito para $r \to 0$ e $r \to \infty$.

- Para $r \to 0$ $R(r) \to R_0(r) = f_0(r)/r$,

$$r^2 \frac{\partial^2 f_0(r)}{\partial r^2} + \left[\alpha^2 r^2 + \beta r - l(l+1)\right] f_0(r) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_0(r)}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} f_0(r) = 0$$

$$f_0(r) = \sum_{k=0}^{N} a_k r^k$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k r^k [k(k-1) - l(l+1)] = 0$$

$$k = l+1 \to f_0(r) \sim r^{l+1}$$

- Para $r \to \infty$ $R(r) \to R_\infty(r) = f_\infty(r)/r$,

$$\frac{\partial^2 f_\infty(r)}{\partial r^2} + \left[\alpha^2 + \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] f_\infty(r) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_\infty(r)}{\partial r^2} + \alpha^2 f_\infty(r) = 0$$

$$f_\infty(r) \sim e^{-\alpha r}$$

$$R(r) = r^l e^{-\alpha r} g_l(r)$$

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left[\alpha^2 + \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) \quad = \quad 0$$

- $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$, $\beta = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ e $R(r) = r^l e^{-\alpha r} g_l(r)$

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left[\alpha^2 + \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) \quad = \quad 0$$

- $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$, $\beta = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ e $R(r) = r^l e^{-\alpha r} g_l(r)$

$$\frac{\partial^2 g_l(r)}{\partial r^2} + 2\left(\frac{l(l+1)}{r} - \alpha\right)\frac{\partial g_l(r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\beta - \alpha(l+1)\right) g_l(r) \quad = \quad 0$$

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left[\alpha^2 + \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) = 0$$

- $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$, $\beta = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ e $R(r) = r^l e^{-\alpha r} g_l(r)$

$$\frac{\partial^2 g_l(r)}{\partial r^2} + 2\left(\frac{l(l+1)}{r} - \alpha\right)\frac{\partial g_l(r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\beta - \alpha(l+1)\right) g_l(r) = 0$$

$$g_l(r) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j r^j \quad \rightarrow \quad b_{j+1} = \frac{2\alpha[j + l + 1 - \beta/(2\alpha)]}{(j+2l+2)(j+1)} b_j$$

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left[\alpha^2 + \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) = 0$$

- $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$, $\beta = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ e $R(r) = r^l e^{-\alpha r} g_l(r)$

$$\frac{\partial^2 g_l(r)}{\partial r^2} + 2\left(\frac{l(l+1)}{r} - \alpha\right)\frac{\partial g_l(r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\beta - \alpha(l+1)\right) g_l(r) = 0$$

$$g_l(r) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j r^j \quad \rightarrow \quad b_{j+1} = \frac{2\alpha[j+l+1-\beta/(2\alpha)]}{(j+2l+2)(j+1)} b_j$$

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left[\alpha^2 + \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) \quad = \quad 0$$

- $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$, $\beta = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ e $R(r) = r^l e^{-\alpha r} g_l(r)$

$$\frac{\partial^2 g_l(r)}{\partial r^2} + 2\left(\frac{l(l+1)}{r} - \alpha\right)\frac{\partial g_l(r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\beta - \alpha(l+1)\right) g_l(r) \quad = \quad 0$$

$$g_l(r) \quad = \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j r^j \quad \rightarrow \quad b_{j+1} = \frac{2\alpha[j+l+1-\beta/(2\alpha)]}{(j+2l+2)(j+1)} b_j$$

- Para limitar a série em $j = j^{'}$ então $b_{j+1} = 0 \quad \rightarrow j^{'} + 1 + l = \frac{\beta}{2\alpha} = n$.

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left[\alpha^2 + \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) \quad = \quad 0$$

- $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$, $\beta = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ e $R(r) = r^l e^{-\alpha r} g_l(r)$

$$\frac{\partial^2 g_l(r)}{\partial r^2} + 2\left(\frac{l(l+1)}{r} - \alpha\right)\frac{\partial g_l(r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\beta - \alpha(l+1)\right) g_l(r) \quad = \quad 0$$

$$g_l(r) \quad = \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j r^j \quad \rightarrow \quad b_{j+1} = \frac{2\alpha[j+l+1-\beta/(2\alpha)]}{(j+2l+2)(j+1)} b_j$$

- Para limitar a série em $j = j'$ então $b_{j+1} = 0 \quad \rightarrow j' + 1 + l = \frac{\beta}{2\alpha} = n$.

$$E_n \quad = \quad -\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$$

- Onde $n = l + 1$, e $R_{n,l}(r) = e^{-\alpha r} r^l g_{n,l}(r)$.

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left[\alpha^2 + \frac{\beta}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) = 0$$

- $\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E$, $\beta = \frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ e $R(r) = r^l e^{-\alpha r} g_l(r)$

$$\frac{\partial^2 g_l(r)}{\partial r^2} + 2\left(\frac{l(l+1)}{r} - \alpha\right)\frac{\partial g_l(r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\beta - \alpha(l+1)\right) g_l(r) = 0$$

$$g_l(r) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j r^j \rightarrow b_{j+1} = \frac{2\alpha[j+l+1-\beta/(2\alpha)]}{(j+2l+2)(j+1)} b_j$$

- Para limitar a série em $j = j'$ então $b_{j+1} = 0 \rightarrow j' + 1 + l = \frac{\beta}{2\alpha} = n$.

$$E_n = -\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$$

- Onde $n = l + 1$, e $R_{n,l}(r) = e^{-\alpha r} r^l g_{n,l}(r)$.
- Com isso temos a função de onda total,

$$\psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\phi) = A R_{n,l}(r) T_{l,m_l}(\theta) P_{m_l}(\phi)$$

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$g_l(r) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j r^j \rightarrow b_{j+1} = \frac{2\alpha[j+l+1-\beta/(2\alpha)]}{(j+2l+2)(j+1)} b_j$$

- Para limitar a série em $j = j'$ então $b_{j+1} = 0 \quad \rightarrow j' + 1 + l = \frac{\beta}{2\alpha} = n$.

$$E_n = -\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

- Onde $n = l + 1$, e $R_{n,l}(r) = e^{-\alpha r} r^l g_{n,l}(r)$.
- Com isso temos a função de onda total,

$$\psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\phi) = AR_{n,l}(r)T_{l,m_l}(\theta)P_{m_l}(\phi)$$
$$\psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\phi) = Ar^l e^{-\alpha r}(\sin\theta)^{|m_l|} e^{-im_l\phi} F_{l,m_l}(\cos\theta) g_{n,l}(r)$$

- $|m_l| = 0, 1, 2, 3, \ldots$
- $l = |m_l|, |m_l| + 1, |m_l| + 2, |m_l| + 3, \ldots$
- $n = l + 1, l + 2, l + 3, \ldots$

Solução da parte radias em $R(r)$.

$$E_n = -\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$$

- Onde $n = l + 1$, e $R_{n,l}(r) = e^{-\alpha r} r^l g_{n,l}(r)$.
- Com isso temos a função de onda total,

$$\psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\phi) = AR_{n,l}(r)T_{l,m_l}(\theta)P_{m_l}(\phi)$$
$$\psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\phi) = Ar^l e^{-\alpha r}(\sin\theta)^{|m_l|} e^{-im_l\phi} F_{l,m_l}(\cos\theta) g_{n,l}(r)$$

- Essas condições são expressas mais convenientemente como:
- $n = 1, 2, 3, \ldots$ numero quântico principal
- $l = 0, +1, +2, n - 1$ numero quântico orbital
- $m_l = -l, -l + 1, \ldots, 0, .., l - 1, l$ numero quântico magnético

Notação dos números quânticos

- Para cada nível de energia E_n existe mais de um estado distinto com a mesma energia, porém números quânticos diferentes.

Notação dos números quânticos

- Para cada nível de energia E_n existe mais de um estado distinto com a mesma energia, porém números quânticos diferentes.
- Denomina-se **degeneração** a existência de mais de um estado distinto com a mesma energia.

Notação dos números quânticos

- Para cada nível de energia E_n existe mais de um estado distinto com a mesma energia, porém números quânticos diferentes.
- Denomina-se **degeneração** a existência de mais de um estado distinto com a mesma energia.

- Os estados com diferentes valores do numero quântico l são geralmente designados pelas seguintes letras:

l=	0	1	2	3	4	5
estado:	s	p	d	f	g	h

Notação dos números quânticos

- Para cada nível de energia E_n existe mais de um estado distinto com a mesma energia, porém números quânticos diferentes.
- Denomina-se **degeneração** a existência de mais de um estado distinto com a mesma energia.

- Os estados com diferentes valores do numero quântico l são geralmente designados pelas seguintes letras:

l=	0	1	2	3	4	5
estado:	s	p	d	f	g	h

- A extensão radial da função de onda cresce com o número quântico principal n

Notação dos números quânticos

- Para cada nível de energia E_n existe mais de um estado distinto com a mesma energia, porém números quânticos diferentes.
- Denomina-se **degeneração** a existência de mais de um estado distinto com a mesma energia.

- Os estados com diferentes valores do numero quântico l são geralmente designados pelas seguintes letras:

l=	0	1	2	3	4	5
estado:	s	p	d	f	g	h

- A extensão radial da função de onda cresce com o número quântico principal n
- Chamamos de camada uma região do espaço associada com um n particular.

Notação dos números quânticos

- Para cada nível de energia E_n existe mais de um estado distinto com a mesma energia, porém números quânticos diferentes.
- Denomina-se **degeneração** a existência de mais de um estado distinto com a mesma energia.

- Os estados com diferentes valores do numero quântico l são geralmente designados pelas seguintes letras:

l=	0	1	2	3	4	5
estado:	s	p	d	f	g	h

- A extensão radial da função de onda cresce com o número quântico principal n
- Chamamos de camada uma região do espaço associada com um n particular.
- É comum empregar as seguintes letras:

n=	1	2	3	4
camada:	K	L	M	N

Notação dos números quânticos

- Para cada nível de energia E_n existe mais de um estado distinto com a mesma energia, porém números quânticos diferentes.
- Denomina-se **degeneração** a existência de mais de um estado distinto com a mesma energia.

- Os estados com diferentes valores do numero quântico l são geralmente designados pelas seguintes letras:

l=	0	1	2	3	4	5
estado:	s	p	d	f	g	h

- A extensão radial da função de onda cresce com o número quântico principal n
- Chamamos de camada uma região do espaço associada com um n particular.
- É comum empregar as seguintes letras:

n=	1	2	3	4
camada:	K	L	M	N

Estados quânticos do átomo de hidrogênio

n	l	m_l	Notação espectroscópica	Camada
1	0	0	1s	K
2	0	0	2s	L
2	1	−1, 0, 1	2p	
3	0	0	3s	
3	1	−1, 0, 1	3p	M
3	2	−2, −1, 0, 1, 2	3d	
4	0	0	4s	N

Distribuições de probabilidade do elétron

- As ψ_{n,l,m_l} fornece uma distribuição de probabilidade de encontrar o elétron em torno do núcleo.

Distribuições de probabilidade do elétron

- As ψ_{n,l,m_l} fornece uma distribuição de probabilidade de encontrar o elétron em torno do núcleo.
- Vamos considerar a distribuição de probabilidade radial $P(r)$, onde $P(r)dr$ é probabilidade de encontrar a partícula dentro da camada radial de espessura dr, portanto:

Distribuições de probabilidade do elétron

- As ψ_{n,l,m_l} fornece uma distribuição de probabilidade de encontrar o elétron em torno do núcleo.
- Vamos considerar a distribuição de probabilidade radial $P(r)$, onde $P(r)dr$ é probabilidade de encontrar a partícula dentro da camada radial de espessura dr, portanto:

$$P(r)dr = |\psi_{n,l,m_l}|^2 dV = |\psi_{n,l,m_l}|^2 4\pi r^2 dr$$

Distribuições de probabilidade do elétron

- As ψ_{n,l,m_l} fornece uma distribuição de probabilidade de encontrar o elétron em torno do núcleo.
- Vamos considerar a distribuição de probabilidade radial $P(r)$, onde $P(r)dr$ é probabilidade de encontrar a partícula dentro da camada radial de espessura dr, portanto:

$$P(r)dr = |\psi_{n,l,m_l}|^2 dV = |\psi_{n,l,m_l}|^2 4\pi r^2 dr$$

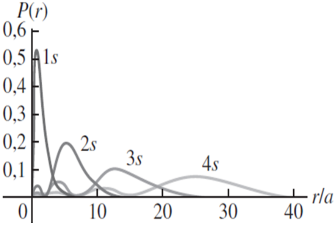
$$\psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\phi) = Ar^l e^{-\alpha r}(\sin\theta)^{|m_l|} e^{-im_l\phi} F_{l,m_l}(\cos\theta) g_{n,l}(r)$$

Distribuições de probabilidade do elétron

$$P(r)dr = |\psi_{n,l,m_l}|^2 dV = |\psi_{n,l,m_l}|^2 4\pi r^2 dr$$

$$\psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\phi) = Ar^l e^{-\alpha r}(\sin\theta)^{|m_l|} e^{-im_l\phi} F_{l,m_l}(\cos\theta) g_{n,l}(r)$$

n	l	m_l	ψ_{n,l,m_l}
1	0	0	$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$
2	0	0	$\psi_{200} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2}(2 - \frac{Zr}{a_0})e^{-Zr/2a_0}$
3	0	0	$\psi_{300} = \frac{1}{81\sqrt{3\pi}}\left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2}(27 - 18\frac{Zr}{a_0} + 2\frac{Z^2r^2}{a_0^2})e^{-Zr/3a_0}$

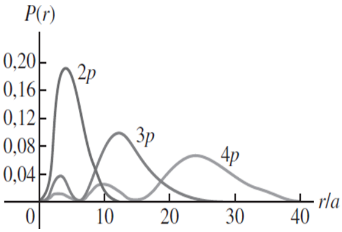


Distribuições de probabilidade do elétron

$$P(r)dr = |\psi_{n,l,m_l}|^2 dV = |\psi_{n,l,m_l}|^2 4\pi r^2 dr$$

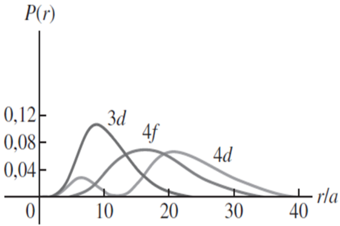
$$\psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\phi) = Ar^l e^{-\alpha r}(\sin\theta)^{|m_l|} e^{-im_l\phi} F_{l,m_l}(\cos\theta) g_{n,l}(r)$$

n	l	m_l	ψ_{n,l,m_l}
2	1	0	$\psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2}\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/2a_0}\cos\theta$
2	1	±1	$\psi_{21\pm1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2}\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/2a_0}\sin\theta e^{\pm i\phi}$

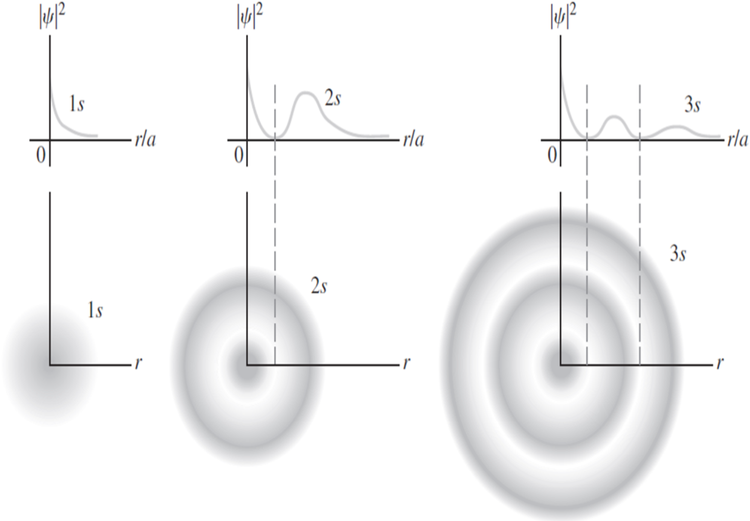


Distribuições de probabilidade do elétron

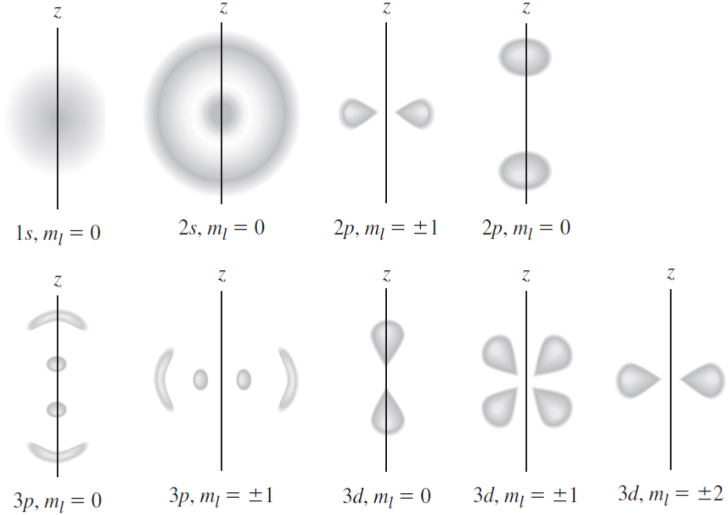
n	l	m_l	ψ_{n,l,m_l}
3	2	-2,-1,0,+1,+2	$\psi_{320} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$
4	2	-2,-1,0,+1,+2	$\psi_{420} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$
4	3	-3,-2,-1,0,+1,+2,+3	$\psi_{430} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$



Distribuições de probabilidade do elétron

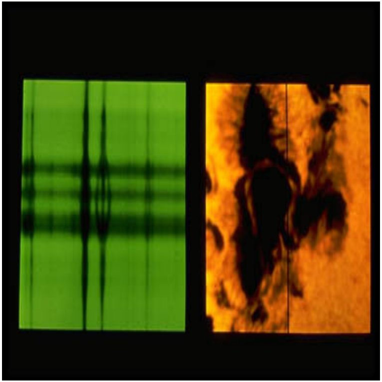


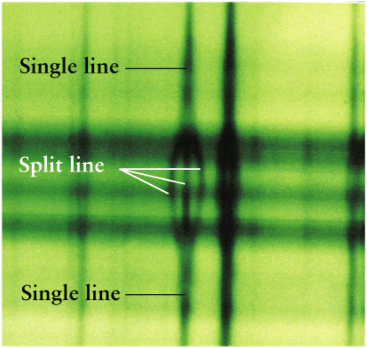
Distribuições de probabilidade do elétron



- O **efeito Zeeman** é o desdobramento dos níveis de energia e das correspondentes linhas espectrais quando os átomos são colocados na presença de um campo magnético.

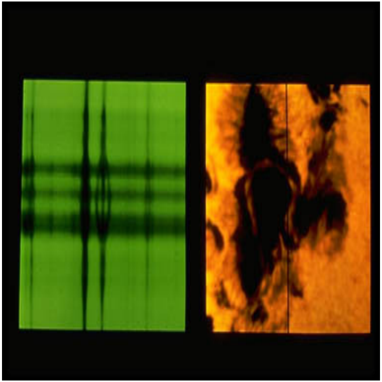
- O **efeito Zeeman** é o desdobramento dos níveis de energia e das correspondentes linhas espectrais quando os átomos são colocados na presença de um campo magnético.
- Esse efeito confirma experimentalmente a quantização do momento angular.

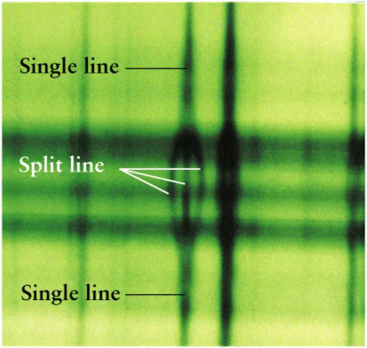




b

- O **efeito Zeeman** é o desdobramento dos níveis de energia e das correspondentes linhas espectrais quando os átomos são colocados na presença de um campo magnético.
- Esse efeito confirma experimentalmente a quantização do momento angular.
- Mostra também porque m_l é chamado de numero quântico magnético.



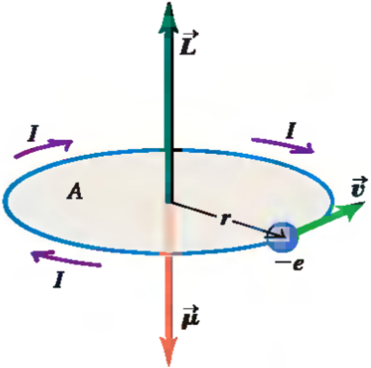


b

Momento magnético de um elétron em órbita

- Uma espira plana de área $\vec{A}$ com uma corrente $\mathtt{I}$ possui um momento magnético $\vec{\mu} = \mathtt{I}\vec{A}$.

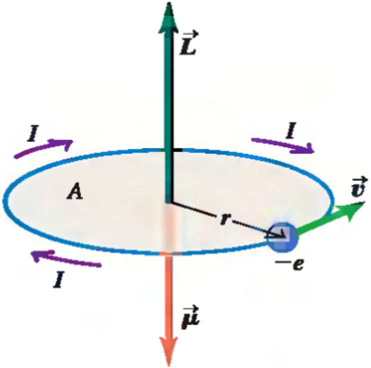
$$\mathtt{I} = \frac{e}{\mathrm{T}}$$



Momento magnético de um elétron em órbita

- Uma espira plana de área $\vec{A}$ com uma corrente $\mathtt{I}$ possui um momento magnético $\vec{\mu} = \mathtt{I}\vec{A}$.
- Quando $\vec{\mu}$ é colocado na presença de $\vec{B}$ sofre um torque $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$.
- A energia potencial será: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

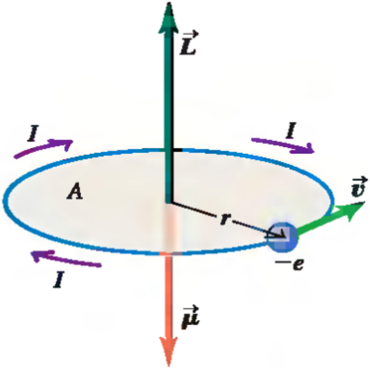
$$\mathtt{I} = \frac{e}{\mathrm{T}}$$
$$T = \frac{2\pi r}{v}$$



Momento magnético de um elétron em órbita

- Uma espira plana de área $\vec{A}$ com uma corrente I possui um momento magnético $\vec{\mu} = \mathrm{I}\vec{A}$.
- Quando $\vec{\mu}$ é colocado na presença de $\vec{B}$ sofre um torque $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$.
- A energia potencial será: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

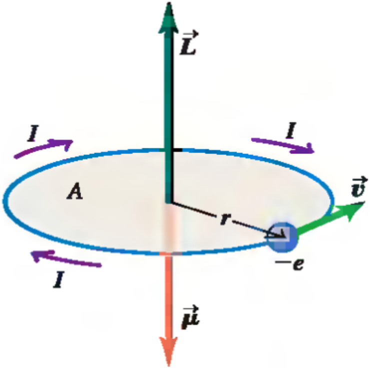
$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \frac{e}{\mathrm{T}} \\ T &= \frac{2\pi r}{v} \\ \mathrm{I} &= \frac{ev}{2\pi r} \end{aligned}$$



Momento magnético de um elétron em órbita

- Uma espira plana de área $\vec{A}$ com uma corrente $\mathtt{I}$ possui um momento magnético $\vec{\mu} = \mathtt{I}\vec{A}$.
- Quando $\vec{\mu}$ é colocado na presença de $\vec{B}$ sofre um torque $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$.
- A energia potencial será: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

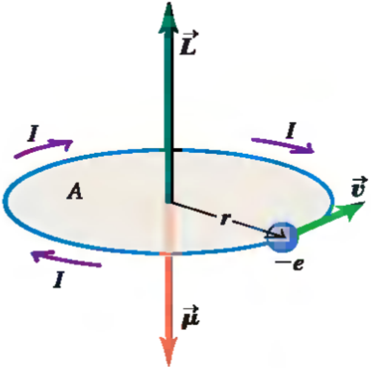
$$
\begin{aligned}
\mathtt{I} &= \frac{e}{\mathrm{T}} \\
T &= \frac{2\pi r}{v} \\
\mathtt{I} &= \frac{ev}{2\pi r} \\
\mu &= \mathtt{I}A \\
\mu &= \frac{ev}{2\pi r}(\pi r^2) = \frac{evr}{2}
\end{aligned}
$$



Momento magnético de um elétron em órbita

- Uma espira plana de área $\vec{A}$ com uma corrente $\mathtt{I}$ possui um momento magnético $\vec{\mu} = \mathtt{I}\vec{A}$.
- Quando $\vec{\mu}$ é colocado na presença de $\vec{B}$ sofre um torque $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$.
- A energia potencial será: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

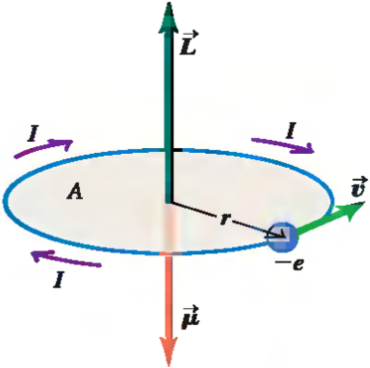
$$
\begin{aligned}
\mathtt{I} &= \frac{e}{\mathrm{T}} \\
T &= \frac{2\pi r}{v} \\
\mathtt{I} &= \frac{ev}{2\pi r} \\
\mu &= \mathtt{I}A \\
\mu &= \frac{ev}{2\pi r}(\pi r^2) = \frac{evr}{2} \\
L &= mvr = n\hbar
\end{aligned}
$$



Momento magnético de um elétron em órbita

- Uma espira plana de área $\vec{A}$ com uma corrente I possui um momento magnético $\vec{\mu} = \mathrm{I}\vec{A}$.
- Quando $\vec{\mu}$ é colocado na presença de $\vec{B}$ sofre um torque $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$.
- A energia potencial será: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \frac{e}{\mathrm{T}} \\
T &= \frac{2\pi r}{v} \\
\mathrm{I} &= \frac{ev}{2\pi r} \\
\mu &= \mathrm{I}A \\
\mu &= \frac{ev}{2\pi r}(\pi r^2) = \frac{evr}{2} \\
L &= mvr = n\hbar \\
\mu &= \frac{e}{2m}L = \frac{e\hbar}{2m} \\
\mu_B &= \frac{e\hbar}{2m} = 5,788 \times 10^{-5} eV/T
\end{aligned}
$$



Momento magnético de um elétron em órbita

- Uma espira plana de área $\vec{A}$ com uma corrente I possui um momento magnético $\vec{\mu} = \mathrm{I}\vec{A}$.
- Quando $\vec{\mu}$ é colocado na presença de $\vec{B}$ sofre um torque $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$.
- A energia potencial será: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \frac{e}{\mathrm{T}} \\
T &= \frac{2\pi r}{v} \\
\mathrm{I} &= \frac{ev}{2\pi r} \\
\mu &= \mathrm{I}A \\
\mu &= \frac{ev}{2\pi r}(\pi r^2) = \frac{evr}{2} \\
L &= mvr = n\hbar \\
\mu &= \frac{e}{2m}L = \frac{e\hbar}{2m} \\
\mu_B &= \frac{e\hbar}{2m} = 5,788 \times 10^{-5} eV/T
\end{aligned}
$$

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L}$$

Momento magnético de um elétron em órbita

- Uma espira plana de área $\vec{A}$ com uma corrente I possui um momento magnético $\vec{\mu} = \mathrm{I}\vec{A}$.
- Quando $\vec{\mu}$ é colocado na presença de $\vec{B}$ sofre um torque $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$.
- A energia potencial será: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \frac{e}{\mathrm{T}} \\
T &= \frac{2\pi r}{v} \\
\mathrm{I} &= \frac{ev}{2\pi r} \\
\mu &= \mathrm{I}A \\
\mu &= \frac{ev}{2\pi r}(\pi r^2) = \frac{evr}{2} \\
L &= mvr = n\hbar \\
\mu &= \frac{e}{2m}L = \frac{e\hbar}{2m} \\
\mu_B &= \frac{e\hbar}{2m} = 5,788 \times 10^{-5} eV/T
\end{aligned}
$$

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L}$$

- Suponha que $\vec{B} = B\hat{k}$ assim, $U = -\mu_z B$.

Momento magnético de um elétron em órbita

- Uma espira plana de área $\vec{A}$ com uma corrente I possui um momento magnético $\vec{\mu} = \mathrm{I}\vec{A}$.
- Quando $\vec{\mu}$ é colocado na presença de $\vec{B}$ sofre um torque $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$.
- A energia potencial será: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \frac{e}{\mathrm{T}} \\
T &= \frac{2\pi r}{v} \\
\mathrm{I} &= \frac{ev}{2\pi r} \\
\mu &= \mathrm{I}A \\
\mu &= \frac{ev}{2\pi r}(\pi r^2) = \frac{evr}{2} \\
L &= mvr = n\hbar \\
\mu &= \frac{e}{2m}L = \frac{e\hbar}{2m} \\
\mu_B &= \frac{e\hbar}{2m} = 5,788 \times 10^{-5} eV/T
\end{aligned}
$$

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L}$$

- Suponha que $\vec{B} = B\hat{k}$ assim, $U = -\mu_z B$.
- $\mu_z = -\frac{e}{2m}L_z$ como $L_z = m_l\hbar$ obtemos:

$$\mu_z = -m_l\frac{e\hbar}{2m}$$

Momento magnético de um elétron em órbita

- Uma espira plana de área $\vec{A}$ com uma corrente $\mathtt{I}$ possui um momento magnético $\vec{\mu} = \mathtt{I}\vec{A}$.
- Quando $\vec{\mu}$ é colocado na presença de $\vec{B}$ sofre um torque $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$.
- A energia potencial será: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

$$\begin{aligned}
\mathtt{I} &= \frac{e}{\mathrm{T}} \\
T &= \frac{2\pi r}{v} \\
\mathtt{I} &= \frac{ev}{2\pi r} \\
\mu &= \mathtt{I}A \\
\mu &= \frac{ev}{2\pi r}(\pi r^2) = \frac{evr}{2} \\
L &= mvr = n\hbar \\
\mu &= \frac{e}{2m}L = \frac{e\hbar}{2m} \\
\mu_B &= \frac{e\hbar}{2m} = 5,788 \times 10^{-5} eV/T
\end{aligned}$$

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L}$$

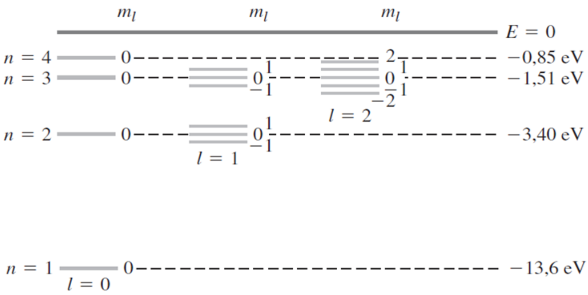
- Suponha que $\vec{B} = B\hat{k}$ assim, $U = -\mu_z B$.
- $\mu_z = -\frac{e}{2m}L_z$ como $L_z = m_l\hbar$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\mu_z &= -m_l\frac{e\hbar}{2m} \\
U &= m_l\frac{e\hbar}{2m}B = m_l\mu_B B \ (m_l = 0, \pm 1, ..., \pm l)
\end{aligned}$$

Momento magnético de um elétron em órbita

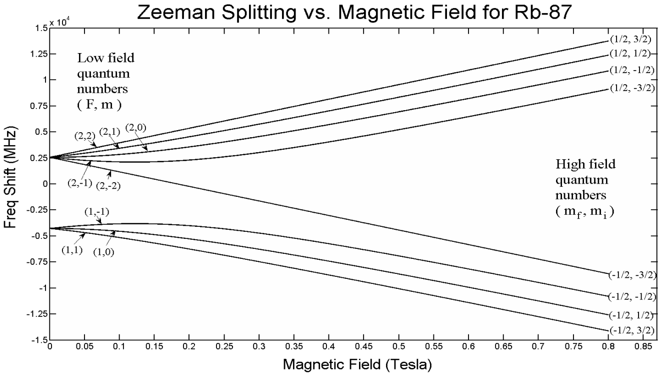
$$\mu_z = -m_l \frac{e\hbar}{2m}$$

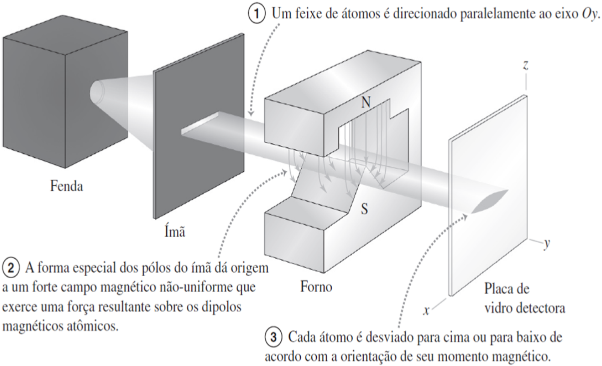
$$U = m_l \frac{e\hbar}{2m} B = m_l \mu_B B \; (m_l = 0, \pm 1, ..., \pm l)$$



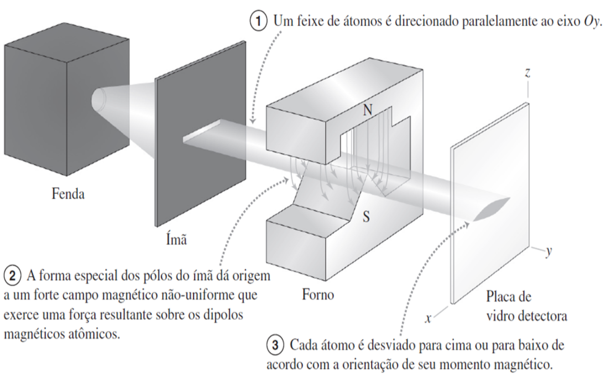
Momento magnético de um elétron em órbita

$$\mu_z = -m_l \frac{e\hbar}{2m}$$
$$U = m_l \frac{e\hbar}{2m} B = m_l \mu_B B \ (m_l = 0, \pm 1, ..., \pm l)$$



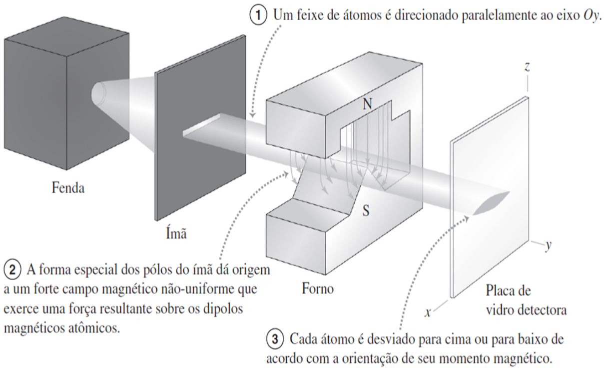


$$S_z = m_s \hbar, \quad (m_s = \pm\frac{1}{2})$$

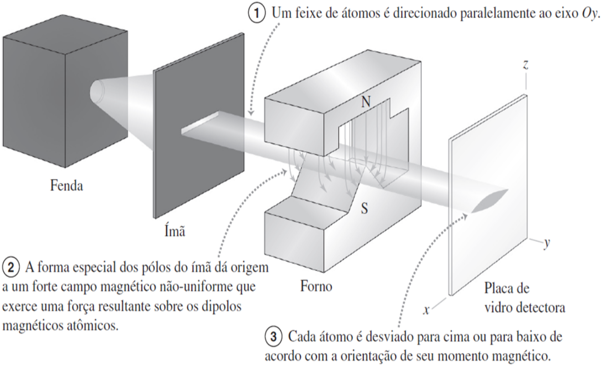


$$
\begin{aligned}
S_z &= m_s\hbar, \quad (m_s = \pm\frac{1}{2}) \\
S &= \sqrt{m_s(m_s+1)}\hbar
\end{aligned}
$$

Spin do Elétron



$$
\begin{aligned}
S_z &= m_s\hbar, \quad (m_s = \pm\frac{1}{2}) \\
S &= \sqrt{m_s(m_s+1)}\hbar \\
\mu_z &= -(2,00232)\frac{e}{2m}S_z
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
S_z &= m_s\hbar, \quad (m_s = \pm\frac{1}{2}) \\
S &= \sqrt{m_s(m_s+1)}\hbar \\
\mu_z &= -(2,00232)\frac{e}{2m}S_z
\end{aligned}
$$

$$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = \pm m_s(2,00232)\frac{e\hbar}{2m}B$$

Acoplamento Spin-órbita

- O momento de dipolo magnético de spin pode produzir desdobramento dos níveis de energia mesmo na ausência de campos magnéticos externos.

Acoplamento Spin-órbita

- O momento de dipolo magnético de spin pode produzir desdobramento dos níveis de energia mesmo na ausência de campos magnéticos externos.
- A energia de interação pode ser escrita em termos do produto escalar dos vetores $\vec{L}$ e $\vec{S}$.

Acoplamento Spin-órbita

- O momento de dipolo magnético de spin pode produzir desdobramento dos níveis de energia mesmo na ausência de campos magnéticos externos.
- A energia de interação pode ser escrita em termos do produto escalar dos vetores $\vec{L}$ e $\vec{S}$.
- $U \sim \vec{L} \cdot \vec{S}$.

Combinação dos momentos angulares orbital e de spin

- O momento angular orbital e o momento angular de spin podem se combinar de diversas maneiras:

Combinação dos momentos angulares orbital e de spin

- O momento angular orbital e o momento angular de spin podem se combinar de diversas maneiras:
- O momento angular total será definido por: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

Combinação dos momentos angulares orbital e de spin

- O momento angular orbital e o momento angular de spin podem se combinar de diversas maneiras:
- O momento angular total será definido por: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.
- De forma que: $J = \sqrt{j(j+1)}\hbar$ e $j = |l \pm 1/2|$.

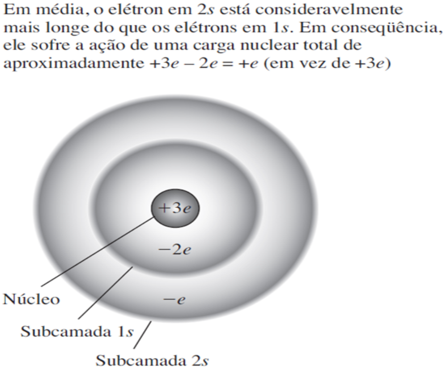
Combinação dos momentos angulares orbital e de spin

- O momento angular orbital e o momento angular de spin podem se combinar de diversas maneiras:
- O momento angular total será definido por: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.
- De forma que: $J = \sqrt{j(j+1)}\hbar$ e $j = |l \pm 1/2|$.
- $j = |l + 1/2|$ componentes z paralelas.

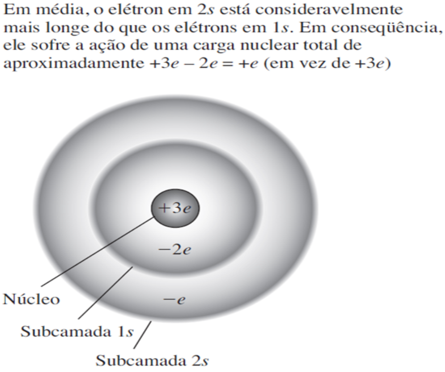
Combinação dos momentos angulares orbital e de spin

- O momento angular orbital e o momento angular de spin podem se combinar de diversas maneiras:
- O momento angular total será definido por: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.
- De forma que: $J = \sqrt{j(j+1)}\hbar$ e $j = |l \pm 1/2|$.
- $j = |l + 1/2|$ componentes z paralelas.
- $j = |l - 1/2|$ componentes z anti-paralelas.

- Esse principio afirma que dois elétrons não podem ocupar o mesma estado quântico em um dado sistema.



- Esse principio afirma que dois elétrons não podem ocupar o mesma estado quântico em um dado sistema.
- Dois elétrons não podem ter os mesmos valores para os quatro números quânticos (n, l, m_l, m_s).



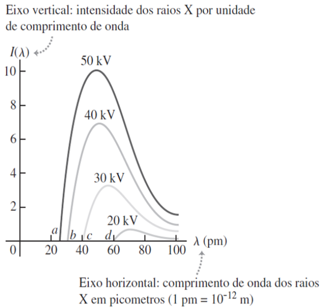


Figura 41.19 Gráficos do espectro contínuo de raios X produzidos por um alvo de tungstênio quando atingido por elétrons acelerados por uma voltagem V_{AC}. As quatro curvas refletem os diferentes valores de V_{AC}; os pontos *a*, *b*, *c* e *d* indicam o comprimento de onda mínimo para cada voltagem.

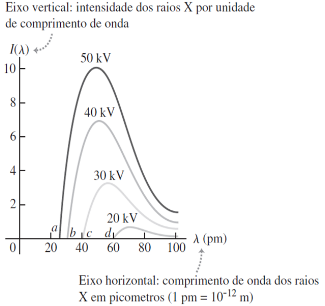


Figura 41.19 Gráficos do espectro contínuo de raios X produzidos por um alvo de tungstênio quando atingido por elétrons acelerados por uma voltagem V_{AC}. As quatro curvas refletem os diferentes valores de V_{AC}; os pontos *a*, *b*, *c* e *d* indicam o comprimento de onda mínimo para cada voltagem.

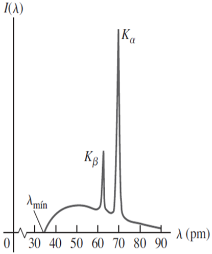


Figura 41.20 Gráficos da intensidade dos raios X por unidade de comprimento de onda em função do comprimento de onda para raios X produzidos por uma voltagem de aceleração de 35 kV e um alvo de molibdênio. A curva é contínua como no caso da Figura 41.19, mas apresenta dois fortes picos superpostos correspondentes ao espectro característico dos raios X desse elemento.

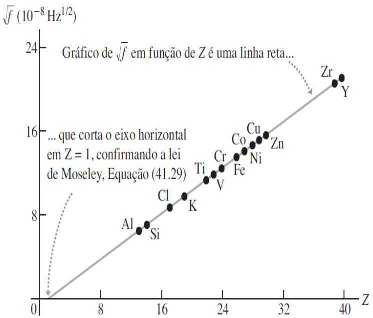


Figura 41.21 Raiz quadrada das freqüências medidas por Moseley para 14 elementos da linha K_α.

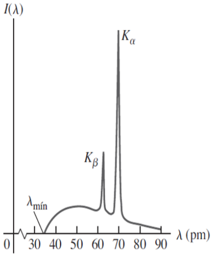


Figura 41.20 Gráficos da intensidade dos raios X por unidade de comprimento de onda em função do comprimento de onda para raios X produzidos por uma voltagem de aceleração de 35 kV e um alvo de molibdênio. A curva é contínua como no caso da Figura 41.19, mas apresenta dois fortes picos superpostos correspondentes ao espectro característico dos raios X desse elemento.

$$f = (2,48 \times 10^{15} Hz)(Z - 1)^2$$