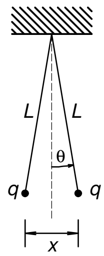
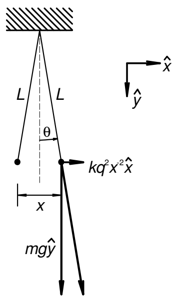
E 001: Duas pequenas bolas condutoras idênticas, de massa m e carga q, estão suspensas por fios não-condutores de comprimento L, como mostra a figura. Suponha θ tão pequeno que $\tan\theta$ possa ser substituída por $\operatorname{sen}\theta$ com erro desprezível.
(a) Mostre que, no equilíbrio vale

$$x = \left(\frac{2k\,q^2 L}{mg}\right)^{1/3}$$





Nesta fórmula x é a distância das bolas, $k \approx 9\times10^9\,\mathrm{N\,m^2C^{-2}}$ é a constante de proporcionalidade na lei de Coulomb e $g \approx 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ a aceleração da gravidade. **(b)** Sendo $L = 120\,\mathrm{cm}$, $m = 10\,\mathrm{g}$, e $x = 50\,\mathrm{mm}$, qual é o valor de q?

Solução: (a) A soma da força peso e da força elétrica tem que apontar na direção do fio, pois o fio flexível pode anular somente forças nesta direção. Então vale:

$$\frac{x/2}{L} = \operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta = \frac{kq^2x^{-2}}{mg}$$

Resolver para x resulta na fórmula desejada.
(b)

$$q = \sqrt{\frac{x^3 mg}{2kL}} = \sqrt{\frac{(50\,\mathrm{mm})^3\,10\,\mathrm{g}\times9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}}{2\times9\times10^9\,\mathrm{N\,m^2C^{-2}}\times120\,\mathrm{cm}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1{,}25\times10^{-4}\,\mathrm{m^3}\times10^{-2}\,\cancel{\mathrm{kg}}\times9{,}81\,\mathrm{m}\,\cancel{\mathrm{s^{-2}}}}{2\times9\times10^9\,\cancel{\mathrm{kg}}\,\mathrm{m}\,\cancel{\mathrm{s^{-2}}}\,\mathrm{m^2C^{-2}}\times1{,}20\,\mathrm{m}}} = 2{,}38\times10^{-8}\,\mathrm{C}$$

Atenção: A solução

$$q = \sqrt{\frac{x^3 mg}{2kL}} = \sqrt{\frac{1{,}25\times10^{-4}\times10^{-2}\times9{,}81}{2\times9\times10^9\times1{,}20}} = 2{,}38\times10^{-8}\,\mathrm{C}$$

está **ERRADA**, pois q não é um número! Erros deste tipo custam pontos na prova!

E002: Duas cargas pontuais de valor q estão posicionadas nos pontos P1 e P2, cujas coordenadas num sistema de coordenadas cartesianas são $\langle x_1 = 0, y_1 = a, z_1 = 0\rangle$ e $\langle x_2 = 0, y_2 = -a, z_2 = 0\rangle$. Uma carga Q está no ponto P cujas coordenadas são $\langle x_\mathrm{P} = L, y_\mathrm{P} = 0, z_\mathrm{P} = 0\rangle$, com $L > 0$. **(a)** Use a lei de Coulomb para calcular a força que atua sobre a carga Q. **(b)** Calcule esta força supondo agora que $q = 50\,\mathrm{nC}$, $Q = 200\,\mathrm{nC}$, $a = 1\,\mathrm{cm}$ e $L = 4\,\mathrm{cm}$.

Solução: (a) Vetores posição dos respectivos pontos P1, P2 e P:

$$\vec{r}_1 = a\,\hat{y}, \qquad \vec{r}_2 = -a\,\hat{y}, \qquad \vec{r} = L\,\hat{x}$$

onde $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$ são os vetores unitários apontando nas direções dos respectivos eixos *x,y* e *z*. A força que atua sobre a carga no ponto P é:

$$\vec{F} = k\,q\,Q\sum_{i=1}^{2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3} = k\,q\,Q\left\{\frac{L\hat{x}-a\hat{y}}{\left(L^2+a^2\right)^{3/2}}+\frac{L\hat{x}+a\hat{y}}{\left(L^2+a^2\right)^{3/2}}\right\} =$$

$$= \frac{k\,q\,QL2}{\left(L^2+a^2\right)^{3/2}}\,\hat{x}$$

(b)

$$\vec{F} = \frac{k\,q\,QL2}{\left(L^2+a^2\right)^{3/2}}\,\hat{x} = \frac{9\times10^9\,\mathrm{N\,m^2C^{-2}}\;5\times10^{-8}\,\mathrm{C}\times2\times10^{-7}\,\mathrm{C}\times0{,}04\,\mathrm{m}\times2}{\left(16+1\right)^{3/2}\times10^{-6}\,\mathrm{m^3}}\,\hat{x}$$

$$= 0{,}10\,\mathrm{N}\,\hat{x}$$

E 003: Considere um sistema de três cargas: q_0 na origem de um sistema cartesiano de coordenadas, q_1 no ponto P_1 com coordenadas $\langle x_1 = a, y_1 = 0, z_1 = 0\rangle$ com $a > 0$, e q_2 no ponto P_2 com coordenadas $\langle x_2 = 0, y_2 = a, z_2 = 0\rangle$. **(a)** Calcule o campo elétrico no ponto P com coordenadas $\langle x_P = a, y_P = a, z_P = 0\rangle$. **(b)** Calcule o módulo deste vetor para o caso de que $q_0 = q_1 = 1\mu\mathrm{C}$, $q_2 = -2\mu\mathrm{C}$ e $a = 10\,\mathrm{cm}$.

Solução: Vetores posição:

$$P_0:\ \vec{r}_0 = 0 \qquad P_1:\ \vec{r}_1 = a\,\hat{x}, \qquad P_2:\ \vec{r}_2 = a\hat{y}, \qquad P:\ \vec{r}_P = a\,\hat{x}+a\hat{y}$$

Valor do campo em P:

$$\vec{E}\left(\vec{r}_P\right) = k\sum_{i=0}^{2}\frac{q_i\left(\vec{r}_P-\vec{r}_i\right)}{\left|\vec{r}_P-\vec{r}_i\right|^3}$$

$$= k\left\{q_0\frac{a\hat{x}+a\hat{y}}{\left(2a^2\right)^{3/2}}+q_1\frac{a\hat{x}+a\hat{y}-a\hat{x}}{a^3}+q_2\frac{a\hat{x}+a\hat{y}-a\hat{y}}{a^3}\right\} =$$

$$= \frac{k}{a^2}\left\{\hat{x}\left(q_0 2^{-3/2}+q_2\right)+\hat{y}\left(q_0 2^{-3/2}+q_1\right)\right\}$$

(b)

$$\vec{E}\left(a\,\hat{x}+a\hat{y}\right) = \frac{k}{a^2}\left\{\hat{x}\left(q_0 2^{-3/2}+q_2\right)+\hat{y}\left(q_0 2^{-3/2}+q_1\right)\right\} =$$

$$= \frac{9\times10^9\,\mathrm{N\,m^2C^{-2}}}{0{,}01\,\mathrm{m^2}}\times10^{-6}\,\mathrm{C}\left\{\hat{x}\left(2^{-3/2}-2\right)+\hat{y}\left(2^{-3/2}+1\right)\right\} =$$

$$\approx 9\times10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\times\left\{-1{,}64645\hat{x}+1{,}35355\hat{y}\right\}$$

Então

$$\left|\vec{E}\left(a\,\hat{x}+a\hat{y}\right)\right| = 19{,}18\times10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}$$

E 004: Duas cargas positivas pontuais com valor q são colocadas nos pontos P1 e P2, cujas posições são dadas pelos vetores posição $\vec{r}_1 = 0\hat{x}+0\hat{y}+0\hat{z}$ e $\vec{r}_2 = L\hat{x}$ com $L > 0$. $\langle\hat{x},\hat{y},\hat{z}\rangle$ é uma base ortonormal associada ao espaço físico do referencial do laboratório.

a) Calcule o campo elétrico em um ponto P genérico (isto é, um ponto qualquer) sobre a mediatriz dos pontos P1 e P2 (caso você não saiba o significado de mediatriz, então consulte um livro de geometria ou a Wikipídia).
b) Ao colocarmos uma carga Q sobre o ponto P, qual força ela sentirá?
c) Vamos agora alterar a distribuição das cargas da seguinte maneira: a carga em P1 é mantida no mesmo lugar e a outra carga é levada até o ponto P3 com coordenadas $\langle 0, L, 0 \rangle$ ou seja, cujo vetor posição é $\vec{r}_3 = L\hat{y}$. Isto significa que os vetores $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ sofreram uma rotação de $\pi/2$ no sentido antihorário com eixo de rotação no eixo z. Escreva o campo elétrico desta nova configuração de cargas também sobre um ponto qualquer da mediatriz do segmento dos pontos P1 e P3. (Observe que não é necessário fazer cálculo algum).
d) Discuta o que ocorre com o campo elétrico quando uma distribuição de cargas é girada.
Solução:
(a) Os vetores posição

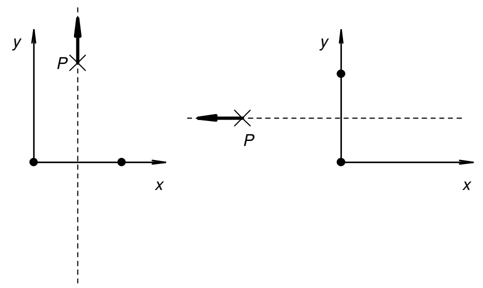
$$P_1: \quad \vec{r}_1 = 0 \qquad P_2: \quad \vec{r}_1 = L\,\hat{x}, \qquad P: \quad \vec{r}_P = \frac{L}{2}\hat{x} + y_P\hat{y} + z_P\hat{z}$$

O campo nos pontos P tem os valores:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}_P) &= kq\left\{ \frac{\hat{x}\,L/2 + \hat{y}\,y_P + \hat{z}\,z_P}{\left(z_P{}^2 + y_P{}^2 + L^2/4\right)^{3/2}} + \frac{\hat{x}\,L/2 + \hat{y}\,y_P + \hat{z}\,z_P - \hat{x}\,L}{\left(z_P{}^2 + y_P{}^2 + L^2/4\right)^{3/2}} \right\} = \\ &= kq\frac{2y_P\hat{y} + 2z_P\hat{z}}{\left(z_P{}^2 + y_P{}^2 + L^2/4\right)^{3/2}} \end{aligned}$$

(b) A força é $Q\,\vec{E}(\vec{r}_P)$.

(c) O campo gerado pelas cargas giradas no ponto girado é o vetor do campo no antigo ponto submetido ao mesmo giro como mostra a figura. Consequentemente temos para um ponto P' na nova mediatriz com coordenadas $\langle x_{P'},\ L/2,\ z_{P'} \rangle$



$$\vec{E}'(x_{P'},\ L/2,\ 0) = kq\frac{2x_{P'}\hat{x} + 2z_{P'}\hat{z}}{\left(z_{P'}{}^2 + x_{P'}{}^2 + L^2/4\right)^{3/2}}$$

(d) Se o campo gerado por uma configuração de cargas é $\vec{E}(\vec{r})$, o campo $\vec{E}'(\vec{r})$ gerado pela configuração que resulta da original através de um giro R em volta de um eixo que passa pela origem é dada por

$$\vec{E}'(\vec{r}) = R\vec{E}\left(R^{-1}\vec{r}\right)$$

Nesta fórmula R é a transformação linear que atua sobre vetores e descreve o giro.