1.4 O campo elétrico

O químico e físico Inglês Michael Faraday[1] (22/09/1791—25/08/1867) fez inúmeras descobertas sobre o eletromagnetismo. Com muita habilidade e criatividade ele executou milhares de experiências que envolveram fenômenos elétricos, magnéticos e muitas vezes também químicos. Nestas experiências ele observou frequentemente que limalha de ferro se arrumava em linhas na vizinhança de um ímã e ele batizou estas linhas de *linhas de* força. Faraday definiu este tipo de linha também para a força elétrica e para a gravitação. Para Faraday o conceito de força não tinha exatamente o mesmo sentido que atribuímos hoje a esta palavra. Ele encarava luz também como uma força ou pelo menos algo muito parecido. Um detalhe intrigava Faraday:

Fig. 1.4.1: Michael Faraday pintado a óleo por volta de 1841-42. Imagem tomada da Wikipedia.

Recebemos duas coisas do Sol: luz e a força atrativa que mantém a Terra na sua órbita. Agora, a luz é algo que <u>atravessa</u> o espaço vazio, algo que existe no meio do caminho. Isto é evidente, pois se conseguíssemos colocar um gigantesco prisma entre Terra e Sol, a luz seria desviada. Então lá no local do prisma, a luz existe. Ela não sai do sol e magicamente reaparece na Terra. Também uma propriedade da luz chamada *polarização* pode ser alterada com corpos postos no caminho dos raios. Estas mudanças ocorrem depois de o raio de luz ter saído da fonte. Então não cabe dúvida que a luz existe no meio do caminho. Por outro lado Faraday acreditava que as linhas de força da gravitação não podiam ser alteradas no meio do caminho. Parecia que a atração gravitacional era mesmo uma *ação a distância.* Mas ele especulou num trabalho fundamental[2] que isto poderia ser diferente se pudéssemos introduzir mudanças temporais na gravitação. Talvez a gravitação também seria algo que existe no meio do caminho como a luz. Neste trabalho ele tentou convencer que as linhas de força das forças magnética e elétrica também poderiam ter um significado real.

Na seção 1.2 apresentei a ideia preconceituosa de que força pode existir somente com contato direto entre o agente que exerce a força e o objeto que sofre a ação da força. Faraday tinha plena consciência da existência de forças de longo alcance. Mas a intuição nem sempre é guiada pelos conhecimentos conscientes. Deve ter sido este

[1] Michael Faraday foi o mais genial experimentador que já andou nesta terra. De família humilde ele teve pouca instrução formal. Faraday começou a trabalhar aos 13 anos de idade, como menino de recados e de encadernador. Ele leu alguns dos livros que ele encadernou e isto despertou seu interesse pela química e pela eletricidade. Então ele começou a fazer experiências em casa. Ele teve a oportunidade de assistir a quatro aulas do químico Humphry Davy. Ele elaborou notas destas aulas e mandou-as para o professor Humphry Davy. Este imediatamente convidou o jovem para uma conversa e logo mais o contratou como ajudante de laboratório. Daí Faraday progrediu e se tornou Professor de química da Instituição Real. Faraday deu contribuições importantíssimas para a química e suas descobertas sobre o eletromagnetismo revolucionaram o mundo. É imenso o mérito do Professor Humphry Davy de ter reconhecido e amparado este gênio.

[2] Michal Faraday: On the Physical Character of the Lines of Magnetic Force **Journal of Science** p 401 (1852).

preconceito que motivou Faraday a acreditar na realidade física das linhas de força e criar o conceito de *campo* como uma nova entidade física que existe entre as partículas e provoca força de forma local e não com ação a distância. Em 1845 ele usou a palavra *campo* pela primeira vez nas suas anotações.

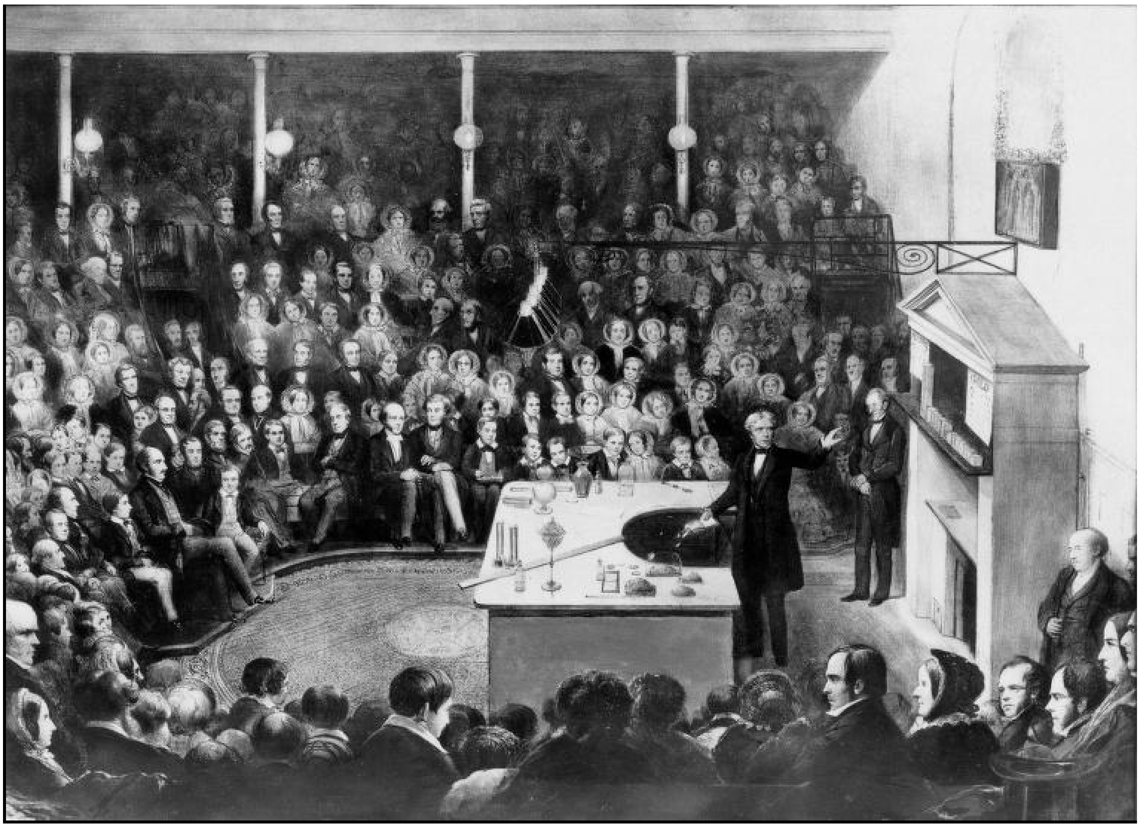


Fig. 1.4.2 Faraday dando uma das suas famosas Palestras de Natal. O Príncipe Albert (esposo da Rainha Vitória da Inglaterra) e o Príncipe Alfred (filho da Rainha Vitória) estão na platéia. Imagem tomada da Wikipedia.

Poder-se-ia dizer que isto tudo não passa de um preconceito criado pela vida cotidiana como foi explicado na seção 1.2. Mas hoje temos ainda outros argumentos a favor das ideias de Faraday. Podemos usar a conservação do momento linear para motivar a introdução do conceito de campo.

Vamos rapidamente rever a dedução da lei de conservação de momento linear na mecânica. Imagine um sistema de n partículas no espaço vazio e longe de todos os objetos que poderiam atrapalhar. Para sermos mais concretos, vamos usar $n = 3$. A dinâmica deste sistema de partículas é dada por três equações, conforme a segunda lei de Newton:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} &= \vec{F}_{1\leftarrow 2} + \vec{F}_{1\leftarrow 3} \\ m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} &= \vec{F}_{2\leftarrow 1} + \vec{F}_{2\leftarrow 3} \\ m_3 \frac{d^2\vec{r}_3}{dt^2} &= \vec{F}_{3\leftarrow 2} + \vec{F}_{3\leftarrow 1} \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

onde m_k e $\vec{r}_k$ são massa e vetor posição da k-esima partícula e $\vec{F}_{k\leftarrow l}$ é a força que a partícula l exerce sobre a partícula k. Se somarmos as três equações, obteremos no lado direito um zero, porque a terceira lei de Newton garante que $\vec{F}_{2\leftarrow 1}$ cancela $\vec{F}_{1\leftarrow 2}$ e que $\vec{F}_{3\leftarrow 1}$ cancela $\vec{F}_{1\leftarrow 3}$ e $\vec{F}_{2\leftarrow 3}$ cancela $\vec{F}_{3\leftarrow 2}$.

$$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} \;+\; m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} \;+\; m_3 \frac{d^2\vec{r}_3}{dt^2} \;=\; 0 \tag{1.4.2}$$

No lado esquerdo usamos agora que "tomar uma derivada" é uma operação linear[3]. Então podemos botar uma das derivadas em evidência (trocar a ordem de formação de combinação linear e tomada de derivada):

$$\frac{d}{dt}\left\{ m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} \;+\; m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} \;+\; m_3 \frac{d\vec{r}_3}{dt} \right\} \;=\; 0 \tag{1.4.3}$$

O que esta fórmula diz é que a taxa de mudança da grandeza $m_1\vec{v}_1 \;+\; m_2\vec{v}_2 \;+\; m_3\vec{v}_3$ é zero, ou seja, esta grandeza não muda com o tempo. Pronto, aí está a conservação de momento linear. Percebemos que esta dedução depende crucialmente da terceira lei de Newton. Sem o cancelamento dos pares de força não teríamos o zero no lado direto das fórmulas (1.4.2) e (1.4.3).

Agora imagine duas cargas elétricas em repouso no espaço. A força entre estas cargas, que é dada pela lei de Coulomb, obedece à terceira lei de Newton perfeitamente. Pois se trocamos os índices 1 e 2 na fórmula

$$\vec{F}_{1\leftarrow 2} \;=\; k \times \frac{q_1 q_2 \times \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^3} \tag{1.4.4}$$

geramos simplesmente um sinal negativo. Mas agora imagine que uma terceira carga chegue com alta velocidade e remova a carga 2 repentinamente do seu lugar. Isto modificará a força que esta partícula 2 exerce sobre a partícula 1. Poderíamos usar esta mudança de força para transmitir uma informação do local da partícula 2 até o local da partícula 1. Sabemos hoje em dia que é impossível transmitir informação com uma velocidade maior que a velocidade da luz. Consequentemente a carga 1 sentirá uma alteração da força exercida pela carga 2 somente após um tempo de $\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right| / c$, onde c simboliza a velocidade da luz. Mas a carga 2, logo depois de mudar de lugar, já sentirá uma força alterada. Então, durante um curto intervalo de tempo, a terceira lei de Newton seria violada.

Este argumento não é baseado em medidas experimentais de precisão e poder-se-ia duvidar dele. Se fizéssemos tais medições se confirmaria de fato que a terceira lei de Newton não vale para cargas em movimento! Para cargas em movimento a lei de força é muito mais complicada do que aquela dada pela lei de Coulomb. No momento não temos ainda os conhecimentos necessários para entender a correta lei de força. Mas, só para dar uma idéia, boto aqui a expressão completa da força que uma partícula eletricamente carregada num estado de movimento arbitrário exerce sobre outra:

[3] Linearidade deve ter sido um dos pontos de destaque na solução do exercício 1.3.6. Caso contrário, você ainda não aprendeu a perceber quando uma coisa é importante.

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{1\leftarrow 2} \;=\; & \frac{k_{\times}\, q_1 q_2}{\left(c\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|-\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\cdot\vec{v}_2\right)^3}\Big\{\left(c^2-\left|\vec{v}_2\right|^2\right)\left(c\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)-\vec{v}_2\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|\right) \;+ \\
& +\; \left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\times\left(\left(c\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)-\vec{v}_2\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|\right)\times\vec{a}_2\right) \;+ \\
& +\; \frac{\vec{v}_1}{c}\times\left[\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|}\times\left\{\left(c^2-\left|\vec{v}_2\right|^2\right)\left(c\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)-\vec{v}_2\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|\right)+\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\times\left(\left(c\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)-\vec{v}_2\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|\right)\times\vec{a}_2\right)\right\}\right]\Big\}
\end{aligned}
\tag{1.4.5}
$$

onde "$\times$" é o símbolo do produto vetorial. Esta expressão complicada descreve a força devido à partícula 2 que atua no instante t sobre a partícula 1, a qual se encontra neste instante na posição $\vec{r}_1$ e que, neste instante, tem a velocidade $\vec{v}_1$. Mas o que torna esta fórmula realmente muito complicada é o fato de que a posição $\vec{r}_2$, a velocidade $\vec{v}_2$ e a aceleração $\vec{a}_2$ da partícula 2 não se referem ao instante t; estas grandezas devem ser tomadas no instante t', anterior ao instante t, que cumpre a equação

$$\left|\vec{r}_1(t)-\vec{r}_2(t')\right| \;=\; c\left(t-t'\right) \tag{1.4.6}$$

Evidentemente esta lei de força não é compatível com a terceira lei de Newton; repare somente que esta força depende da aceleração da partícula 2, mas não da aceleração da partícula 1. Mesmo as contribuições que dependem apenas das duas velocidades, sem envolver a aceleração, não trocam de sinal com uma troca dos índices 1 e 2.

Se a terceira lei de Newton não vale, a nossa dedução da lei de conservação de momento linear não funciona mais. Então será que o momento linear simplesmente não se conserva? Hoje em dia sabemos que estas leis fundamentais de conservação, como conservação de energia, de momento linear e de momento angular, têm uma razão muito profunda; elas são consequências de simetrias do próprio espaço e tempo. Por exemplo, se determinada experiência funciona de certo jeito, a mesma experiência repetida um pouco mais tarde deve funcionar do mesmo jeito. Esta simetria de translação temporal tem como consequência a conservação de energia. Se determinada experiência funciona de certo jeito, a mesma experiência repetida montada um pouco ao lado deve funcionar do mesmo jeito. Esta simetria de translação no espaço tem como consequência a conservação de momento linear. Se determinada experiência funciona de certo jeito, a mesma experiência repetida montada de forma um pouco girada deve funcionar do mesmo jeito. Esta simetria de rotação no espaço tem como consequência a conservação de momento angular.

Seria muito difícil imaginar uma descrição consistente da natureza sem conservação de momento linear. Como podemos salvar esta lei de conservação? Conhecemos um exemplo de uma situação semelhante: a energia mecânica deveria conservar-se. Mas tudo mundo sabe que o atrito leva a uma perda de energia. A desculpa que se dá neste caso é que energia macroscópica é transformada em energia associada a movimentos microscópicos de átomos e moléculas. Esta energia não é perceptível no âmbito da mecânica macroscópica. Então na verdade a energia é conservada, mas macroscopicamente temos a falsa impressão de um sumiço de energia. Podemos imaginar algo parecido com o momento linear. Se a soma dos produtos de massas e velocidades das partículas de um sistema de partículas não for conservada, podemos imaginar que haja outro sistema invisível que também possui momento linear, e este toma conta do balanço correto do momento linear. Então, quando estamos na frente de um sistema de partículas, devemos admitir que haja lá na nossa frente mais coisas do que os nossos olhos veem. Esta coisa a mais é o campo inventado por Faraday. É esta coisa que provoca as forças. Assim, na visão de Faraday, não é a partícula que faz força, mas o campo. A partícula apenas modifica o campo.

É uma criação da mente humana incrível! O que será este algo que intermedeia a força? Faraday imaginava algo como cordões que se estendem entre as partículas. A criação do conceito de campo teve ainda outro autor genial envolvido. O teórico James Clerk Maxwell (13/06/1831 – 05/11/1879) transformou as ideais de Faraday em objetos que permitem uma descrição matemática.

Fig. 1.4.3 James Clerk Maxwell. Imagem tomada da Wikipédia.

Então o que é um campo? A principal diferença entre um campo e uma partícula reside no tipo de pergunta que se possa fazer a respeito destes dois tipos de objeto. Podemos perguntar sobre o lugar onde se encontra uma partícula. Este tipo de pergunta não faria nenhum sentido para um campo. O campo é um sistema físico que está simplesmente em todo lugar. Mas podemos perguntar a respeito do valor do campo em determinado local. Então lugares ou posições são importantes tanto para partículas como para um campo, mas um vetor posição de um ponto tem um significado totalmente diferente para uma partícula do que para um campo. Para a partícula $\vec{r}(t)$ é a incógnita que gostaríamos de saber. Para o campo, $\vec{r}$ não é uma incógnita, é simplesmente um lugar onde queremos descrever o estado das coisas. O que chamamos de estado das coisas corresponde a um determinado valor de alguma grandeza. Em cada lugar $\vec{r}$, este valor pode ser diferente e em cada instante t, também. Então temos uma função $\Phi(\vec{r},t)$ que descreve o estado do campo. Gostaríamos de saber estes valores. Então a função $\Phi(\vec{r},t)$ é a incógnita na teoria do campo.

A grandeza cujos valores formam o campo pode ser uma grandeza escalar, vetorial ou até alguma grandeza mais complicada como um tensor. No caso do campo elétrico os valores do campo são vetores. Então o campo elétrico é um sistema físico cujo estado é descrito por uma função vetorial $\vec{E}(\vec{r},t)$. Muitas vezes escrevemos esta função não como função do vetor posição, mas como função de coordenadas, por exemplo, coordenadas cartesianas: $\vec{E}(x,y,z,t)$.

Por enquanto estudaremos apenas situações estáticas em que todas as cargas estão em lugares fixos no espaço de um referencial, e em que o campo elétrico não depende do tempo. Então por enquanto podemos omitir a variável t.

Agora precisamos de regras que determinem como as forças que as partículas sentem são fornecidas pelo campo, e como a presença das partículas modifica o campo. Por enquanto daremos estas regras também somente para o caso de situações estáticas. Toda a motivação da conservação de momento linear não se aplica a este caso, mesmo assim veremos o caso estático primeiro por ser mais simples.

Regra 1: A força que atua sobre uma partícula pontual com carga q que se encontra na posição $\vec{r}_p$ é dada pelo produto da carga e do valor do campo na posição da partícula.

$$\vec{F} = q\vec{E}\left(\vec{r}_p\right) \tag{1.4.7}$$

Desta regra segue que o módulo do campo elétrico se mede em Newton/Coulomb.

Regra 2: Cada carga pontual de valor q que se encontra numa posição $\vec{r}_q$ modifica o campo elétrico com uma contribuição

$$\vec{E}_q\left(\vec{r}\right) = k\,q\frac{\vec{r}-\vec{r}_q}{\left|\vec{r}-\vec{r}_q\right|^3} \tag{1.4.8}$$

Regra 3: As contribuições de todas as cargas pontuais presentes no mundo se somam e não há outras parcelas que contribuem para o campo.

Então pelas regras 2 e 3 o estado do campo elétrico é

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = k\sum_i q_i\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3} \tag{1.4.9}$$

onde a soma é tomada sobre todas as cargas elétricas existentes no universo, sendo q_i o valor da carga número i e $\vec{r}_i$ o vetor posição da carga número i. Como esta fórmula vale apenas para cargas sem movimento, poder-se-ia objetar que nunca todas as cargas no universo estarão em repouso, de tal forma que esta fórmula nunca terá utilidade. Esta fórmula tem que ser encarada como uma aproximação. Podemos imaginar uma experiência na qual todas as cargas elétricas perto do local da experiência estão em repouso e podemos esperar que as contribuições de cargas muito afastadas sejam desprezíveis mesmo que estas cargas estejam em movimento. Desta forma o somatório também não precisa ser estendido sobre todas as cargas no universo.

Infelizmente há ainda um outro ponto polêmico nestas regras. Olhando a fórmula (1.4.9), percebemos que a função $\vec{E}\left(\vec{r}\right)$ está mal definida em certos pontos do espaço, a saber, nos pontos onde há cargas. Pois a expressão

$$\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3} \tag{1.4.10}$$

não faz sentido para $\vec{r}=\vec{r}_i$. Tudo bem, pode-se viver muito bem com uma função que é definida somente para certo subconjunto de pontos. Mas, infelizmente, precisamos do valor da função justamente em um destes pontos de má definição para poder aplicar a regra 1.

Há duas maneiras para se resolver este problema. Uma é através de uma pequena modificação da regra 1. Em vez de pegar o valor do campo na posição da partícula p, devemos pegar a média dos valores do campo na superfície de uma esfera de raio a e centro na posição da partícula p. E depois devemos fazer um limite (de forma apropriada[4]) mandando a para zero e usar este valor limite no lugar do $\vec{E}(\vec{r}_p)$ da regra 1.

Regra 1': A força que atua sobre uma partícula pontual com carga q que se encontra na posição $\vec{r}_p$ é dada pelo produto da carga com o limite $a \to 0$ do valor médio do campo na superfície de uma esfera de raio a e centro na posição da partícula.

No caso de cargas estáticas, a contribuição para o campo que vem da própria partícula p é esfericamente simétrica. Consequentemente a média desta contribuição tomada numa superfície esférica com centro na posição $\vec{r}_p$ é zero. Então, no caso estático, esta regra 1' resulta na mesma força que se obtém aplicando a antiga regra 1, mas usando uma expressão do campo sem a contribuição da própria partícula p; ou seja, a partícula não faz força sobre si mesma. Mas, para partículas em movimento acelerado, a regra 1 modificada, ou seja, a regra 1' não é equivalente a uma retirada da contribuição da própria partícula. Neste caso, uma partícula realmente faz força sobre si mesma. Mas este assunto é bem complicado e somente os alunos que farão algum curso de eletromagnetismo avançado terão que enfrentar este tipo de problema.

Vejamos qual será a força que atua sobre uma carga estática q de uma partícula p na presença de n outras cargas estáticas $q_1, \ldots, q_n$ em posições $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$. Com a explicação do parágrafo anterior, devemos calcular o campo esquecendo a contribuição da própria partícula p. Então no lugar de um somatório de $n+1$ termos, usamos somente as contribuições das cargas $q_1, \ldots\, q_n$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \qquad (1.4.11)$$

Na verdade este não é o campo; falta a contribuição da carga p. Mas, para o cálculo da força sobre a partícula p, podemos fazer de conta que (1.4.11) descreve o campo e podemos usar a antiga regra 1. Fazendo isto, supondo que a carga q esteja na posição $\vec{r}$, obtemos

$$\vec{F} = k\, q \sum_{i=1}^{n} q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \qquad (1.4.12).$$

Isto coincide perfeitamente com a antiga expressão da força que escrevemos na seção 1.3 (veja a fórmula 1.3.19).

Há outra maneira de resolver o problema do campo ser mal definido justamente nos pontos onde ele é usado para calcular força. Devemos nos lembrar de que o conceito de

[4] O limite deve ser tomado como "limite-R" ; $\mathcal{R}\text{-}\lim_{a\to 0} f(a) \underset{def.}{=} \lim_{a\to 0} \frac{d}{da}\big(a\, f(a)\big)$. Detalhes se encontram num trabalho de Massimo Marino: "Classical Electrodynamics of Point Charges" Annals of Physics 301, 85-127 (2002) doi 10.100 phy.2002.6299.

carga pontual era uma idealização criada pela mente humana para "facilitar" as coisas[5]. No lugar de uma carga pontual, podemos imaginar que a carga existe como uma substância, como um fluido. Da Física II estamos acostumados a descrever fluidos com uma densidade de massa. No lugar de densidade de massa, podemos usar uma densidade de carga elétrica. Aqui nesta disciplina, usaremos a letra ρ para a densidade de carga elétrica (o mesmo símbolo *roh* que usamos na Física II para a densidade de massa). Com uma descrição de carga elétrica através de uma densidade, as regras 2 e 3 podem ser substituídas por uma única regra:

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; k \iiint \frac{\rho(\vec{r}_q)(\vec{r}-\vec{r}_q)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_q\right|^3}\, dV \tag{1.4.13}$$

Antes de trabalhar com tal tipo de fórmula, devemos dizer umas palavras a respeito da nomenclatura que usaremos aqui na Física III. Primeiramente muitos de vocês devem ter estranhado o símbolo triplicado de integral. Na Física III usaremos diferentes tipos de integrais: às vezes se integra sobre um volume, às vezes sobre uma superfície e às vezes sobre uma curva. Estranhamente, a distinção destes casos é um problema para muitos alunos. Então, para facilitar, usaremos uma simbologia que deixa saltar aos olhos de qual tipo de integral se trata. Quando é uma integral sobre um volume (objeto tridimensional), usaremos três sinais de integral; quando é uma integral de superfície (objeto bidimensional), usaremos dois sinais de integral e, se for uma integral de linha (objeto unidimensional), usaremos apenas um símbolo de integral.

Uma segunda observação de nomenclatura é conveniente. Usei o símbolo dV para o elemento de volume. Elemento de volume é uma função que recebe três vetores infinitesimais de deslocamento e devolve o volume do paralelepípedo formado com estes vetores. O uso deste símbolo é muito comum e provavelmente ninguém estranhou este detalhe. Mas o uso deste símbolo tem uma desvantagem. Vejam o caso da fórmula (1.4.13). Nesta fórmula se integra uma função que depende de duas variáveis, a saber, $\vec{r}$ e $\vec{r}_q$. O símbolo dV não deixa claro qual é a variável de integração. Bem, um leitor atento pode descobrir isto, notando que $\vec{r}$ aparece também fora da integral. Então $\vec{r}$ não deve ser a variável de integração. Por exclusão, ele conclui que $\vec{r}_q$ é a variável de integração. Mas seria melhor expressar isto diretamente pelo símbolo do elemento de volume. Por esta razão vamos ocasionalmente usar também o símbolo $d^3\vec{r}_q$ no lugar do dV. O expoente 3 no d deve ser entendido como uma indicação de que se trata de um elemento de volume. Então $d^3\vec{r}_q$ não é um vetor, apesar da seta no $\vec{r}_q$. Com esta notação a fórmula (1.4.13) toma o seguinte aspecto:

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; k \iiint \frac{\rho(\vec{r}_q)(\vec{r}-\vec{r}_q)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_q\right|^3}\, d^3\vec{r}_q \tag{1.4.14}$$

Caso exista ainda dúvida sobre o significado de uma integral de volume, escrevemos aqui esta expressão em termos de coordenadas que descrevem a posição correspondente

[5] O homem tem este hábito de criar problemas para facilitar a vida. Pense somente nos computadores; quantas vezes você já se desesperou na frente de um computador, ou ficou meia hora na fila de um caixa de lanchonete porque os reais pagos têm que ser registrados num computador que resolveu "ficar fora do ar".

ao vetor $\vec{r}_q$. Por exemplo, com coordenadas cartesianas, a integral de volume da fórmula (1.4.14) se transforma numa integral tripla:

$$\vec{E}(\vec{r}) \;=\; k\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(\vec{r}_q)\left(\vec{r}-\hat{x}x_q-\hat{y}y_q-\hat{z}z_q\right)}{\left|\vec{r}-\hat{x}x_q-\hat{y}y_q-\hat{z}z_q\right|^3}\,dx_q dy_q dz_q \qquad (1.4.15)$$

Agora estamos prontos para poder voltar para a física e a matemática do campo elétrico. Percebemos que o produto da densidade de carga com o elemento de volume toma o lugar do valor de carga da fórmula (1.4.9) das cargas pontuais. A expressão problemática $\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^3}$ ainda está presente, com a única diferença que chamamos $\vec{r}_i$ de $\vec{r}_q$. Mas há um detalhe; $\vec{r}_q$ varia continuamente e não pula discretamente de lugar para lugar como na fórmula (1.4.9). Este detalhe resolve o problema. Podemos mostrar que $\vec{E}(\vec{r})$ da fórmula (1.4.14) é bem definido em todos os pontos do espaço, desde que ρ seja uma função limitada que se anula no infinito. Nos exercícios desta seção há a tarefa de mostrar isto.

Resolvemos o problema da má definição do campo elétrico, mas criamos outro no lugar; não podemos mais falar de cargas pontuais e temos que reformular a regra 1. Mas este é um problema fácil de resolver. Temos que usar a linguagem de campo para a própria matéria. No fundo isto não é nenhuma novidade. Na Física II já fizemos isto ao tratar os fluidos. Então no lugar da força podemos usar uma densidade de força $\vec{f}(\vec{r})$ e a regra 1 toma a forma:

$$\vec{f}(\vec{r}) \;=\; \rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r}) \qquad (1.4.16)$$

Ou, em outras palavras, podemos formular a regra 1 dizendo:

Regra 1”: A força que atua sobre a matéria contida num volume V é dada por

$$\vec{F} \;=\; \iiint_V \rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})\,d^3\vec{r} \qquad (1.4.17)$$

Com estas regras definimos o conceito de campo elétrico, pelo menos para o caso estático. Mas como este objeto novo combina com a ideia original de Faraday? Ele imaginava cordas ou linhas entre as cargas? A relação entre a função $\vec{E}(\vec{r})$ e o sistema de linhas de força de Faraday é a seguinte: uma curva no espaço é uma linha de força se a direção tangente da linha em cada ponto coincide com a direção do vetor $\vec{E}(\vec{r})$ naquele ponto. Um sistema de linhas de força pode ser encarado como uma maneira prática de visualizar a função $\vec{E}$.

No curso de cálculo 1, vocês usaram gráficos para visualizar uma função

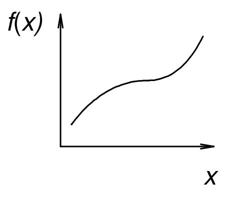
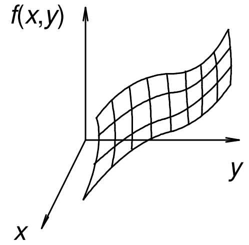


Fig. 1.4.4 Visualização de uma função de uma variável através de um gráfico.

Isto funciona bem com funções de uma variável. Para funções que dependem de duas vaiáveis, gráficos ainda podem ser desenhados, mas sua utilidade já fica prejudicada em muitos casos.

Fig. 1.4.5 Visualização de uma função de duas variáveis através de um gráfico



Mas, para uma função que depende de três variáveis, o gráfico da função não serve mais para visualizar, pois este gráfico se situa em quatro dimensões e nossa capacidade de visualizar algo em quatro dimensões é pequena. No caso do campo elétrico, a situação é ainda pior, pois os próprios valores da função ocupam três dimensões e, como $\vec{E}$ depende de x, y e z, o gráfico da função $\vec{E}$ vive num espaço de seis dimensões! Neste caso podemos desenhar algo parecido com uma tabela de valores, por assim dizer, uma "tabela desenhada". Simplesmente representamos os vetores $\vec{E}(\vec{r})$ para muitos pontos $\vec{r}$. A figura 1.4.6 mostra um exemplo deste tipo de visualização.

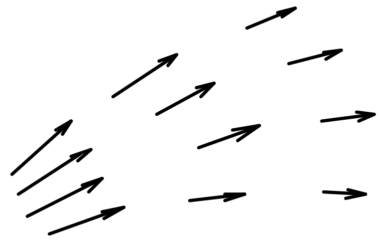


Fig. 1.4.6 Representação de um campo vetorial com mostra de pontos exemplares.

Para um dado campo podemos construir as linhas de força e o desenho das linhas também fornece uma ideia do campo. A figura 1.4.7 mostra as linhas de força junto com os valores exemplares da figura 1.4.6, e a figura 1.4.8 mostra somente as linhas de força.

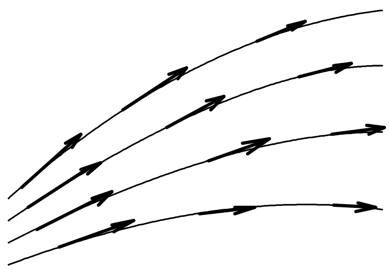
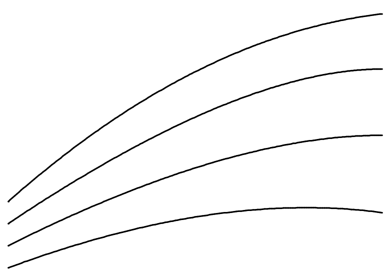


Fig. 1.4.7 Campo com linhas de força. →

Fig. 1.4.8 Visualização de um campo vetorial com ajuda de linhas de força. ↓



As linhas fornecem apenas um dos três atributos dos vetores $\vec{E}(\vec{r})$, a saber, a direção. O sentido pode-se acrescentar à mão com setas de orientação nas linhas de força. Mais tarde, no capítulo 2, veremos que um conjunto de várias linhas pode também informar sobre o módulo do campo em regiões livres de cargas elétricas.

O bonito destas linhas de campo é que elas podem ser vistas experimentalmente. Se colocarmos fubá dentro de um líquido lubrificante e eletricamente isolante numa região do espaço onde $\vec{E}(\vec{r}) \neq 0$, os pequenos grãos de fubá se polarizam e os lados carregados dos grãos provocam uma interação entre grãos vizinhos. Isto leva a um rearranjo dos grãos de tal maneira que se formam fileiras que seguem aproximadamente as linhas de força do campo. Infelizmente há ainda outras forças atuantes; os grãos simplesmente grudam uns nos outros. Desta forma temos que ser um pouco generosos na interpretação das linhas. As figuras 1.4.10 - 13 mostram três exemplos e configurações de campos visualizados com linhas de força formadas com fubá. Nestas experiências corpos metálicos, chamados de eletrodos, que mergulham numa bacia de óleo com fubá são carregados com a ajuda de um gerador eletrostático potente, cuja fotografia é mostrada na figura 1.4.9.

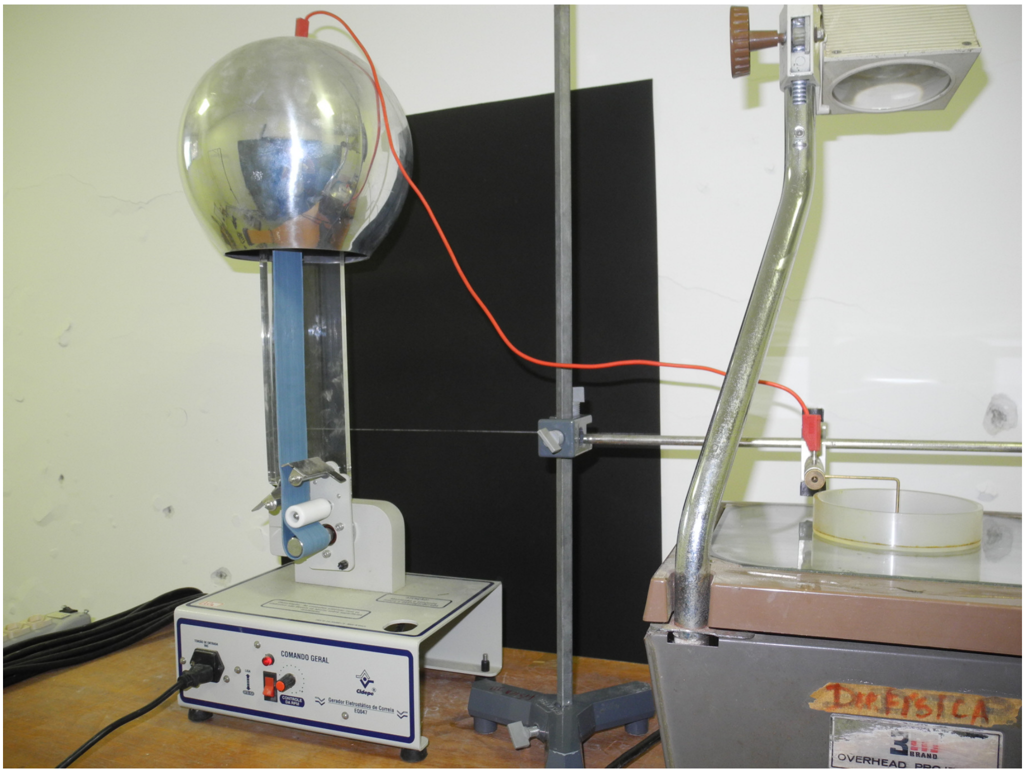


Fig. 1.4.9 Gerador eletrostático ligado num eletrodo que está mergulhado numa vasilha com óleo e fubá. A vasilha transparente se encontra na superfície de um retroprojetor que permite projetar o desenho das linhas de força numa tela.

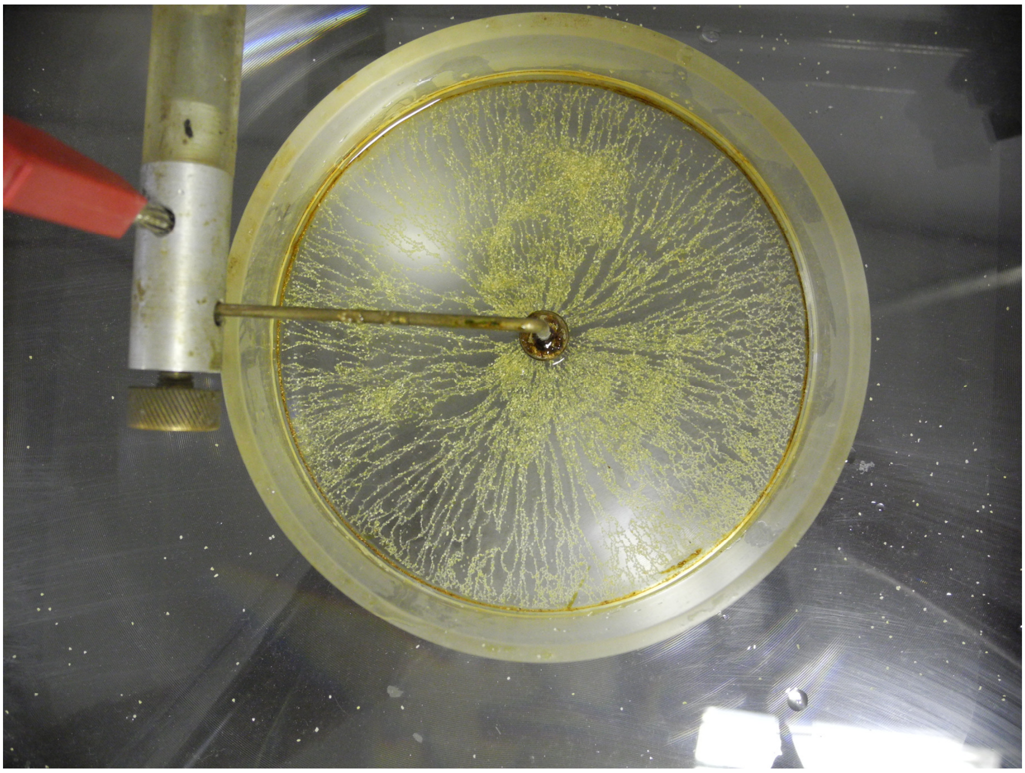


Fig. 1.4.10 Linhas de força de uma carga pontual.

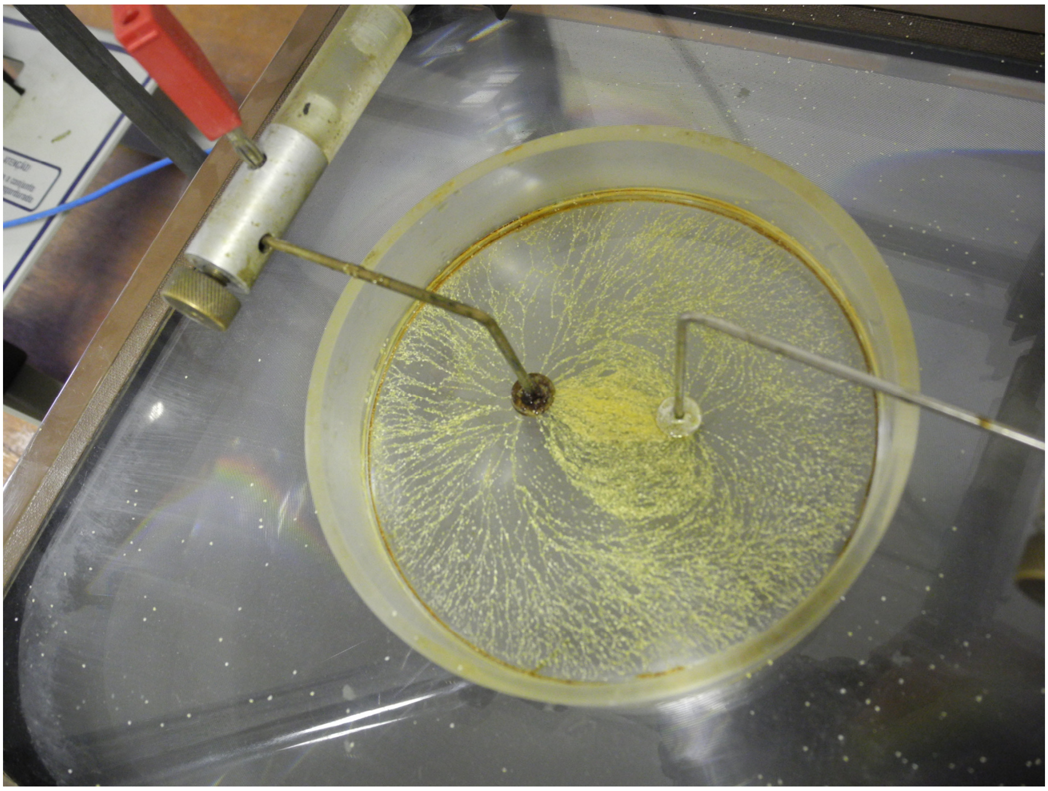


Fig. 1.4.11 Linhas de força em torno de duas cargas pontuais de sinais opostos.

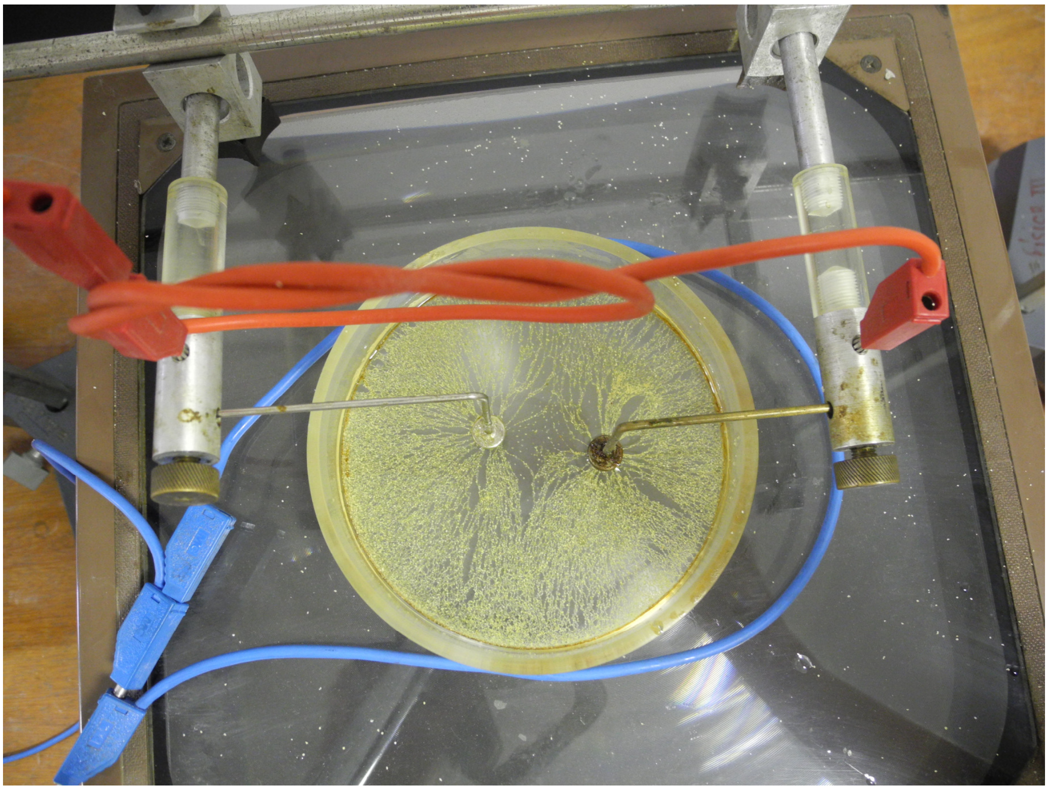


Fig. 1.4.12 Linhas de força em torno de duas cargas pontuais de sinais iguais.

Na figura 1.4.10 podemos apreciar as linhas de força em torno de uma única carga pontual. Como era de se esperar (compare com a fórmula (1.4.8)), são retas as linhas que saem radialmente da carga. Como explicado acima, devemos ser um pouco generosos com estas imagens, pois as “linhas retas” não são tão retas assim.

A figura 1.4.11 mostra as linhas de força por volta de duas cargas pontuais de sinais opostos. Grave bem esta imagem! Trataremos desta configuração de cargas na próxima seção. As linhas vão de uma carga para a outra. Percebemos que há uma maior densidade de linhas na região entre as cargas ao compararmos com os dois lados opostos, como indicado na figura 1.4.13.

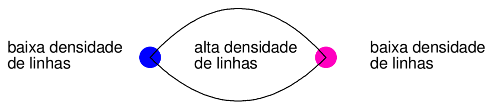


Fig. 1.4.13 Regiões de alta e de baixa densidade de linhas.

Percebemos na figura 1.4.12 que, no caso de duas cargas de mesmo sinal, as regiões de alta e baixa densidade de linhas são o oposto do caso das cargas de sinais opostos. Isto permite formular, pelo menos qualitativamente, como o campo na visão de Faraday, ou seja, na linguagem de linhas de força, transmite a força. Aparentemente as linhas puxam as cargas. Ou seja, elas exercem uma tração. No caso das cargas de sinais opostos, há mais cordas puxando uma carga na direção da outra do que cordas do lado de fora que puxam para afastar as cargas. Então resulta uma força que tende a aproximar as cargas. No caso das cargas do mesmo sinal, há mais cordas puxando para fora do que cordas que puxam uma carga na direção da outra. Então resulta uma força que tende a afastar as cargas. Lateralmente as linhas de força exercem uma pressão.

O campo elétrico é invisível. Será que ele existe mesmo, ou se trata de uma mera invenção da mente humana? Talvez com os desenhos formados pelo fubá você comece a acreditar mesmo que há algo no espaço que antes julgávamos estar vazio. Faraday queria acreditar nisso, mas ele era muito cauteloso e crítico e admitia que talvez tudo não passasse de uma mera ferramenta prática de descrever as forças. Hoje há poucos físicos que não acreditam na realidade do campo. Mas temos que ter cuidado! Há possibilidades de descrever os fenômenos eletromagnéticos com uma teoria baseada em ação a distância. F. Hoyle e J.V. Narlikar publicaram um livro inteiro dedicado a este tipo de teoria (Action at a Distance in Physics and Cosmology, W.H. Freeman and Company 1974). Estas teorias são consistentes e compatíveis com a teoria da relatividade, mas não são nem um pouco práticas. Pois, nesta maneira de descrever as forças eletromagnéticas, devem-se incluir todas as partículas do universo na descrição. Isto é uma desvantagem, mas, por outro lado, permite correlacionar fatos que podemos observar no laboratório com certas ideias sobre o universo.

Exercícios:

E 1.4.1: Mostre que a má definição da expressão

$$\frac{\left(\vec{r}-\vec{r}_q\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_q\right|^3}$$

para $\vec{r}=\vec{r}_q$ não cria problemas para a integral (1.4.14). Dica: para a integração, use coordenadas esféricas com o ponto $\vec{r}$ como origem.

E 1.4.2: Desenhe as linhas de força de forma estilizada para as experiências das figuras 1.4.10-1.4.12.

E 1.4.3: Escreva os pontos de destaque desta seção.