Exercício Resolvido (Lei de Gauss, potencial e capacitância)

Uma bola metálica oca tem um raio interno de 10 cm. Dentro da cavidade desta bola há uma segunda esfera metálica com raio externo de 5 cm. Os centros das duas esferas coincidem. (a) Na esfera interna existe uma carga elétrica q e na externa uma carga $-q$. Use a lei de Gauss para calcular o campo elétrico na região vazia dentro da cavidade e fora da bola menor. (b) Usando o resultado do item anterior, calcule a diferença de potencial elétrico entre as esferas. (c) Usando o resultado do item anterior, calcule a capacitância deste arranjo. (os itens (a) e (b) podem ser resolvidos de forma algébrica sem o uso dos valores concretos, 10 cm e 5 cm. Estes devem ser usados no item (c).) Dados: $\left(4\pi\varepsilon_0\right)^{-1} \approx 9{,}0\times10^9\,\mathrm{N\,m^2C^{-2}}$

Solução:

Primeiramente substituímos os valores concretos dos raios por símbolos; a = raio da esfera interna, $b =$ raio interno da esfera externa. No fim podemos botar $a = 5\,\mathrm{cm}$ e $b = 10\,\mathrm{cm}$.

(a) Este é um problema de simetria esférica e é conveniente escrever o campo elétrico usando coordenadas esféricas com origem no centro das esferas.

$$x = r\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\varphi), \qquad y = r\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi), \qquad z = r\cos(\theta) \tag{1.1.1}$$

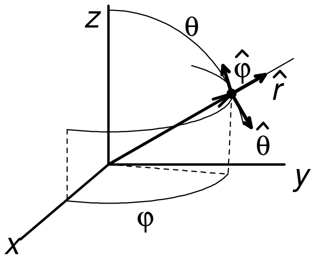

Fig. 1 Coordenadas esféricas e base associada a um ponto.

Em cada ponto do espaço podemos fixar uma base vetorial de vetores normalizados e mutuamente ortogonais que apontem nas direções das linhas de coordenadas. Estes vetores básicos são definidos da seguinte forma:

$$\hat{r} \underset{def.}{=} \frac{\left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi}}{\left|\left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi}\right|}, \qquad \hat{\theta} \underset{def.}{=} \frac{\left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right)_{r,\varphi}}{\left|\left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right)_{r,\varphi}\right|}, \qquad \hat{\varphi} \underset{def.}{=} \frac{\left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right)_{r,\theta}}{\left|\left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right)_{r,\theta}\right|}, \tag{1.1.2}$$

onde $\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z = \hat{r}r$ é o vetor posição do ponto onde erguemos esta base. Então vamos escrever o vetor do campo elétrico nesta base:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{r}E_r(\vec{r}) + \hat{\theta}E_\theta(\vec{r}) + \hat{\varphi}E_\varphi(\vec{r}) \tag{1.1.3}$$

Da simetria esférica concluímos que $E_\varphi(\vec{r}) = 0$ e $E_\theta(\vec{r}) = 0$ e que E_r depende somente do raio:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{r}E_r(r) \tag{1.1.4}$$

A argumentação detalhada para esta conclusão está no apêndice.

Com a forma geral do campo (1.1.4) podemos escolher uma superfície gaussiana de tal maneira que a integral de superfície do campo possa ser calculado apesar de não conhecermos o campo. Para determinar o campo num ponto $\vec{r}$ escolhemos como superfície gaussiana uma esfera de raio $|\vec{r}|$ e centro na origem. Com esta escolha o elemento de superfície é

$$d\vec{S} \;=\; \hat{r}\, dA \tag{1.1.5}$$

onde dA é o elemento de área. Com isto a integral de fluxo do campo elétrico é

$$\underset{\substack{\text{esfera de}\\ \text{raio } r}}{\oint\!\!\oint} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{S}\,' \;=\; \underset{\substack{\text{esfera de}\\ \text{raio } r}}{\oint\!\!\oint} E_r(r')\,\hat{r}\,'\cdot\hat{r}\,'\, dA' \tag{1.1.6}$$

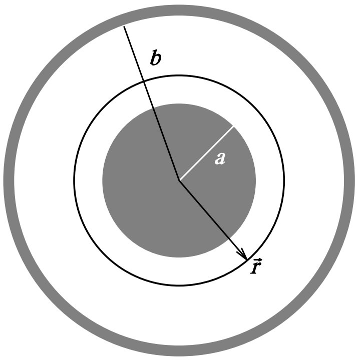

Fig. 2 Esferas condutoras com superfície Gaussiana que contêm o ponto $\vec{r}$.

Usando que na superfície de integração vale $r' = const. = |\vec{r}| = r$ podemos tirar $E_r(r')$ da integral. Podemos usar ainda que $\hat{r}\,'\cdot\hat{r}\,' = 1$:

$$\underset{\substack{\text{esfera de}\\ \text{raio } r}}{\oint\!\!\oint} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{S}\,' \;=\; E_r(r) \underset{\substack{\text{esfera de}\\ \text{raio } r}}{\oint\!\!\oint} dA' \;=\; E_r(r)\times 4\pi r^2 \tag{1.1.7}$$

Com este resultado podemos aplicar a lei de Gauss. Para um ponto com $a < |\vec{r}| < b$ temos que a carga no interior da superfície gaussiana vale q. Então concluímos

$$E_r(r)\times 4\pi r^2 \;=\; \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{1.1.8}$$

Desta relação segue o resultado do item (a) da questão: Na região vazia dentro da cavidade e fora da bola menor vale

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; \frac{q}{\varepsilon_0 4\pi |\vec{r}|^2}\,\hat{r} \tag{1.1.9}$$

Solução do ponto **(b):**

$$V(\vec{r}_a) - V(\vec{r}_b) \;=\; \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \tag{1.1.10}$$

Escrevendo o elemento de linha $d\vec{\ell}$ na base $\langle \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi} \rangle$

$$d\vec{\ell} \;=\; \hat{r}\, dr \;+\; \hat{\theta}\, d\theta \;+\; \hat{\varphi}\, d\varphi \tag{1.1.11}$$

percebemos, com a ortogonalidade dos vetores básicos, que a integral de linha se reduz a uma simples integral:

$$V(\vec{r}_a) - V(\vec{r}_b) \;=\; \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \;=\; \int_a^b \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr \;=\; \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{1.1.12}$$

Solução do ponto **(c):**

$$C = \frac{q}{\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}} = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \tag{1.1.13}$$

Neste ponto podemos substituir os valores concretos:

$$\begin{aligned} C &= \frac{0,1\text{m}\times 0,05\text{m}}{9,0\times 10^{9}\,\text{N}\,\text{m}^2\text{C}^{-2}\times 0,05\text{m}} = 1,1\times 10^{-11}\text{C}\frac{\text{C}}{\text{N}\,\text{m}} \\ &= 1,1\times 10^{-11}\frac{\text{C}}{\text{V}} \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

onde usamos $\frac{\text{J}}{\text{C}} = \text{V}$.

Apêndice Demonstração da (1.1.4).

A simetria esférica possui além de rotações simetrias especulares. A reflexão num plano de espelho que contem o centro das esferas mantêm todo o arranjo inalterado. Então o campo elétrico deve ter a mesma simetria. Para um dado ponto $\vec{r}$ podemos escolher o plano de espelho que contenha o eixo z e o próprio ponto $\vec{r}$. Uma reflexão neste plano deve manter o campo elétrico inalterado. Esta reflexão manda $\vec{r}$ em $\vec{r}$ e o vetor $\vec{E}(\vec{r})$ não deve sofrer nenhuma alteração. Mas, esta reflexão iria trocar o sinal da componente φ do campo. Concluímos então que $E_\varphi(\vec{r})=0$. Com o mesmo argumento com o plano de espelho que contem a origem, o ponto $\vec{r}$ e os vetores $\hat{r}$ e $\hat{\varphi}$ obtemos que $E_\theta(\vec{r})=0$. Resta então

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{r}\,E_r(\vec{r}) \tag{1.1.15}$$

A configuração das duas esferas possui ainda simetria de rotação. Seja $\mathcal{R}$ alguma rotação ao redor de um eixo que passa pela origem. A simetria implica que o valor rodado do campo no ponto $\vec{r}$, isto é $\mathcal{R}\left[\vec{E}(\vec{r})\right]$, deve ser igual ao campo original $\vec{E}$ no ponto rodado $\mathcal{R}[\vec{r}]$. Se o ponto original tinha as coordenadas $\langle r,\theta,\varphi\rangle$, o ponto rodado terá coordenadas $\langle r,\tilde{\theta},\tilde{\varphi}\rangle$ com valores $\tilde{\theta}$ e $\tilde{\varphi}$ possivelmente diferentes dos θ e φ mas com o mesmo valor de raio r. O vetor unitário $\hat{r}$ depende da posição e podemos escrevê-lo como $\hat{r}(\theta,\varphi)$. O valor rodado do campo no ponto $\vec{r}$ é

$$\mathcal{R}\left[\vec{E}(\vec{r})\right] = E_r(r,\theta,\varphi)\mathcal{R}[\hat{r}] = E_r(r,\theta,\varphi)\hat{r}(\tilde{\theta},\tilde{\varphi}) \tag{1.1.16}$$

e o antigo campo no ponto rodado é

$$\vec{E}(\mathcal{R}[\vec{r}]) = E_r(r,\tilde{\theta},\tilde{\varphi})\hat{r}(\tilde{\theta},\tilde{\varphi}) \tag{1.1.17}$$

A condição de simetria $\mathcal{R}\left[\vec{E}(\vec{r})\right]=\vec{E}(\mathcal{R}[\vec{r}])$ significa então:

$$E_r(r,\theta,\varphi) = E_r(r,\tilde{\theta},\tilde{\varphi}) \tag{1.1.18}$$

Isto quer dizer que E_r é uma função somente de r e não depende dos ângulos θ e φ. Então vale

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{r}\,E_r(r) \tag{1.1.19}$$