

## 1.6 O campo elétrico de distribuições contínuas de carga.

Na seção 1.4 vimos que uma carga elétrica puntiforme na posição  $\vec{r}_1$  acrescenta ao campo elétrico uma contribuição

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = kq \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (1.6.1)$$

Tendo, por exemplo, duas cargas  $q_1$  e  $q_2$  nas respectivas posições  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ , o campo elétrico resultante seria a soma das respectivas contribuições:

$$\vec{E}(\vec{r}) = kq_1 \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + kq_2 \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{|\vec{r} - \vec{r}_2|^3} \quad (1.6.2)$$

Vimos um exemplo desta fórmula com o dipolo. Para  $n$  cargas puntiformes temos analogamente

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \sum_{l=1}^n q_l \frac{\vec{r} - \vec{r}_l}{|\vec{r} - \vec{r}_l|^3} \quad (1.6.3)$$

Esta fórmula é bonita e simples, mas se tivermos algo como  $10^{24}$  cargas puntiformes seria totalmente impossível calcular o campo elétrico somando  $10^{24}$  vetores.  $10^{24}$  é tipicamente o número de elétrons num pequeno pedaço de matéria. Esta situação sugere substituir a equação (1.6.3) por uma expressão que permita tratamentos matemáticos mais elegantes. A ideia é substituir as cargas puntiformes por uma distribuição contínua de carga que seria descrita por uma densidade de carga. A densidade de carga  $\rho$  é também um campo, mas, diferente do campo elétrico, ela é um campo escalar. A definição deste campo é a seguinte condição: para qualquer volume  $V$  obtemos a carga elétrica total contida no volume integrando  $\rho$  sobre este volume.

$$\text{carga no volume } V = \iiint_V \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} \quad (1.6.4)$$

Agora podemos imaginar o espaço dividido em pequenos volumes  $V_l$ . Cada um destes volumes contém uma carga  $q_l$  calculada com a equação (1.6.4). O centro de cada volume descrevemos com um vetor posição  $\vec{r}_l$ . Usando estes valores  $q_l$  e  $\vec{r}_l$  na equação (1.6.3), obtemos um valor aproximado para o campo elétrico. Este se tornaria exato no limite de volumes  $V_l$  tendendo a zero. Neste limite a soma (1.6.3) tende a uma integral:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \iiint \rho(\vec{r}_q) \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} d^3r_q \quad (1.6.5)$$

A variável de integração  $\vec{r}_q$  tem o papel dos antigos vetores posição  $\vec{r}_l$  das cargas puntiformes. No lugar de um enorme somatório teríamos que resolver uma integral.

Já tínhamos visto este tipo de descrição da carga elétrica na formulação das regras que determinam o campo. Naquela ocasião substituímos o conceito de carga pontual por uma densidade de carga para evitar a má definição do campo nos lugares das cargas pontuais. Pode ser que na Natureza não existam cargas pontuais. Mesmo se admitirmos a existência de cargas pontuais, uma substituição de um aglomerado de  $10^{24}$  cargas pontuais pode ser aproximado por uma distribuição contínua de carga. Neste caso a

substituição da soma em (1.6.3) tem simplesmente o significado de uma aproximação e simplificação matemática.

Quando se faz a substituição de uma soma por uma integral a título de simplificação, às vezes pode resultar outro tipo de integral. No lugar de uma integral de volume com uma densidade de carga  $\rho$ , pode aparecer uma integral de área com uma densidade superficial de carga  $\sigma$ , ou uma integral de linha com uma densidade linear de carga  $\lambda$ . Os seguintes exemplos deixarão claro como isto funciona.

Imagine um palito de plástico eletricamente carregado. Um bom exemplo seria um canudo daqueles usados para tomar refrigerantes. É comum professores de ciências usarem estes canudos para demonstrações de eletrostática. Por exemplo, depois de friccionar o canudo com um pano, o professor consegue colar o mesmo eletricamente na parede da sala. Quando se pretende calcular o campo elétrico numa região distante em comparação com o diâmetro do tubo, podemos aproximar este tubo por uma linha. Vamos definir coordenadas cartesianas de tal forma que a linha carregada, ou seja, o canudo, fique no eixo  $x$  ocupando algum intervalo  $[x_A, x_B]$  (compare Figura 1.3.1).

Em vez de considerar milhares de cargas puntiformes nesta linha, vamos usar uma *densidade linear* de carga. Uma densidade linear de carga é uma função  $\lambda(x)$  tal que para qualquer intervalo  $[x_1, x_2]$  no eixo  $x$  a integral  $\int_{x_1}^{x_2} \lambda(x) dx$  é igual à quantidade de carga elétrica contida neste intervalo. Isto vale supondo que somente ao longo do eixo  $x$  haja carga. Para facilitar, vamos supor que o palito esteja uniformemente carregado. Neste caso a função  $\lambda$  é simplesmente

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{q}{x_b - x_a} & \text{para } x \in [x_a, x_b] \\ 0 & \text{para } x \notin [x_a, x_b] \end{cases} \quad (1.6.6)$$

onde  $q$  é a carga total no palito. Com esta distribuição unidimensional temos uma integral unidimensional no lugar da integral de volume (1.6.5):

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x') \frac{\vec{r} - \hat{x}x'}{|\vec{r} - \hat{x}x'|^3} dx' \quad (1.6.7)$$

No caso do palito uniformemente carregado, isto resulta numa integral de  $x_a$  até  $x_b$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{q}{x_b - x_a} \int_{x_a}^{x_b} \frac{\vec{r} - \hat{x}x'}{|\vec{r} - \hat{x}x'|^3} dx' \quad (1.6.8)$$

Aqui vamos calcular somente a componente  $y$  do campo num ponto genérico no plano  $x$ - $y$ . A componente  $x$  fica como exercício. O aluno que não sabe como se obtém uma das três componentes de um vetor numa base ortonormal deve urgentemente consultar o apêndice onde a matemática dos vetores é explicada detalhadamente. Obtemos a componente  $y$  de  $\vec{E}(\vec{r})$  multiplicando  $\vec{E}(\vec{r})$  escalarmente com o vetor unitário  $\hat{y}$ . Com  $\hat{y} \cdot \hat{y} = 1$  e  $\hat{y} \cdot \hat{x} = 0$  resulta

$$E_y(x, y, 0) = k \frac{q}{x_b - x_a} \int_{x_a}^{x_b} \frac{y}{\left((x - x')^2 + y^2\right)^{3/2}} dx' \quad (1.6.9)$$

Este tipo de integral aparecerá ainda muitas vezes neste curso e, por esta razão, vamos explicar detalhadamente como resolvê-la. A figura 1.6.1 mostra o palito, o ponto onde queremos calcular o campo  $\langle x, y, 0 \rangle$  e um intervalo infinitesimal num ponto no palito que contribui para o campo. O ponto de contribuição corresponde à variável de integração  $x'$ .

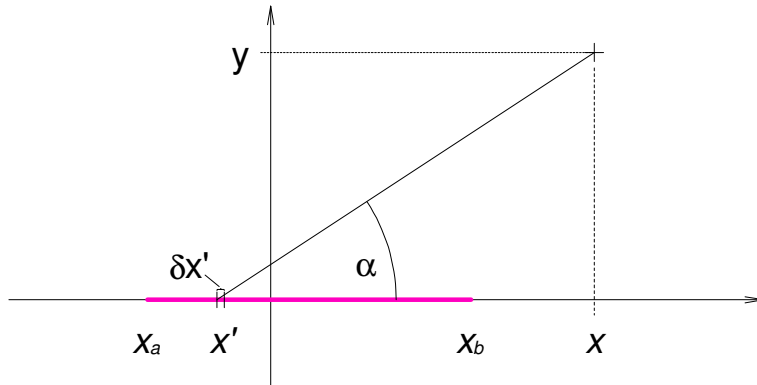


Fig. 1.6.1 Palito com variável de integração  $x'$ .

A integral se torna simples, se usarmos o ângulo  $\alpha$  que está indicado na figura 1.6.1 como variável de integração no lugar do  $x'$ . Estas variáveis se relacionam da seguinte forma:

$$\cot \alpha = \frac{x - x'}{y} \quad (1.6.10)$$

Correspondentemente temos a seguinte relação entre as diferenciais destas variáveis:

$$-\frac{1}{(\sin \alpha)^2} d\alpha = -\frac{1}{y} dx' \quad (1.6.11)$$

Então a integral fica

$$\begin{aligned} E_y(x, y, 0) &= k \frac{q}{x_b - x_a} \int_{x_a}^{x_b} \frac{y y}{\left((x - x')^2 + y^2\right)^{3/2}} \frac{dx'}{y} = \\ &= k \frac{q}{x_b - x_a} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{y y}{\left((x - x')^2 + y^2\right)^{3/2}} \frac{d\alpha}{(\sin \alpha)^2} \end{aligned} \quad (1.6.12)$$

Agora, repare que

$$\frac{y}{\left((x - x')^2 + y^2\right)^{1/2}} = \sin \alpha \quad (1.6.13).$$

Então falta apenas um  $y$  no numerador para formar um  $(\sin \alpha)^3$ . Podemos arrumar este  $y$  facilmente colocando outro  $y$  no denominador (fora da integral, pois  $y$  é constante).  $(\sin \alpha)^3$  no numerador e  $(\sin \alpha)^2$  resulta num simples  $\sin \alpha$ , e esta função todo mundo sabe integrar. Então o resultado é

$$\begin{aligned}
E_y(x, y, 0) &= k \frac{q}{(x_b - x_a) y} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \sin \alpha \, d\alpha = \\
&= -k \frac{q}{(x_b - x_a) y} \cos \alpha \Big|_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} = \frac{q}{(x_b - x_a) y} \{ \cos \alpha_{\min} - \cos \alpha_{\max} \}
\end{aligned} \tag{1.6.14}$$

Agora podemos voltar para as antigas variáveis e escrever  $\cos \alpha_{\min}$  e  $\cos \alpha_{\max}$  em termos de  $x, y, x_a$  e  $x_b$ .

$$E_y(x, y, 0) = \frac{q}{(x_b - x_a) y} \left\{ \frac{x - x_a}{\sqrt{(x - x_a)^2 + y^2}} - \frac{x - x_b}{\sqrt{(x - x_b)^2 + y^2}} \right\} \tag{1.6.15}$$

Há muita coisa útil que pode ser aprendida num curso universitário. O eletromagnetismo, sem dúvida, é muito importante! Mas talvez há coisas até mais importantes que você pode aprender numa disciplina como a Física III. Por exemplo, você pode aprender a perceber quando uma coisa é importante. Para isto servem os exercícios “Escreva os pontos de destaque desta seção”. Há ainda outra coisa extremamente importante que se pode aprender na Física III, a saber, ter autocrítica. Vocês sabem por que caem tantos viadutos no Brasil e desabam tantos prédios? Porque os engenheiros cometem erros. Não! Todo mundo comete erros, isto é humano. Mas os viadutos caem e os prédios desabam porque os engenheiros não aprenderam a olhar os seus resultados criticamente! Chegamos a um resultado, então cabe neste momento olhá-lo criticamente.

Que testes podemos fazer para descobrir se não erramos conta? A primeira coisa é olhar se o resultado é dimensionalmente compatível com aquilo que se espera. Um campo elétrico deve ser algo como {constante  $k$  vezes carga dividida por um quadrado de distância}. Olhando o resultado (1.6.15), percebemos que a carga dividida por um quadrado de distância está presente. Mas a constante  $k$  falta! Então neste caso vamos subir nos passos de cálculo e descobrir o que aconteceu. Facilmente descobrimos que o  $k$  simplesmente “evaporou” no último passo da (1.6.14). Isto não é grave; entendendo perfeitamente o que ocorreu, podemos substituir o resultado errado por um resultado corrigido:

$$E_y(x, y, 0) = k \frac{q}{(x_b - x_a) y} \left\{ \frac{x - x_a}{\sqrt{(x - x_a)^2 + y^2}} - \frac{x - x_b}{\sqrt{(x - x_b)^2 + y^2}} \right\} \tag{1.6.16}$$

Um segundo teste pode-se aplicar olhando para o comportamento assintótico da solução quando  $y \gg x_b - x_a$  e  $x = (x_b - x_a)/2$ . Neste caso esperamos que o palito eletrizado gere um campo que se pareça com um campo de uma carga pontual. Isto é mais um belo exercício de análise de comportamento assintótico. Primeiramente vamos botar o  $y$ , que é grande, em evidência:

$$\begin{aligned}
E_y(x, y, 0) &= k \frac{q}{(x_b - x_a) y^2} \left\{ \frac{x - x_a}{\sqrt{\left(\frac{x - x_a}{y}\right)^2 + 1}} - \frac{x - x_b}{\sqrt{\left(\frac{x - x_b}{y}\right)^2 + 1}} \right\} = \\
&= k \frac{q}{y^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x_b - x_a}{2y}\right)^2}}
\end{aligned}
\tag{1.6.17}$$

Com isto geramos uma expressão do tipo  $(1 + \varepsilon)^n$  com  $|\varepsilon| \ll 1$  e podemos aplicar a aproximação (1.5.13)<sup>1</sup>.

$$E_y(x, y, 0) \approx k \frac{q}{y^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{x_b - x_a}{2y} \right)^2 \right\}
\tag{1.6.18}$$

Como sobrou um 1 dentro da chave, podemos desprezar o termo quadrático no parâmetro pequeno e obtemos

$$E_y(x, y, 0) \approx k \frac{q}{y^2}
\tag{1.6.19}$$

Isto era esperado. Então parece que o nosso resultado é correto, pois se tivesse algum erro de conta seria pouco provável que este comportamento saísse corretamente. O comportamento de olhar resultados criticamente pode não somente evitar desapontamentos, mas pode também melhorar notas de provas!

Vamos fazer mais uma consideração assintótica com o nosso resultado. Esta vez não para testar criticamente, mas para chegar a um resultado que sirva futuramente para comparar com um resultado usando um método de cálculo muito poderoso. Vamos considerar que  $x = (x_b - x_a)/2 = 0$  e que estejamos muito próximos do palito, isto é,  $y \ll x_b - x_a$ . A maneira mais elegante de obter esta situação é mandando  $x_b \rightarrow \infty$  e  $x_a \rightarrow -\infty$ . É mais fácil de ver o resultado deste limite com a (1.6.14) (naturalmente corrigido com o fator  $k$ ) do que com a (1.6.17). Obviamente este limite significa para os ângulos  $\alpha_{\min} \rightarrow 0$  e  $\alpha_{\max} \rightarrow \pi$  (ou seja  $180^\circ$ ), e os dois co-senos fornecem simplesmente um fator 2. O limite  $x_b \rightarrow \infty$  e  $x_a \rightarrow -\infty$  só faz sentido, se aumentarmos também a carga do palito. Caso contrário o campo simplesmente desaparece por causa do fator  $(x_b - x_a)^{-1}$ . Então vamos aumentar a carga de tal forma que a densidade linear de carga  $\lambda = q(x_b - x_a)^{-1}$  fique constante. Com isto obtemos

$$E_y(x, y, 0) = k \frac{2\lambda}{y}
\tag{1.6.20}$$

---

<sup>1</sup> Se esta aproximação não constava nos seus pontos de destaque da seção 1.5, algo está terrivelmente errado!

Desta vez prefiro escrever a constante de proporcionalidade na forma  $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ , porque futuramente usaremos esta forma da constante e quero facilitar a comparação com um resultado futuro:

$$E_y(x, y, 0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \quad (1.6.21)$$

Botei uma moldura, porque usaremos este resultado para comparação com um resultado no capítulo 2. Mas não há necessidade de decorar esta fórmula por que futuramente você aprenderá um método de obtê-la em poucos segundos calculando de cabeça sem papel e lápis.

Depois deste exemplo de um palito carregado, cabe discutir o caso geral de uma linha, possivelmente curvada, com carga elétrica. Você pode imaginar alguma corda que foi eletrizada e que ocupa uma curva  $\mathcal{C}$  no espaço. Na realidade esta corda tem certa espessura, mas, se estamos suficientemente afastados da corda, ela pode ser aproximada por uma linha matemática. O campo gerado por uma corda eletrizada é dado pela seguinte integral de linha

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_{\mathcal{C}} \lambda(\vec{r}_q) \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} ds \quad (1.6.22)$$

onde  $ds$  é o elemento de comprimento de arco,  $\lambda$  a densidade linear de carga e  $\vec{r}_q$  a variável de integração. Como se calcula este tipo de integral? Podemos descrever a curva  $\mathcal{C}$  de forma paramétrica com algum parâmetro  $\xi$  que percorre algum intervalo  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$  e definir uma função  $\vec{r}_q(\xi)$  cujos valores vetoriais percorrem os pontos da curva quando  $\xi$  percorre o intervalo  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ .

Em termos de uma descrição paramétrica de curva, o campo elétrico fica

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \lambda(\vec{r}_q(\xi)) \frac{\vec{r} - \vec{r}_q(\xi)}{|\vec{r} - \vec{r}_q(\xi)|^3} \left| \frac{d\vec{r}_q(\xi)}{d\xi} \right| d\xi \quad (1.6.23)$$

e a densidade linear de carga é uma função tal que a carga contida em qualquer trecho da curva é dada por:

$$\begin{aligned} \text{carga contida no trecho da corda do intervalo } [\xi_1, \xi_2] &= \\ &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \lambda(\vec{r}_q(\xi)) \left| \frac{d\vec{r}_q}{d\xi} \right| d\xi \end{aligned} \quad (1.6.24)$$

Veremos um exemplo simples. Vamos considerar uma corda em forma de semicírculo como mostra a figura 1.6.2. O círculo tem raio  $R$  e vamos colocar a origem de coordenadas no centro do círculo. Neste caso podemos usar o ângulo  $\varphi$ , que está indicado na figura 1.6.2, como parâmetro de curva e descrever esta curva pela função

$$\vec{r}_q(\varphi) = \hat{x} R \cos \varphi + \hat{y} R \sin \varphi \quad (1.6.25)$$

onde o parâmetro  $\varphi$  percorre o intervalo  $[-\pi/2, +\pi/2]$ .

Temos para este exemplo

$$\frac{d\vec{r}_q}{d\varphi} = -\hat{x} R \sin \varphi + \hat{y} R \cos \varphi \quad (1.6.26)$$

e

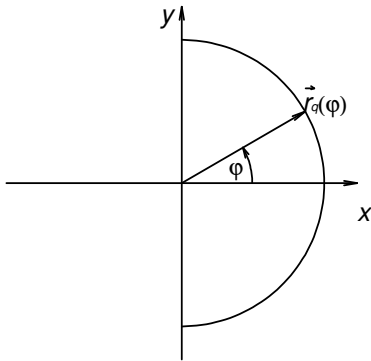
$$\left| \frac{d\vec{r}_q}{d\xi} \right| = R \quad (1.6.27)$$

Vamos supor uma densidade linear constante  $\lambda_0$ . Então o campo é

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\lambda_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\vec{r} - (\hat{x}R \cos \varphi + \hat{y}R \sin \varphi)}{|\vec{r} - (\hat{x}R \cos \varphi + \hat{y}R \sin \varphi)|^3} R d\varphi \quad (1.6.28)$$

Somente para o ponto  $\vec{r} = 0$  esta integral pode ser facilmente calculada. Para outros pontos pode-se usar integração numérica.

Fig. 1.6.2 Exemplo de descrição paramétrica de uma curva.



Finalmente vamos considerar o caso de distribuições de carga numa superfície. A ideia é completamente análoga aos casos de volume e linha. No lugar da densidade volumar ou linear, temos uma densidade superficial e no lugar de integral de volume ou de

linha, temos uma integral de superfície.

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \iint_s \sigma \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} dA \quad (1.6.29)$$

Veremos logo um exemplo. Considere um disco de raio  $R$  uniformemente carregado com uma densidade superficial constante  $\sigma_0$ . Como no caso das curvas, vamos usar uma descrição paramétrica. Mas no caso de superfície temos dois parâmetros. Usaremos as coordenadas polares  $\rho \in [0, R]$  e  $\varphi \in [0, 2\pi]$  como parâmetros.

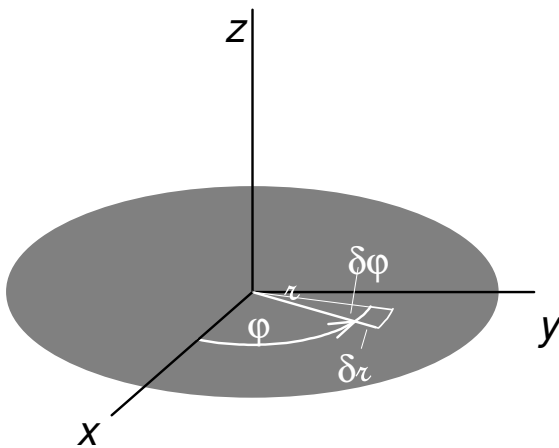


Fig. 1.6.3 Disco com coordenadas polares. Variações infinitesimais nas coordenadas geram um retângulo infinitesimal.

A função  $\vec{r}_q(\rho, \varphi)$  cujos valores vetoriais percorrem os pontos do disco é

$$\vec{r}_q(\rho, \varphi) = \hat{x} \rho \cos \varphi + \hat{y} \rho \sin \varphi \quad (1.6.30).$$

Quando variamos o ângulo  $\varphi$  por um valor infinitesimal  $\delta\varphi$ , andamos no disco a distância  $r\delta\varphi$ . Quando variamos o valor da coordenada radial por um valor infinitesimal  $\delta r$ , andamos no disco a distância  $\delta r$ . Estes dois deslocamentos são ortogonais. Então os dois abrem uma área retangular<sup>2</sup> de tamanho  $r\delta\varphi\delta r$ . A diferencial  $d\varphi$  devolve o valor  $\delta\varphi$  para um deslocamento infinitesimal, e a diferencial  $dr$  devolve  $\delta r$ . Então o elemento de área da integral de superfície, se aplicado a um par de vetores infinitesimais que apontam nas direções dos eixos de coordenada  $\varphi$  e  $r$ , coincide com  $r d\varphi dr$

$$dA \rightarrow r d\varphi dr \quad (1.6.31)$$

Então o campo elétrico é

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\sigma_0 \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\vec{r} - (\hat{x} r \cos \varphi + \hat{y} r \sin \varphi)}{|\vec{r} - (\hat{x} r \cos \varphi + \hat{y} r \sin \varphi)|^3} r d\varphi dr \quad (1.6.32)$$

Para um ponto genérico  $\vec{r}$ , o cálculo desta integral dupla é difícil. Mas, para pontos no eixo de simetria, podemos calculá-la com facilidade. Supondo  $\vec{r} = \hat{z} z$  temos

$$\vec{E}(\hat{z} z) = k\sigma_0 \int_{r=0}^R \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\hat{z} z - (\hat{x} r \cos \varphi + \hat{y} r \sin \varphi)}{(z^2 + r^2)^{3/2}} r d\varphi dr \quad (1.6.33)$$

Integrando sobre  $\varphi$ , anulam-se as componentes  $x$  e  $y$  e a componente  $z$  ganha um fator  $2\pi$ :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\hat{z} z) &= k\sigma_0 2\pi \hat{z} z \int_{r=0}^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = -2k\sigma_0 \pi \hat{z} z (z^2 + r^2)^{-1/2} \Big|_0^R = \\ &= 2k\sigma_0 \pi \hat{z} z \left\{ \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right\} \end{aligned} \quad (1.6.34)$$

Novamente chegamos num ponto onde cabe um olhar crítico para o resultado. Desta vez o resultado passa no teste de dimensionalidade. Uma segunda questão que pode ser investigada é a direção e o sentido do vetor  $\vec{E}(\hat{z} z)$ . Vamos supor  $\sigma_0 > 0$ . Neste caso o resultado (1.6.34) significa que  $\vec{E}(\hat{z} z)$  aponta na direção e sentido de  $\hat{z}$  se  $z > 0$ , e no sentido oposto para  $z < 0$ . Isto parece razoável. Agora vamos investigar o comportamento assintótico para grandes valores de  $|z|$ . Primeiramente vamos botar o  $|z|$  em evidência:

$$\vec{E}(\hat{z} z) = 2k\sigma_0 \pi \frac{\hat{z} z}{|z|} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{z}\right)^2}} \right\} \quad (1.6.35)$$

<sup>2</sup> A variação do ângulo naturalmente gera um deslocamento circular. Mas dizer que  $\delta\varphi$  é infinitesimal significa que desconsideramos correções quadráticas, e no espírito desta aproximação o arco de círculo é equivalente a um pedaço de reta.



Agora podemos usar o famoso ponto de destaque da seção 1.5:  $(1 + \epsilon)^n$  com  $|\epsilon| \ll 1$ .

Então para  $R \ll |z|$ :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\hat{z} z) &\approx 2k \sigma_0 \pi \frac{\hat{z} z}{|z|} \left\{ 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{R}{z} \right)^2 \right) \right\} = \\ &= k \sigma_0 \pi \frac{\hat{z} z}{|z|} \left( \frac{R}{z} \right)^2 = k \frac{\hat{z} z}{|z|} \frac{q}{z^2} \end{aligned} \quad (1.6.36)$$

Pensando um pouco a respeito do significado do termo estranho  $\frac{\hat{z} z}{|z|}$ , percebemos que se esperava exatamente este comportamento assintótico. Então parece que podemos confiar no nosso cálculo.

Vale a pena considerar um outro caso limite, a saber, o limite de um disco grande ou um observador perto do disco, isto é,  $R \gg |z|$ . Podemos simplesmente tomar o limite  $R \rightarrow \infty$ . Com a fórmula (1.6.35) obtemos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \vec{E}(\hat{z} z) = 2k \sigma_0 \pi \frac{\hat{z} z}{|z|} \quad (1.6.37).$$

De novo, para facilitar futuras comparações, escrevo este resultado com a constante  $\epsilon_0$ :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \vec{E}(\hat{z} z) = \frac{\sigma_0}{2 \epsilon_0} \frac{\hat{z} z}{|z|} \quad (1.6.38)$$

Este resultado é interessante. O valor do campo perto do disco é essencialmente independente da coordenada  $z$ . Somente o sentido do campo muda quando  $z$  muda de sinal, ou seja, quando se passa para o outro lado do disco. Infelizmente temos somente os valores do campo no eixo  $z$ , ou seja, para pontos com coordenadas  $x = y = 0$ . Mas, se  $R$  for muito grande em comparação com  $|x|$ ,  $|y|$  e  $|z|$ , é de se esperar que o valor do campo não deva depender nem do  $x$  e nem do  $y$ . Então, enquanto não passarmos para o outro lado do disco, o valor do campo não depende de nenhuma das três coordenadas. Então descobrimos como se pode produzir um campo elétrico uniforme. Basta criar um disco uniformemente carregado e ficar perto do centro do disco. Algum crítico pode dizer que não deve ser nada fácil criar um disco uniformemente carregado. Mas futuramente conheceremos um método muito simples de fazer isto.

### Exercícios:

**E 1.6.1:** Calcule o campo do semicírculo carregado na origem  $\vec{r} = 0$ .

**E 1.6.2:** Calcule o campo elétrico de um anel circular uniformemente carregado para pontos no eixo de simetria do anel que fica perpendicular ao plano do anel.

**E 1.6.3:** Calculamos a componente  $y$  de um palito uniformemente carregado que se encontra no eixo  $x$ . Calcule a componente  $x$  deste campo.

**E 1.6.4:** Uma corda foi fixada em dois suportes da mesma altura. Vamos colocar coordenadas cartesianas de tal forma que os suportes tenham as coordenadas  $\langle x = a, y = 0, z = h \rangle$  e  $\langle x = -a, y = 0, z = h \rangle$  e que o eixo  $z$  aponte verticalmente para

cima. Sabe-se que a gravitação força esta corda para uma forma de equilíbrio descrita pela seguinte função:

$$z_{cord}(x) = h + A \left[ \exp\{x/a\} + \exp\{-x/a\} - \frac{1+e}{e} \right] \quad (1.6.39)$$

onde  $A$  é uma constante que depende do comprimento da corda. Use a coordenada  $x$  com parâmetro de curva e escreva a integral que resulta no campo elétrico desta corda se ela for carregada com alguma densidade linear de carga. Não precisa calcular a integral.

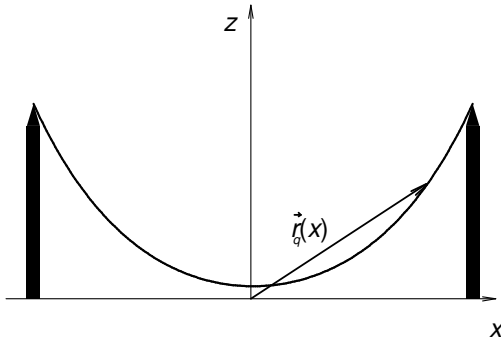


Fig.1.6.2 Corda pendurada entre dois postes e descrição da curva com um vetor posição que depende de  $x$ .

**E. 1.6.5:** Escreva os pontos de destaque desta seção.