



E 16: Uma casca hemisférica de raio r está carregada com carga positiva de densidade superficial dada por: $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$, onde σ_0 é uma constante positiva, e θ é a coordenada polar de um sistema de coordenadas esféricas com origem no centro do hemisfério, como mostrado na figura. (A beirada da casca fica no plano xy .)

(a) Encontre o potencial elétrico na origem de coordenadas, tomando o potencial em pontos infinitamente distantes como zero; $V(\infty) = 0$. (b) Uma partícula de massa m e carga q positiva é colocada na origem do sistema de coordenadas e largada a partir do repouso. A que velocidade a partícula tenderá quando se afasta muito da casca hemisférica?

Solução:

(a) Supondo $V(\infty) = 0$ sabemos que a contribuição para o potencial fornecido por um elemento infinitesimal de carga δq na distância r da origem é

$$\delta V(0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta q}{r}$$

Então temos

$$\begin{aligned} V(0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \\ V(0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{(\sigma_0 \cos \theta)(r^2 \sin \theta d\theta d\phi)}{r} \\ V(0) &= \frac{\sigma_0 r}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta}_{=1/2} \underbrace{\int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi}_{=2\pi} \\ &= \frac{\sigma_0 r}{4\epsilon_0} \end{aligned}$$

(b) A partícula de massa m e carga q colocada na origem possui a energia potencial $U = Vq = q\sigma_0 r / (4\epsilon_0)$. A força repulsiva que atua na partícula tem direção e sentido do vetor $(-\hat{k})$. A partícula adquire uma velocidade com este mesmo sentido e esta direção. Quando a partícula se afasta muito da casca carregada, por conservação de energia, toda energia potencial é convertida em energia cinética: $U = q\sigma_0 r / (4\epsilon_0) = m\vec{v}^2 / 2$.

Então segue $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2U}{m}} = \sqrt{\frac{\sigma_0 r q}{2m\epsilon_0}}$