Campo Magnético no Interior e Exterior de um Cilindro Condutor

(Exemplo 28.8 (do Sears Zemansky)

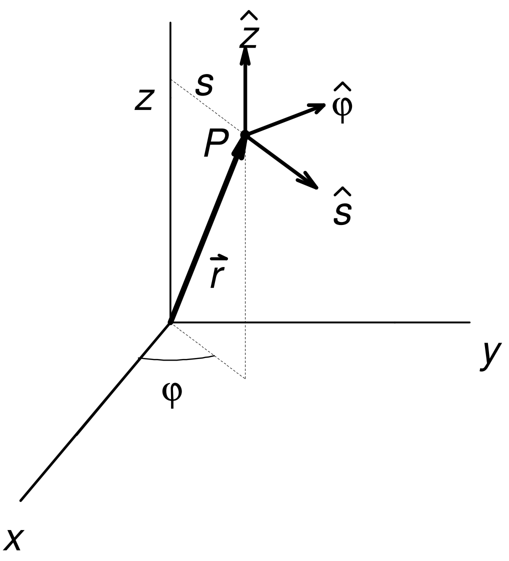


Fig.1 Coordenadas cilíndricas

Um condutor cilíndrico muito longo, de raio R, conduz uma corrente I. A corrente está uniformemente distribuída na área da seção reta do cilindro. Calcule o valor do campo magnético num ponto P genérico.

Solução.

Tratando o cilindro como infinitamente comprido temos um problema com simetria cilíndrica e é vantajoso resolver a questão com a lei de Ampère.

Primeiro passo: Usar a simetria para determinar a forma geral do campo magnético $\vec{B}$.

A simetria do problema sugere escrever o campo em coordenadas cilíndricas $\langle s, \varphi, z \rangle$ (compare com a figura) sendo o eixo z o eixo de simetria do cilindro, s a distância ao eixo z e φ o ângulo que a projeção ortogonal do vetor posição no plano xy faz com o eixo x. Os vetores básicos associados a este sistema de coordenadas são definidos por

$$\hat{s} \underset{Def.}{=} \frac{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\right)_{\varphi z}}{\left|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}\right)_{\varphi z}\right|} \qquad \hat{\varphi} \underset{Def.}{=} \frac{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right)_{s z}}{\left|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right)_{s z}\right|} \qquad \hat{z} \underset{Def.}{=} \frac{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right)_{s \varphi}}{\left|\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right)_{s \varphi}\right|}$$

Vamos escrever o campo magnético nesta base:

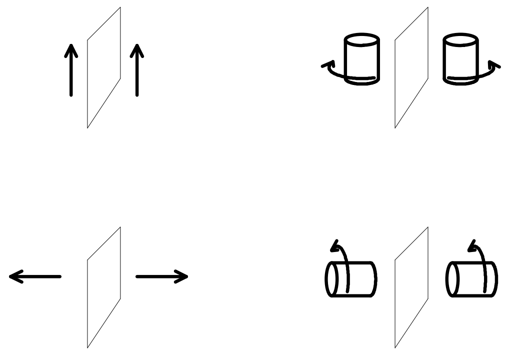
$$\vec{B} = B_s \hat{s} + B_\varphi \hat{\varphi} + B_z \hat{z}$$

Os elementos de simetria do problema são:

(a) Rotações de qualquer ângulo em volta do eixo z.
(b) Simetria especular com qualquer plano especular que contem o eixo z.
(c) Translações na direção z.

Os valores do campo magnético são pseudo-vetores. Em relação a rotações eles se comportam como vetores e com reflexões em espelhos eles têm o comportamento oposto de vetores: componentes paralelas ao espelho mudam de sinal e componentes perpendiculares ficam inalteradas. Escolhendo um plano especular que contenha o eixo z e o ponto P, onde queremos saber o valor do campo, percebemos que as componentes B_s e B_z tem que ser nulas. Isto porque $\hat{s}$ e $\hat{z}$ estão dentro deste plano especular e portanto estes componentes do campo teriam que mudar de sinal. Então a invariância do campo implica em $B_r = B_z = 0$.

Figura 2 Comportamento de vetores e pseudo-vetores na reflexão num espelho. Os pseudo-vetores são representados por velocidades angulares.



Então o campo tem a forma

$$\vec{B} = B_\varphi \hat{\varphi}$$

A simetria de rotação (a) e de translação (c) implica imediatamente que B_φ pode somente depender de s . Temos então

$$\vec{B}(s,\varphi) \quad = \quad B_\varphi(s)\hat{\varphi}$$

Segundo Passo: Escolher um caminho de integração e fazer a integral.
Obviamente vamos escolher um círculo concêntrico com o cilindro tal que ele contenha o ponto P onde queremos conhecer o campo. Esta escolha garante que a função incógnita B_φ tenha um valor constante na integração. O elemento de linha é

$$d\vec{\ell} \quad = \quad s\,\hat{\varphi}'\,d\varphi'$$

onde as variáveis com linha são variáveis de integração. Obtemos

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} \quad = \quad \int_0^{2\pi} B_\varphi(s)\;\hat{\varphi}'\cdot\hat{\varphi}'\,s\,d\varphi' \quad = \quad 2\pi B_\varphi(s)\,s$$

Terceiro passo: Aplicar a lei de Ampère:

$$\oint_{\partial S} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} \quad = \quad \mu_0 \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

Nesta equação a superfície S tem que ser orientada de tal forma que o sentido dos vetores de superfície $\delta\vec{S}$ formem com o sentido de rotação associada ao percurso da integração de linha uma hélice direita. Isto significa no nosso caso que o elemento de superfície é

$$d\vec{S} \quad = \quad \hat{z}\,s'\,d\varphi'\,ds'$$

onde as variáveis com linha são variáveis de integração.

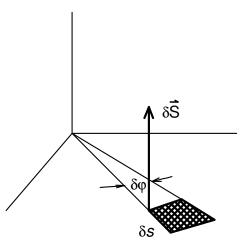


Fig. 3 Elemento de superfície

Se escolho a orientação do eixo z igual à escolha do sentido de corrente positiva, posso escrever a densidade de corrente na seguinte forma:

$$\vec{j}(s) = \begin{cases} \dfrac{I\,\hat{z}}{\pi R^2} & \text{para} \quad s \le R \\ 0 & \text{para} \quad s > R \end{cases}$$

Com isto obtemos

$$\iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \begin{cases} \left(\dfrac{s}{R}\right)^2 I & \text{para} \quad s \le R \\ I & \text{para} \quad s > R \end{cases}$$

e substituindo na lei de Ampère:

$$2\pi B_\varphi(s)\, s = \mu_0 \begin{cases} \left(\dfrac{s}{R}\right)^2 I & \text{para} \quad s \le R \\ I & \text{para} \quad s > R \end{cases} .$$

E o resultado final é

$$\vec{B}(s,\varphi) = \frac{\hat{\varphi}\mu_0}{2\pi} \begin{cases} \dfrac{s}{R^2} I & \text{para} \quad s \le R \\ \dfrac{I}{s} & \text{para} \quad s > R \end{cases}$$

A resposta no livro (edição 12) para o caso $s < R$ está errada!
Discussão do resultado: Dentro do fio, o módulo do campo cresce linearmente com s. Isso parece razoável, uma vez que o campo deva ser nulo no eixo de simetria. Fora do cilindro obtivemos o mesmo resultado do fio fino. Isto também parece ser razoável. Na superfície do condutor o campo é contínuo. Observe que o campo depende de φ porque o vetor unitário $\hat{\varphi}$ depende desta coordenada.