Física 1 – Capítulo 7

Conservação de Energia

http://fisica.ufjf.br/~sjfsato/fisica1

Trabalho (W) e a Variação da Energia Cinética

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Delta K = K_f - K_i = \frac{mv_f^2}{2} - \frac{mv_i^2}{2}$$

Força Conservativa

Quando uma força é conservativa?

Uma força é conservativa quando o trabalho por ela realizado sobre uma partícula em uma trajetória fechada é nula.

Outro detalhe é que o trabalho realizado sobre uma partícula de um ponto ao outro independe da trajetória.

Trabalho (W) e a Energia Potencial

Para descrever os movimentos, baseando-nos em conceitos de energia, precisamos definir mais um tipo de...
… grandeza escalar associada a um estado de um ou mais corpos.

A **energia potencial** (U) é a energia que pode ser associada com a configuração (ou arranjo de um sistema de objetos, que exercem forças uns sobre os outros. Se a configuração muda, a energia potencial também pode mudar

Relação entre energia potencial e trabalho:

$$\Delta U = -W$$

Energia Potencial

Variação de Energia Potencial (movimento unidimensional)

$$\Delta U = -W = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$

$\boldsymbol{x_0}$ define uma configuração de referência e ***x*** uma configuração geral.
A energia potencia para uma dada configuração ***x***:

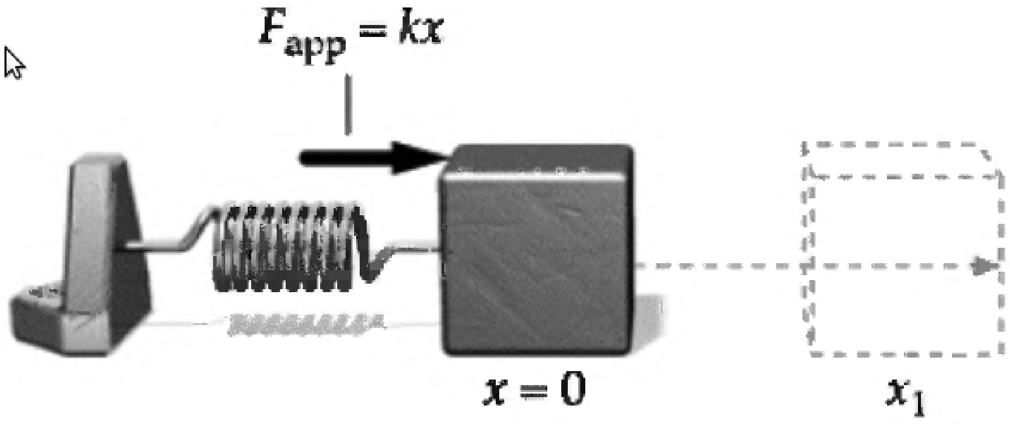
$$U(x) = U(x_0) + \Delta U = U(x_0) - \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$

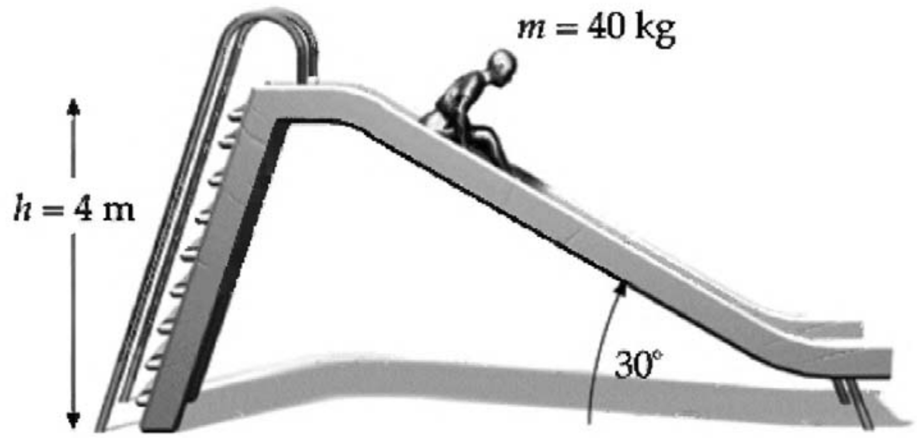
Energia Potencial

Do ponto de vista físico, apenas as variações de energia potencial são relevantes. Pode-se sempre atribuir o valor zero à configuração de referência:

$$U(x_0) = 0$$

Dos casos clássicos, podemos aplicar esse conceito a alguns tipos de força:
- Força Elástica;
- Força Gravitacional (próximo da superfície da terrestre).





Energia Potencial Elástica

$$U(x) = -\vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$U(x) = -F_x dx$$

$$U(x) = \int_0^x -(-kx)\,dx$$

$$U(x) = U(x_0) + \frac{kx^2}{2}$$

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}$$

Energia Potencial Gravitacional

$$U(y) = -\vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$U(y) = -F_y dy$$

$$U(y) = \int_0^y -(-mg)\,dy$$

$$U(y) = U(y_0) + mgy$$

$$U(y) = mgy$$

Potência

Potência Instantânea:

$$P_{ot} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\,\vec{r}}{dt} = \vec{F}\,\frac{d\,\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Potência Média:

$$P_{ot} = \frac{W}{t}$$

Lembrando que a unidade da potência é o Watt.

Equilíbrio

Dentro do tema que estamos apreciando um ponto de equilíbrio é o ponto cuja a força é zero, ou seja, a derivada da energia potencial com relação à posição é nula.

Os pontos de equilíbrio podem ser separados em equilíbrio estáveis e instáveis.

$$U(x)\ vs\ x$$

$$F(x) = \frac{-U(x)}{dx}$$

$$F(x)\ vs\ x$$

Conservação da Energia Mecânica

$$W = \Delta K$$

$$W = -\Delta U$$

$$\Delta K = -\Delta U$$

Se estivermos nos referindo à forças conservativas (forças para as quais a energia mecânica de um sistema é conservada), teremos:

$$\Delta K + \Delta U = 0, \; K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$E_{mec,\, final} = E_{mec,\, inicial}$$

Lei da Conservação da Energia Mecânica

Observa-se que o aumento ou a diminuição da energia total de um sistema pode ser sempre igualada ao desaparecimento ou aparecimento de energia em uma outra parte do universo.

$$E_{entra\ no\ sistema} - E_{sai\ no\ sistema} = \Delta E_{sistema}$$

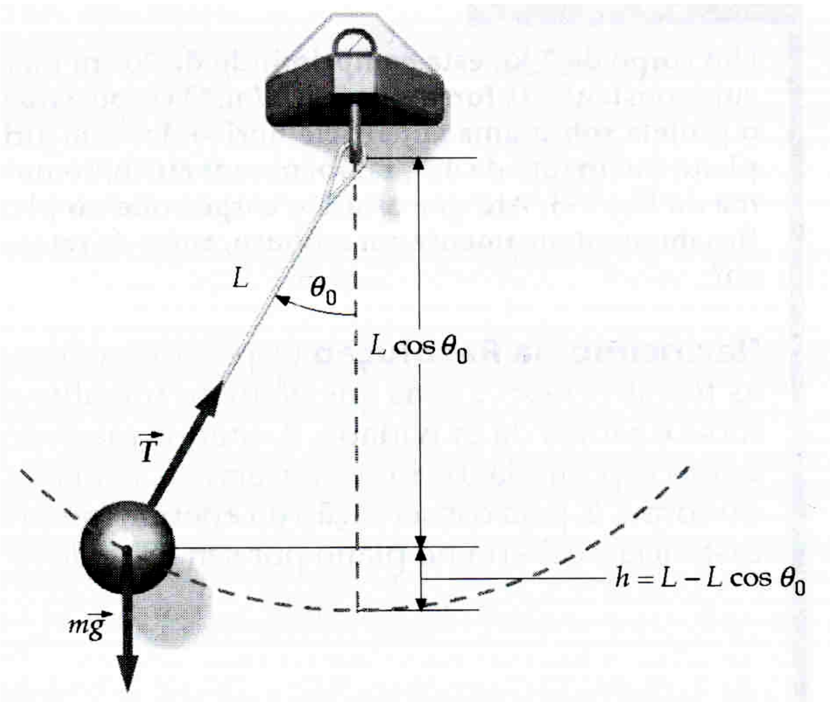
A energia total do sistema é constante. A energia pode ser convertida de uma forma em outra, pode ser transmitida de uma região para outra, mas *não se pode criá-la ou destruí-la*.

$$E_{sistema} = E_{mecânica} + E_{térmica} + E_{química} + E_{outros}$$

Teorema da Conservação do Trabalho-Energia:

$$W_{ext} = \Delta E_{sistema}$$

Exemplo 7-2: Um pêndulo consiste em uma massa m ligada a uma haste de comprimento L. A massa é deslocada lateralmente, de modo que a haste faz um ângulo θ_0, com a vertical e é então abandonada. Calcule a expressão para (a) a velocidade e (b) a tração na haste quando a massa passa pela base do arco. Considere a resistência do ar desprezível.



$$E_{mec,\,final} = E_{mec\,,\,inicial}$$

$$\frac{mv_f^2}{2} + mgy_f = \frac{mv_i^2}{2} + mgy_i$$

$$\frac{mv_{base}^2}{2} + 0 = 0 + mgh\,,\ h = L(1 - \cos\theta_0)$$

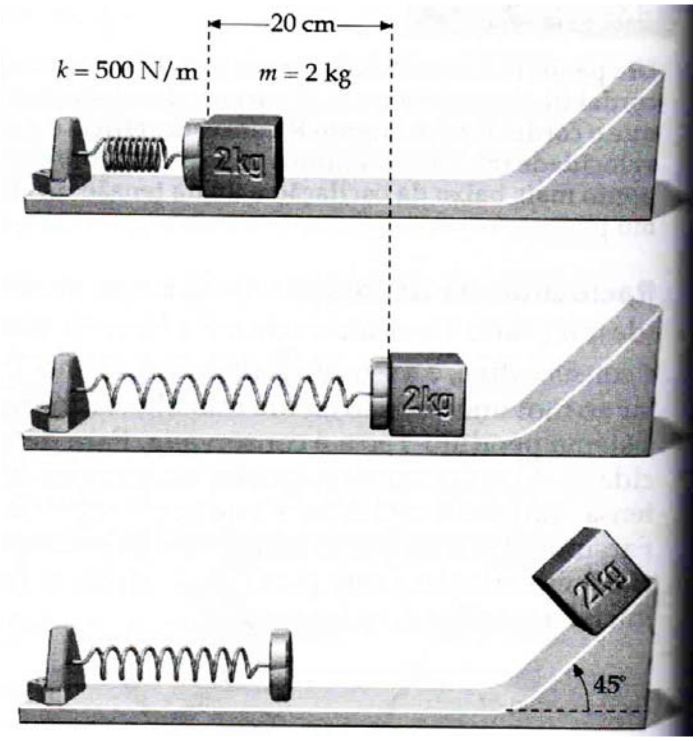
$$v_{base} = \sqrt{2\mathrm{gL}(1 - \cos\theta_0)}$$

$$T - mg = ma_y,\ Lembrando\ que\ a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$T = mg + ma_y = m(g + a_y),\ a_y = \frac{2\mathrm{gL}(1 - \cos\theta_0)}{L}$$

$$T = mg(3 - 2\cos\theta_0)$$

Exemplo 7-3: Um bloco de 2kg em uma superfície horizontal sem atrito é empurrado contra uma mole que tem uma constante elástica de 500 N/m, comprimindo a mola por 20 cm. O bloco é então abandonado, e a mola projeto ao longo da superfície e, em seguida, por uma rampa inclinada de 45° sem atrito. Qual é a distância para cima na rampa que o bloco percorrerá antes de momentaneamente atingir o repouso?



$$E_{mec,\,final} = E_{mec,\,inicial}$$

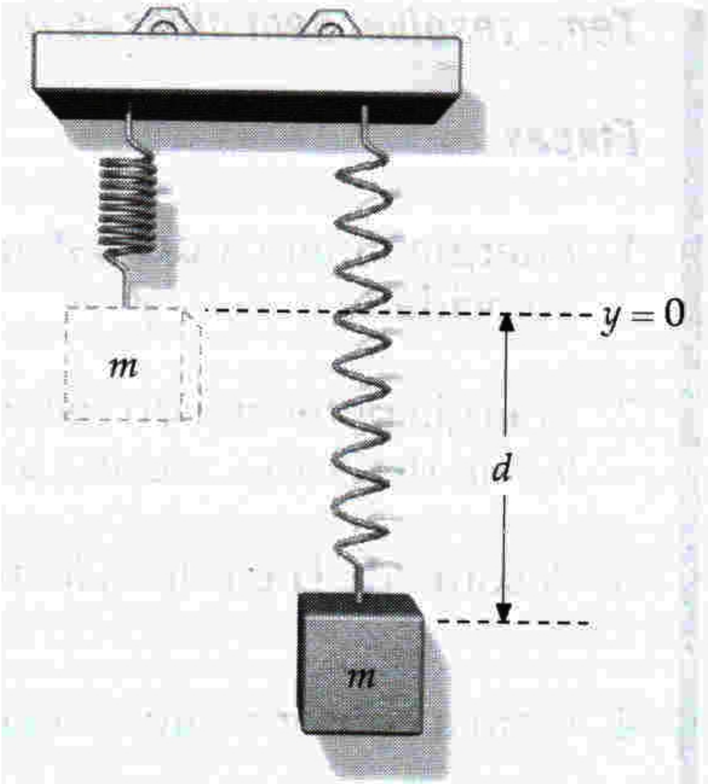
$$E_{mec,\,inicial} = \frac{mv_i^2}{2} + \frac{kx_i^2}{2} = \frac{kx^2}{2}$$

$$E_{mec,\,final} = \frac{mv_f^2}{2} + mgy_f = mgh$$

$$\frac{kx^2}{2} = mgh \rightarrow h = \frac{kx^2}{2\text{mg}}$$

$$h = s\,sen\,\theta \rightarrow s = \frac{h}{sen\,45^o} \rightarrow s = 0{,}72\ m$$

Exemplo 7-4: Uma mola, cuja constante elástica é k, está pendurada verticalmente. Um bloco de massa m está ligado a esta mola na posição indeformada e cai a partir do repouso. Calcule uma expressão para a distância máxima de queda do bloco antes de se iniciar seu movimento de subida.



$$E_{mec,\,final} = E_{mec,\,inicial}$$

$$mgy_f + \frac{ky_f^2}{2} + \frac{mv_f^2}{2} = mgy_i + \frac{ky_i^2}{2} + \frac{mv_i^2}{2}$$

$$mg(-d) + \frac{k(-d)^2}{2} + 0 = 0 + 0 + 0$$

$$\frac{kd^2}{2} - mgd = 0 \rightarrow \left(\frac{kd}{2} - mg\right) d = 0$$

$$\cancel{d = 0}$$ ou $$kd - mg = 0 \rightarrow d = \frac{2\text{mg}}{k}$$

Adicional: **Uma partícula move-se ao longo da direção x sob o efeito de uma força F(x) = −kx +Kx^2, onde k = 200 N/m e K = 300 N/m^2.**

(a) Calcule a energia potencial U(x) da partícula, tomando U(0) = 0, e faça um gráfico de U(x) para -0,5 m < x < 1 m.

(b) Ache as posições de equilíbrio da partícula e discuta sua estabilidade.

(c) Para que o domínio de valores de x e da energia total E a partícula pode ter um movimento oscilatório?

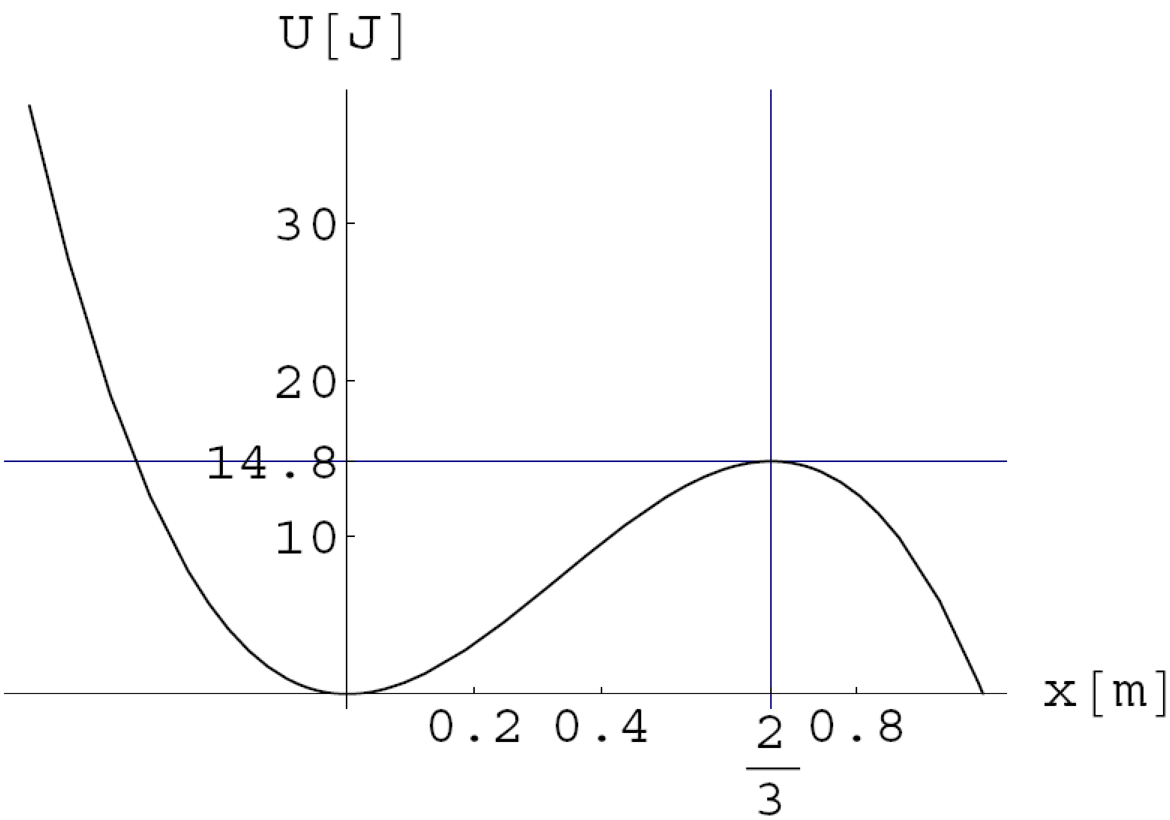
(d) Discuta qualitativamente a natureza do movimento da partícula nas demais regiões do eixo dos x.

$$Dado:\ \int_0^x y^n\, dy = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$Sabemos\ que:\ F(x) = \frac{-dU}{dx}$$

$$\Delta U = -\int_0^x \left(-kx' + Kx'^2\right) dx'$$

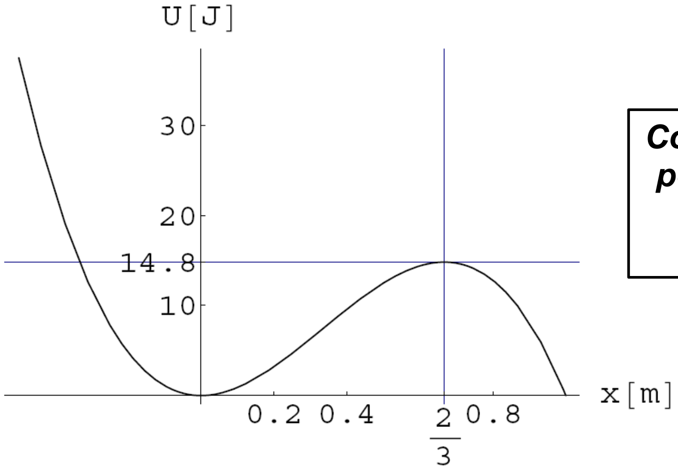
$$U(x) - U(0) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{K}{3}x^3 \rightarrow U(x) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{K}{3}x^3$$



$$U(x) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{K}{3}x^3$$

$$As\ posições\ de\ equilíbrio\ correspondem: \frac{dU}{dx} = 0$$

$$kx - Kx^2 = 0\ cuja\ solução\ será:\ x = \frac{k}{K} = \frac{2}{3}m,\ e\ x = 0$$

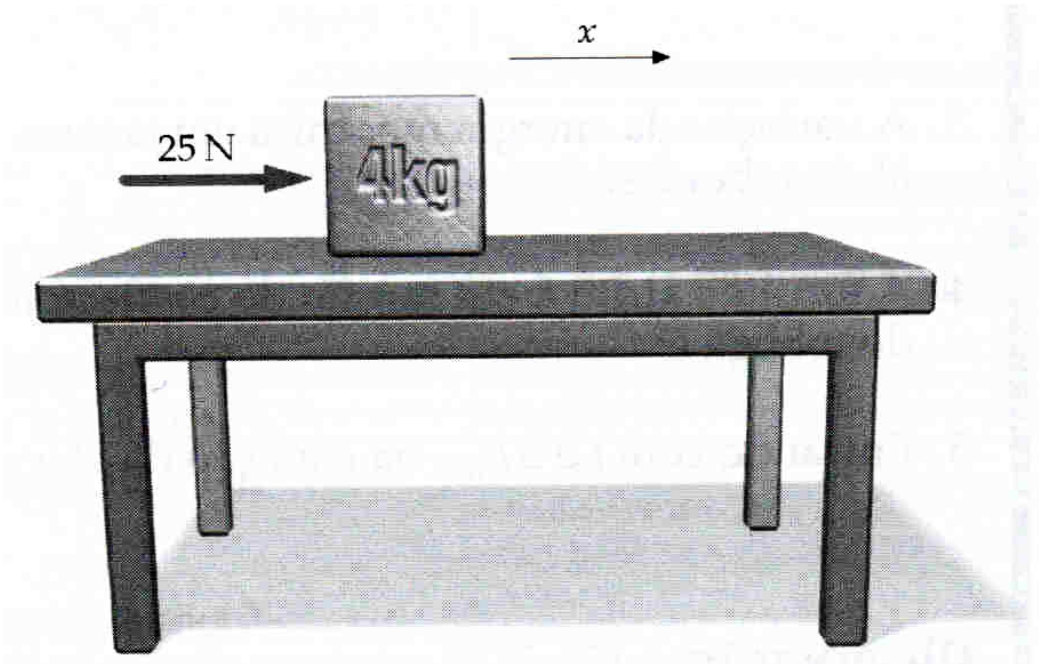


Como podemos observar x=2/3 e x=0 são pontos de equilíbrio. x=0 corresponde a um equilíbrio estável e x=2/3 corresponde a um equilíbrio instável.

c) A partícula pode ter um movimento oscilatório para valores x tais que x < (2/3) m e energias menores que U(2/3) = 14,8 J.

d) Na região negativa do eixo x e energias superiores a 14,8 J a partícula sente uma forçaa atrativa que a acelera na direção da origem. Depois de passar pela origem a sua velocidade diminui mas a sua enrgia cinética é suficiente para escapar do campo de potencial. Para valores de x positivos e maiores do que x = (2/3) m a partícula experimenta uma forçaa repulsiva que a afasta da origem.

Exemplo 7-8: Uma caixa de 4 kg é empurrada a partir do repouso, sobre uma mesa horizontal, por uma distância de 3 m com uma força horizontal de 25 N. O coeficiente de atrito dinâmico entre a caixa e a mesa é de 0,35. Calcule (a) o trabalho externo realizado pelo sistema bloco-mesa, (b) a energia dissipada pelo atrito, (c) a energia cinética final na caixa e (d) a velocidade da caixa



$$\sum W_{ext} = W_{força\,no\,bloco}$$

$$W_{força\,no\,bloco} = F_{emp}\,\Delta x = (25\text{N})(3\text{m}) = 75\,J$$

$$\Delta E_{dissipada} = f_{at}\,\Delta x = \mu_d F_N\,\Delta x = \mu_d\, mg\,\Delta x$$

Energia dissipativa

$$\Delta E_{dissipada} = (0{,}35)(4\,kg)(9{,}8\,N/kg)(3\text{m}) = 41{,}2\,J$$

$$W_{ext} = \Delta E_{sistema}$$

Pelo teorema da conservação do trabalho-energia

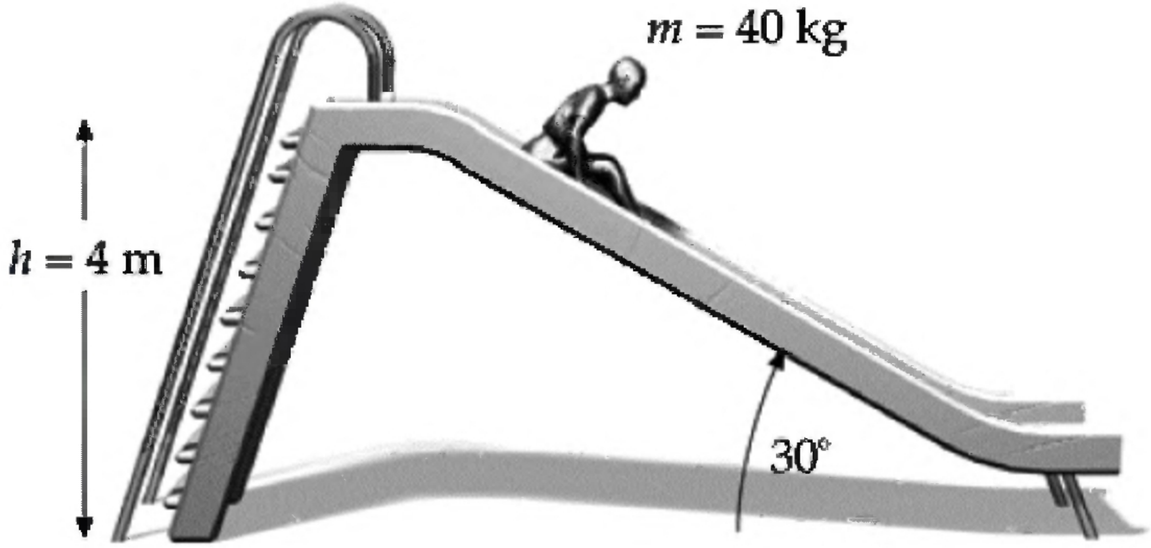
$$W_{ext} = \Delta E_{mecânica} + \Delta E_{dissipada}$$

$$W_{ext} = K_f + \Delta E_{dissipada}$$

$$K_f = W_{ext} - \Delta E_{dissipada} = 75{,}0 - 41{,}2 = 33{,}8\,J$$

$$K_f = \frac{mv_f^2}{2} \rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2\text{K}_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(33{,}8\,J)}{4\text{kg}}} = 4{,}11\,m/s$$

Exemplo 7-10: Uma criança com massa de 40 kg desce de um escorregador inclinado com 30° com a horizontal em um trecho de 8,0 m de comprimento. O coeficiente de atrito dinâmico entre a criança e o brinquedo é de 0,35. Se a criança parte do repouso no topo do escorregador, qual é a sua velocidade quando atinge a base?



$$W_{ext} = \Delta E_{sistema}$$ **Pelo teorema da conservação do trabalho-energia**

$$W_{ext} = \Delta E_{mecânica} + \Delta E_{dissipada} = 0$$ **Não temos foras atuando no sistema**

$$\Delta U = mgh$$ **Energia mecânica → Energia Potencial**

$$\Delta K = K_f = \frac{mv_f^2}{2}$$ **Energia mecânica → Energia Cinética**

$$\Delta E_{dissipada} = f_{atrito} = \mu_c F_{Normal} = \mu_c mgcos\,\theta$$ **Energia dissipativa**

$$0 = -mgh + \frac{mv_f^2}{2} + \mu_d mgcos\,\theta\, s$$

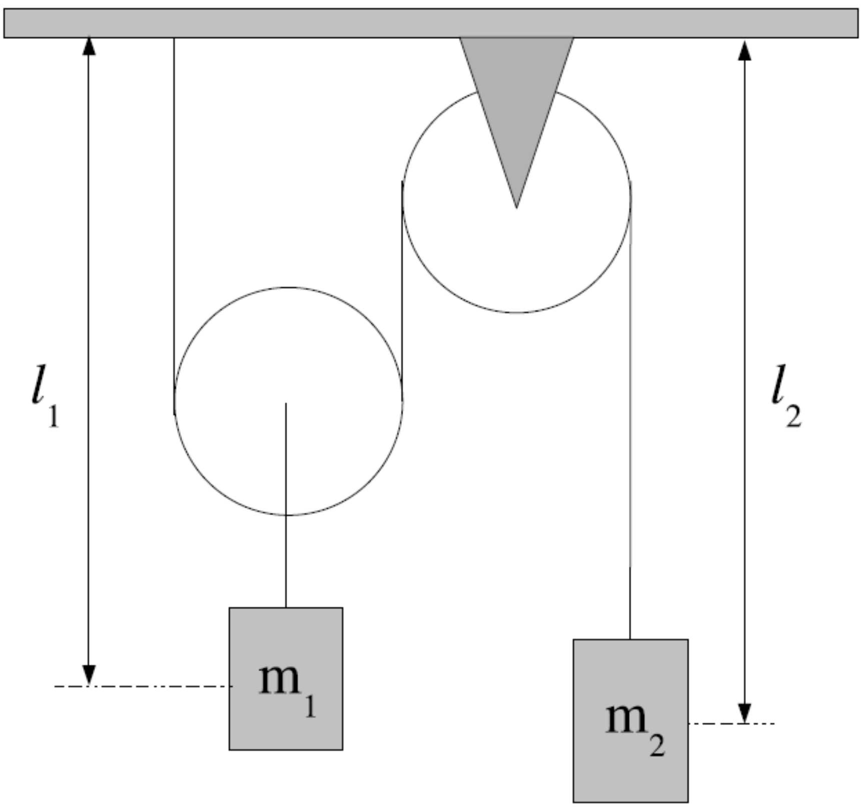
$$h = sen\,\theta\, s\,,\ F_{normal} = mgcos\,\theta$$

$$0 = -mg\, sen\,\theta\, s + \frac{mv_f^2}{2} + \mu_d mgcos\,\theta\, s$$

$$v_f^2 = 2gs(sen\,\theta - \mu_d \cos\theta) = 2(9{,}8)(8)(sen30 - 0{,}35\,cos30)$$

$$v_f = 5{,}60\, m/s$$

Adicional: No sistema da figura, onde as polias e os fios têm massa desprezível, m_1 = 1 kg e m_2 = 2 kg. (a) O sistema é solto com velocidade inicial nula quando as distâncias ao teto são l_1 e l_2. Usando conservação de energia, calcule as velocidades de m_1 e m_2 depois que m_2 desceu uma distância x_2. (b) Calcule a partir daí as acelerações a_1 e a_2 das duas massas. (c) Verifique os resultados usando as leis de Newton.



$$m_1 = 1\text{kg}\,,\ \vec{x}_1 = \frac{-\vec{x}_2}{2}$$

$$m_2 = 2\text{kg}\,,\ \vec{v}_1 = \frac{-\vec{v}_2}{2}$$

$$v_{1\text{i}} = v_{2\text{i}} = 0,\ \vec{a}_1 = \frac{-\vec{a}_2}{2}$$

$$v_{1\text{f}} \equiv v_1\,,\ v_{2\text{f}} \equiv v_2$$

Pela conservação de energia

$$E_i = E_f \rightarrow \Delta U_i + K_i = \Delta U_f + K_f$$

A energia potencial gravitacional pode ser calculada a partir da seguinte expressão geral:

$$\Delta U = U(x) - U(0) = -\int_0^x \vec{F}(x')\cdot d\vec{x}' = -\int_0^x mgdx'$$

$$\Delta U = -mg\int_0^x dx' = mg\left[x'\right]_0^x = -mgx$$

Que aplicada ao sistema sob consideração, fornece o seguinte resultado para as energias totais inicial e final:

$$E_i = \Delta U_{1\text{i}} + \Delta U_{21} + \frac{1}{2}m_1 v_{1\text{i}}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2\text{i}}^2$$

$$E_i = -m_1 g l_1 - m_2 g l_2 = -g\left(m_1 l_1 + m_2 l_2\right)$$

Onde usamos o fato de que v_{1i} = v_{2i} = 0 e,

$$E_f = \Delta U_{1\text{f}} + \Delta U_{2\text{f}} + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$$E_f = -m_1 g\left(l_1 - \frac{1}{2}x_2\right) - m_2 g\left(l_2 + \frac{1}{2}x_2\right) + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(-2\text{v}_1\right)^2$$

$$E_f = -m_1 g l_1 + \frac{1}{2}m_1 g x_2 - m_2 g l_2 - m_2 g x_2 + \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + 2\text{m}_2 v_1^2$$

$$E_f = -g\left(m_1 l_1 + m_2 l_2\right) + g x_2\left(\frac{1}{2}m_1 - m_2\right) + v_1^2\left(\frac{1}{2}m_1 - 2\text{m}_2\right)$$

Igualando as expressões da energia inicial e final, temos:

$$E_i = E_f$$

$$-g\left(m_1 l_1 + m_2 l_2\right) = -g\left(m_1 l_1 + m_2 l_2\right) + g x_2\left(\frac{1}{2} m_1 - m_2\right) + v_1^2\left(\frac{1}{2} m_1 - 2\mathrm{m}_2\right)$$

$$v_1^2 = \frac{-g x_2\left(\frac{1}{2} m_1 - m_2\right)}{\left(\frac{1}{2} m_1 - 2\mathrm{m}_2\right)} = \frac{-g x_2\left(\frac{1}{2} 1 - 2\right)}{\left(\frac{1}{2} 1 - 2(2)\right)} = \frac{-g x_2\left(\frac{-3}{2}\right)}{\left(\frac{9}{2}\right)}$$

$$v_1 = \pm\sqrt{\frac{g x_2}{3}}$$

Neste caso, de acordo com a converção adotada, o sinal negativo corresponde à situação física correta.
Agora, usando o fato de que:

$$v_1 = -\frac{1}{2} v_2 ,\ com\ isso\ temos:\ v_2 = \pm 2\sqrt{\frac{g x_2}{3}}$$

Sendo que, neste caso, o sinal positivo corresponde à solução fisicamente correta.

No item b. como as forças que atuam sobre m_1 e m_2 são constantes, temos que as acelerações a_1 e a_2 também são constantes. Então:

$$v_1^2 = v_{1\mathrm{i}}^2 - 2\mathrm{a}_1 \frac{x_1}{2} \rightarrow a_1 = -\frac{v_1^2}{x_2} \rightarrow a_1 = -\frac{g}{3}$$

$$v_2^2 = v_{2\mathrm{i}}^2 - 2\mathrm{a}_2 x_2 \rightarrow a_2 = \frac{v_2^2}{2\mathrm{x}_2} \rightarrow a_2 = \frac{g}{3}$$

No item c, considerando os diagramas de corpo livre para cada um dos corpos, temos que:

$$Na\ \ polia\ 1 : \sum F_x = 0 \rightarrow T_1 - 2\mathrm{T}_2 = 0 \rightarrow T_1 = 2\mathrm{T}_2$$

$$m_1 : \sum F_x = m_1 a_1 \rightarrow P_1 - T_1 = -m_1 a_1 \rightarrow m_1 g - T_1 = -m_1 a_1$$

$$m_2 : \sum F_x = m_2 a_2 \rightarrow P_2 - T_2 = m_2 a_2 \rightarrow m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

Substituindo a equação da polia 1 na massa m_1 e utilizado o fato de que a_2 = -2 a_1, temos que :

$$m_1 g - 2\mathrm{T}_2 = -m_1 a_1$$

$$m_2 g - T_2 = -2 m_2 a_1 2 \rightarrow 2\mathrm{m}_2 g - 2\mathrm{T}_2 = -4 m_2 a_1$$

Combinando as duas expressões acima teremos:

$$a_1 = -\frac{g(m_1 - 2\mathrm{m}_2)}{-m_1 + 4 m_2}$$

Substituindo as massas:

$$a_1 = -\frac{g}{3},\ e\ a_2 = \frac{2\mathrm{g}}{3}$$

Como queríamos demonstrar (cqd) !