3.1 O potencial elétrico

Formulamos a lei de Gauss como uma parte da lei de Coulomb. Era a parte que continua válida mesmo com cargas em movimento. A outra parte pode ser chamada de " lei da existência do potencial". Esta tem um domínio de validade menor, mesmo assim esta lei é importante por fornecer ferramentas poderosas para muitas aplicações. Esta lei simplesmente afirma que o campo elétrico é um campo conservativo, isto é, um campo que pode ser escrito como gradiente de uma função escalar. Para o aluno que estudou a Física I e II cuidadosamente, esta lei é bastante óbvia, pois o campo elétrico de uma carga em repouso representa uma força central e sabemos que forças centrais podem ser escritas como gradientes. Para ver os detalhes, vamos recordar a conservação da energia na mecânica.

Imagine uma massa pontual exposta à ação de alguma força que depende da posição da partícula. A dinâmica desta partícula é dada pela segunda lei de Newton:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad = \quad \vec{F}(\vec{r}) \qquad (3.1.1)$$

onde m é a massa da partícula e $\vec{r}$ seu vetor posição. Para chegar na conservação de energia, multiplicamos esta equação escalarmente pela velocidade:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \quad = \quad \vec{F}(\vec{r})\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (3.1.2)$$

Gostaríamos de obter uma expressão do tipo $\frac{d}{dt}\{\text{algo}\} = 0$, então aquele "algo" seria conservado. Para chegar nisso, precisamos de duas coisas: (1) arrumar um zero no lado direito e (2) botar um d/dt para fora de tudo. O primeiro problema tem solução simples, simplesmente escrevendo o $\vec{F}(\vec{r})\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$ para o outro lado da igualdade, naturalmente com um sinal trocado:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \quad - \quad \vec{F}(\vec{r})\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \quad = \quad 0 \qquad (3.1.3).$$

A segunda tarefa não é tão simples. No primeiro termo, que tem uma derivada segunda, poder-se-ia pensar em botar uma destas derivadas para fora

$$\swarrow\left(m\left(\frac{\nwarrow d}{dt}\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \qquad (3.1.4).$$

Mas esta operação cria um erro. Pois a derivada d/dt na frente de toda a expressão $m\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$ atua sobre ambos os fatores de velocidade e não somente sobre o primeiro fator. Mas, como os dois fatores são iguais, é fácil consertar o erro. O segundo termo gerado pela regra de produto é igual ao primeiro e podemos compensar o erro botando um fator ½ na frente:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \quad = \quad \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right\} \qquad (3.1.5).$$

Então o primeiro termo do lado esquerdo da fórmula (3.1.3) já está na forma desejada. Falta botar o segundo termo também nesta forma. O termo

$$-\vec{F}(\vec{r})\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

tem toda cara de ser um resultado de uma aplicação da regra de cadeia. Mas, para ser realmente isto, o $-\vec{F}(\vec{r})$ teria que ser derivada de algo. Se pudéssemos escrever o $-\vec{F}(\vec{r})$ como gradiente de uma função U, a expressão toda seria realmente uma derivada temporal:

$$\text{se } -\vec{F}(\vec{r})=\operatorname{grad}U \quad \text{então} \quad \frac{d}{dt}U = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} = -\vec{F}(\vec{r})\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \tag{3.1.6}$$

Então se a força é de um tipo especialmente simpático de tal forma que exista uma função escalar U com $-\vec{F}(\vec{r})=\operatorname{grad}U$, podemos escrever a fórmula (3.1.3) como

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\vec{v}\cdot\vec{v} + U\right\} = 0 \qquad (3.1.7),$$

onde escrevi a velocidade como $\vec{v}$. A função U é a energia potencial. Vendo a fórmula

$$\vec{F}(\vec{r})=-\operatorname{grad}U \tag{3.1.8}$$

poder-se-ia pensar que seria mais natural procurar uma função escalar $\tilde{U}$ tal que

$$\vec{F}(\vec{r})=\operatorname{grad}\tilde{U} \qquad (3.1.9).$$

Claro, quem não gosta do sinal negativo na fórmula (3.1.8) pode fazer isto. Mas, com esta escolha, a grandeza conservada teria a forma $\frac{m}{2}\vec{v}\cdot\vec{v} - \tilde{U}$. Isto não é muito conveniente. Pense na seguinte analogia: você tem dinheiro. Mas nem todo o seu dinheiro é aquele dinheiro real que você leva no seu bolso e que serve para comprar cerveja no botequim. Grande parte do seu dinheiro é dinheiro virtual ou potencial em forma de um número armazenado na memória de um computador no banco. Você pode converter parte deste dinheiro potencial em dinheiro real nestas maquininhas do banco, ou pode fazer o inverso. Nestes processos de retirada ou depósito o seu dinheiro se conserva; isto é, a soma do dinheiro real e do dinheiro virtual não muda. Poder-se-ia descrever esta situação de forma alternativa: ao invés de falar do seu dinheiro virtual na sua conta do banco, poder-se-ia falar da dívida que o banco tem com você. Isto é perfeitamente possível. Neste caso a grandeza conservada seria a diferença entre seu dinheiro real e a dívida do banco. Mas esta forma de descrever as coisas não parece nada prática. É muito mais natural pensar numa grandeza conservada que é a soma de parcelas do que numa que é uma diferença.

A origem deste menos na fórmula (3.1.8) é o fato de termos que mover o $\vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{v}$ do lado direito da (3.1.2) para o lado esquerdo para produzir o zero do lado direito. Gastamos tanto tempo para falar deste sinal menos, porque vamos introduzir o mesmo sinal negativo na definição do potencial elétrico somente para poder relacionar este potencial de forma simples com a energia potencial da mecânica.

Então agora vamos definir o potencial elétrico. Uma função escalar V, definida no espaço físico, chamaremos de potencial elétrico se o campo elétrico puder ser escrito na forma

$$\boxed{\vec{E} \quad = \quad -\operatorname{grad} V} \tag{3.1.10}$$

Se colocarmos uma carga pontual q exposta à ação deste campo elétrico, a força que o campo exerce sobre a partícula é $q\vec{E}$; com a (3.1.10) e a (3.1.8) podemos concluir que a energia potencial desta partícula carregada é

$$\boxed{U \quad = \quad qV} \tag{3.1.11}$$

A lei da existência do potencial consiste na afirmação de que o campo elétrico gerado por cargas estáticas realmente pode ser escrito na forma (3.1.10). Uma afirmação que um determinado campo vetorial $\vec{E}$ pode ser escrito na forma (3.1.10) não é trivial[1]. Existem campos vetoriais que não podem ser escritos desta forma (veja o exercício E 3.1.3). Podemos ver isto da seguinte forma: Pelo teorema de Clairaut e Schwarz[2] sabemos que para qualquer função V que tem derivadas segundas contínuas vale

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z} \tag{3.1.12}$$

ou seja, as derivadas comutam. Correspondentemente uma condição necessária para poder escrever um campo vetorial $\vec{E}$ na forma (3.1.10) é que

$$\frac{\partial}{\partial x}E_y = \frac{\partial}{\partial y}E_x \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}E_z = \frac{\partial}{\partial z}E_x \quad , \quad \frac{\partial}{\partial z}E_y = \frac{\partial}{\partial y}E_z \tag{3.1.13}$$

onde E_x, E_y e E_z são as componentes do vetor $\vec{E}$ na base $\langle \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \rangle$. Lembramos do rotacional de um campo vetorial:

$$\operatorname{rot}\vec{E} \quad = \quad \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x} \quad + \quad \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{y} \quad + \quad \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z} \tag{3.1.14}$$

Percebemos que a condição necessária (3.1.13) pode ser escrita também usando o rotacional:

$$\operatorname{rot}\vec{E} \quad = \quad 0 \tag{3.1.15}$$

Agora vamos mostrar que a validade da condição (3.1.15) no espaço físico $\mathbb{E}$ inteiro é não apenas necessária, mas também suficiente para poder escrever o campo $\vec{E}$ na forma $\vec{E} \quad = \quad -\operatorname{grad} V$.

No curso de Cálculo vocês devem ter visto o teorema de Stokes. Neste momento vamos contar apenas com estas lembranças do curso de Cálculo. Mais tarde, quando tratarmos do campo magnético, voltaremos ao teorema de Stokes e vocês terão a oportunidade de reinventar este teorema e de entendê-lo mais a fundo.

---

[1] "Trivial" significa muito simples. A palavra "trivial" vem do nome do ciclo básico nas universidades medievais. Este ciclo básico se chamava "trivium", que vem do número três, porque este ciclo básico tinha somente três disciplinas: lógica, gramática e retórica. Estas disciplinas são supostamente as simples. Daí o significado da palavra trivial.

[2] Alexis Clairaut (1713-1765) e Hermann Schwarz (1843- 1921)

O teorema diz o seguinte: Seja ∂S uma curva fechada seccionalmente regular[3] no espaço tridimensional euclidiano $\mathbb{E}$, e S uma superfície regular que tem a curva ∂S como beirada e que seja orientável (não pode ser uma fita de Möbius[4]; compare com a figura 3.1.1), e seja $\vec{E}$ um campo vetorial continuamente diferenciável; então a integral de linha do campo $\vec{E}$ sobre o caminho ∂S é igual à integral de superfície do rotacional de $\vec{E}$ integrado sobre S, onde a orientação de S é escolhida tal que o sentido de integração no caminho forme junto com o sentido da orientação da superfície um parafuso direito. Na linguagem de fórmula isto significa:

$$\oint_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \quad = \quad \iint_{S} \left(\operatorname{rot}\vec{E}\right)\cdot d\vec{S} \qquad (3.1.16)$$

O círculo no sinal de integral indica que se trata de um caminho fechado.

Fig. 3.1.1 Fita de Möbius. Não é verídica a afirmação de que tudo tem os seus dois lados! A fita de Möbius tem somente um lado. Também as "duas" beiradas da fita na verdade são uma só que forma uma única curva fechada. A fita forma uma superfície que tem esta curva como beirada. Esta superfície não é orientável, e o teorema de Stokes não pode ser aplicado nesta superfície. Mas, por incrível que pareça, a mesma curva fechada é também beirada de uma superfície orientável.

Queremos mostrar que (3.1.15) é suficiente para poder escrever $\vec{E}$ na forma de $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$. Então vamos supor que $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$. Pelo teorema de Stokes segue imediatamente que

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \quad = \quad 0 \qquad (3.1.17)$$

para qualquer caminho fechado e seccionalmente regular que é beirada de alguma superfície regular e orientável. Com o resultado (3.1.17) podemos construir uma função V que cumpre a condição desejada (3.1.10) da seguinte maneira: escolhemos algum ponto de referência P^*; depois integramos $\vec{E}$ ao longo do caminho reto que começa em P^* e termina em P e definimos o valor da função V no ponto P como o negativo do valor desta integral.

$$V(\mathrm{P}) \underset{def.}{=} -\int_{\substack{\mathrm{P}^* \\ \text{reto}}}^{P} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \qquad (3.1.18)$$

---

[3] Seccionalmente regular significa que a curva pode ser descrita em forma paramétrica por uma função contínua $f:[a,b]\to\mathbb{E}$ e que o intervalo $[a,b]$ do parâmetro é a união de um número finito de subintervalos nos quais esta função é continuamente diferenciável. Compare Tom M. Apostol: Cálculo II Editorial Reverte 1988.

[4] August Ferdinand Möbius (17/11/1790 – 26/09/1868) Matemático e astrônomo (por parte de sua mãe ele é descendente de Martin Luther).

Temos que mostrar que esta função cumpre a condição $\vec{E} = -\text{grad}\, V$. Então vamos calcular o gradiente. Primeiramente calculamos a derivada parcial em relação à coordenada x num ponto qualquer que tem as coordenadas $\langle x, y, z\rangle$:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{a\to 0} \frac{V(x+a, y, z) - V(x, y, z)}{a} \tag{3.1.19}$$

A figura 3.1.2 exemplifica os caminhos de integração $C_{\langle x+a,y,z\rangle}$ e $C_{\langle x,y,z\rangle}$ que vão em linha reta do ponto de referência P^* até os pontos $\langle x+a, y, z\rangle$ e $\langle x, y, z\rangle$ respectivamente e um terceiro caminho C_a, também reto, que vai do ponto $\langle x+a, y, z\rangle$ até o ponto $\langle x, y, z\rangle$. Se percorremos primeiramente o caminho $C_{\langle x+a,y,z\rangle}$, depois o C_a e finalmente o caminho $C_{\langle x,y,z\rangle}$ em orientação inversa (isto é o caminho $-C_{\langle x,y,z\rangle}$) geramos um caminho fechado. A superfície triangular delimitada por esta via é orientável. Então sabemos que

$$\underbrace{\int_{\substack{\text{P}^* \\ \text{reto}}}^{\langle x+a,y,z\rangle} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}_{=-V(x+a,y,z)} + \int_{\substack{\langle x+a,y,z\rangle \\ \text{reto}}}^{\langle x,y,z\rangle} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} + \underbrace{\int_{\substack{\langle x,y,z\rangle \\ \text{reto}}}^{\text{P}^*} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}}_{=V(x,y,z)} = 0 \tag{3.1.20}$$

Assim, podemos continuar o desenvolvimento do cálculo da derivada (3.1.19) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \lim_{a\to 0} \frac{1}{a} \int_{\substack{\langle x+a,y,z\rangle \\ \text{reto}}}^{\langle x,y,z\rangle} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \lim_{a\to 0} \frac{1}{a} \int_{x+a}^{x} \vec{E}(x', y, z)\cdot \hat{x}\, dx' = \\ &= \lim_{a\to 0} \frac{1}{a} \int_{x+a}^{x} E_x(x', y, z)\, dx'\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

Com o teorema fundamental do cálculo integral sabemos que o último limite é simplesmente o negativo do valor da função que está sendo integrada. Então mostramos

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -E_x \tag{3.1.22}$$

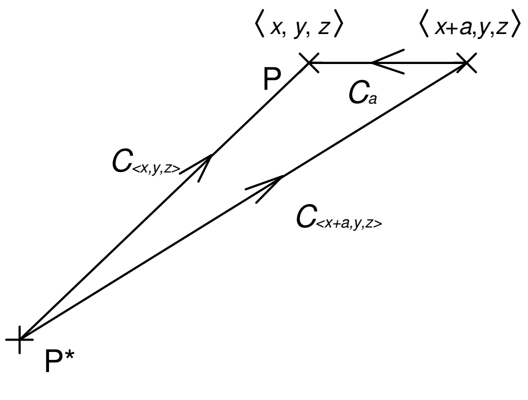

Fig. 1.3.2 Caminhos de integração para calcular $\partial V / \partial x$.

Obviamente podemos fazer o mesmo procedimento com as outras duas derivadas parciais obtendo analogamente $\partial V / \partial y = -E_y$ e $\partial V / \partial z = -E_z$. Estes três resultados podem ser convertidos em uma única fórmula: $\text{grad}\, V = -\vec{E}$ e com isto mostramos a existência do potencial a partir da hipótese $\text{rot}\, \vec{E} = 0$.

Podemos ainda melhorar a afirmação feita com a fórmula (3.1.17). Na hora de escrever esta fórmula, botamos a exigência de que a curva fechada deva ser uma que seja beirada de uma superfície regular e orientável. Para algumas curvas fechadas pode ser nada óbvio se existam superfícies regulares e orientáveis que as possuam como beirada. Por exemplo, não é nada óbvio se o caminho da figura 3.1.3, que possui um nó, corresponda a alguma superfície regular e orientável.

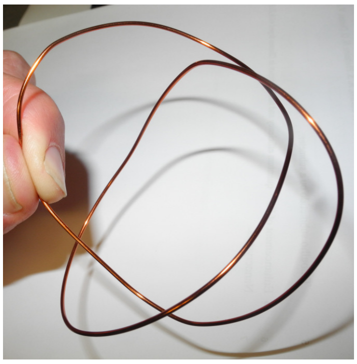

Fig. 3.1.3 Caminho fechado com nó. Esta curva é beirada de uma superfície regular e orientável?

Mas a afirmação $\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \;=\; 0$ vale para estas situações também. Isto se vê da seguinte forma: seja C uma curva seccionalmente regular com uma descrição paramétrica $\vec{r}_C(\lambda)=x_C(\lambda)\hat{x}+y_C(\lambda)\hat{y}+z_C(\lambda)\hat{z}$, onde λ percorre algum intervalo $[a,b]$. Em um número finito de subintervalos $[a,c_1]$, $[c_1,c_2]$, ..., $[c_N,b]$, a função $\vec{r}_C$ é continuamente diferenciável. Podemos definir a função $f(\lambda)\underset{def.}{=}V(\vec{r}_C(\lambda))$. A integral de linha sobre o caminho C é

$$\int_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \;=\; -\int_a^{c_1}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx_C}{d\lambda}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy_C}{d\lambda}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz_C}{d\lambda}\right)d\lambda \;-\int_{c_1}^{c_2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx_C}{d\lambda}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy_C}{d\lambda}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz_C}{d\lambda}\right)d\lambda-..$$

$$-\int_{c_N}^{b}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx_C}{d\lambda}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy_C}{d\lambda}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz_C}{d\lambda}\right)d\lambda \;=\; -\int_a^b\frac{df(\lambda)}{d\lambda}d\lambda \;=\; V(\vec{r}_C(a))-V(\vec{r}_C(b))$$

(3.1.23)

Então o valor da integral depende apenas dos pontos inicial e final da curva e ela é uma diferença de um valor de uma função referente ao ponto inicial e outro, ao ponto final. Portanto para curvas fechadas onde pontos inicial e final coincidem, a integral de linha é zero. Também percebemos, posteriormente, que a restrição para um caminho reto na integral (3.1.18) não era necessária.

Resumindo, podemos dizer: a questão se um campo vetorial $\vec{E}$ pode ser descrito através de um potencial não é trivial. A condição da existência de um potencial pode ser formulada de duas formas equivalentes:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \;=\; 0 \qquad \text{para todo caminho fechado} \qquad (3.1.24)$$

ou

$$\operatorname{rot}\vec{E} \;=\; 0 \qquad \text{para todos os pontos do espaço} \qquad (3.1.25).$$

Se estas condições são satisfeitas, um potencial existe. Mas este não é único. Sempre podemos somar uma constante c a um dado potencial V e obtemos outra função $\overline{V}=V+c$ que serve igualmente como potencial, pois $\operatorname{grad}(V+c)=\operatorname{grad}(V)$.

Agora vamos ver se o campo elétrico gerado por cargas estáticas possui potencial, ou não. Começamos com o campo de uma única carga pontual. Podemos usar o local desta carga como origem de tal forma que o vetor posição da carga é o vetor zero; $\vec{r}_q=0$. Neste caso, o campo gerado pela carga é

$$\vec{E}(\vec{r}) \quad = \quad \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \tag{3.1.26}$$

Vamos investigar integrais de caminho. Seja C algum caminho. Para facilitar, vamos supor um caminho regular – depois é fácil estender o resultado para o caso dos caminhos seccionalmente regulares. Não vamos descrever o caminho em termos de coordenadas cartesianas na forma $\vec{r}_C(\lambda) = x_C(\lambda)\,\hat{x} + y_C(\lambda)\,\hat{y} + z_C(\lambda)\,\hat{z}$. Para a integração será muito mais prática uma representação em coordenadas esféricas com centro da esfera na posição da carga. Se nas coordenadas cartesianas o caminho era descrito por três funções $x_C(\lambda)$, $y_C(\lambda)$ e $z_C(\lambda)$, nas coordenadas esféricas ele será descrito por três funções $r_C(\lambda)$, $\theta_C(\lambda)$ e $\varphi_C(\lambda)$. A forma paramétrica da curva nestas coordenadas é

$$\vec{r}_C(\lambda) = r_C(\lambda)\,\hat{r}\big(\theta_C(\lambda),\varphi_C(\lambda)\big) \tag{3.1.27}$$

e o campo elétrico nas posições percorridas pelo caminho é

$$\vec{E}\big(\vec{r}_C(\lambda)\big) \quad = \quad \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}\big(\theta_C(\lambda),\varphi_C(\lambda)\big)}{\big(r_C(\lambda)\big)^2} \tag{3.1.28}$$

A integral de linha do campo sobre este caminho é

$$\begin{aligned}\int_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \quad &= \\ &= \int_a^b \vec{E}\big(\vec{r}_C(\lambda)\big)\cdot\left(\hat{r}\frac{dr_C}{d\lambda} + \hat{\theta}\, r_C\frac{d\theta_C}{d\lambda} + \hat{\varphi}\; r_C \operatorname{sen}\theta_C \frac{d\varphi_C}{d\lambda}\right)d\lambda\end{aligned} \tag{3.1.29}$$

Nesta fórmula, nós usamos uma notação um pouco desleixada. Na verdade deveríamos escrever $\hat{r}\big(\theta_C(\lambda),\varphi_C(\lambda)\big)$ no lugar de $\hat{r}$ e $\hat{\theta}\big(\theta_C(\lambda),\varphi_C(\lambda)\big)$ no lugar de $\hat{\theta}$ e $\hat{\varphi}\big(\theta_C(\lambda),\varphi_C(\lambda)\big)$ no lugar de $\hat{\varphi}$. Mas a forma correta é tão longa que dificulta enxergar o essencial. Parece que há muita complicação na fórmula (3.1.29), mas toda esta complicação morre na hora de calcular o produto escalar com o campo elétrico. Como o campo aponta na direção radial, todo aquele termo complicado

$$\hat{\theta}\, r_C\frac{d\theta_C}{d\lambda} + \hat{\varphi}\; r_C \operatorname{sen}\theta_C \frac{d\varphi_C}{d\lambda}$$

não contribui absolutamente nada na integral. Usando ainda $\hat{r}\cdot\hat{r} = 1$ obtemos

$$\int_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \quad = \quad \int_a^b \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\big(r_C(\lambda)\big)^2}\frac{dr_C}{d\lambda}\,d\lambda \tag{3.1.30}$$

Percebemos que a integral sobre λ se transformou simplesmente numa integral sobre r_C:

$$\int_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \quad = \quad \int_{r_C(a)}^{r_C(b)} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_C{}^2}\,dr_C \quad = \quad -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_C(b)} - \frac{1}{r_C(a)}\right) \tag{3.1.31}$$

Então o resultado depende apenas das distâncias inicial e final da carga e não dos detalhes do caminho. Consequentemente integrais de caminho sobre caminhos fechados resultam em zero, e a condição suficiente e necessária para a existência de um potencial é satisfeita[5]. Não somente mostramos que um potencial existe, como também ganhamos logo uma função potencial explicitamente. Lembramos que o potencial sempre pode ser alterado somando uma constante. Então, para escrever uma função concreta, precisamos fazer alguma escolha. Uma escolha feita frequentemente é a de exigir que o potencial de uma carga pontual seja zero no infinito. Isto pode ser garantido mandando o ponto de referencia P^*, ou seja, o $\vec{r}_C(a)$ para o infinito. Com isto a combinação da (3.1.18) com o resultado (3.1.31) fornece a seguinte expressão para o potencial de uma carga pontual:

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}|}} \tag{3.1.32}$$

Agora podemos deslocar a origem de coordenadas de volta para um ponto qualquer, de modo que $\vec{r}_q \neq 0$, e o resultado (3.1.32) fica na forma

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q|}} \quad (3.1.33).$$

Como calcular uma integral de linha ou um gradiente são operações lineares, podemos concluir imediatamente que o campo gerado por uma distribuição arbitrária de cargas estacionárias no espaço também gera um campo com potencial e este pode ser calculado usando um princípio de superposição, ou seja, a linearidade. Para N cargas pontuais em posições $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_N$ obtemos

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{q_k}{|\vec{r}-\vec{r}_k|}} \tag{3.1.34}$$

Um comentário: daqui para frente escreveremos a constante de proporcionalidade da lei de Coulomb sempre na forma de $1/(4\pi\varepsilon_0)$. Correspondentemente podemos usar a letra k para outras finalidades, por exemplo, para numerar as cargas e posições como na fórmula[6] (3.1.34).

Analogamente podemos escrever o potencial de uma distribuição contínua de carga:

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho(\vec{r}_q)}{|\vec{r}-\vec{r}_q|}d^3\vec{r}_q} \tag{3.1.35}$$

O potencial elétrico é uma nova grandeza. Vamos olhar que unidade pode ser usada para escrever valores desta grandeza. O potencial é uma integral de linha do campo elétrico. Então essencialmente ele é uma multiplicação de campo e vetor posição.

---

[5] Notamos aqui uma pequena sujeira matemática: acima mostramos a condição suficiente e necessária válida no espaço todo. Mas o campo de uma carga pontual não está bem definido no ponto da carga. Pode-se mostrar que o resultado acima discutido permanece válido num espaço com "buracos" desde que estes buracos não impeçam que caminhos fechados possam ser continuamente deformados até virarem um ponto. Esta condição que o domínio precisa satisfazer se chama *conectividade simples*.

[6] De fato, as regras sintáticas da matemática até permitiriam escrever a constante de proporcionalidade como k fora do somatório e usar também a letra k como índice do somatório, porque o uso do k como variável muda é limitado para dentro do somatório. Mas este tipo de uso duplo de símbolos não facilita a compreensão e se deve evitar isto.

Portanto concluímos que N m/C pode ser usado como unidade do potencial. Esta unidade aparece muito frequentemente em aplicações e por esta razão foi introduzido um nome especial para esta unidade; ele se chama Volt . O símbolo para Volt é V. É um pouco inconveniente usar a mesma letra para a grandeza e para sua unidade. Mas repare que a grandeza é escrita com a letra em itálico enquanto a unidade usa o V comum. Isto é de acordo com as normas internacionais. Em geral unidades não devem ser escritas com letras em itálico. Por favor reclamem, se os seus professores usam letras em itálico para unidades em enunciados de prova!

$$\boxed{\mathrm{V} \underset{def.}{=} \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{C}}} \qquad (3.1.36)$$

Exercícios:

E 3.1.1: Desenhe gráficos do potencial elétrico de uma carga pontual positiva e uma negativa que mostra V como função da distância da carga.

E 3.1.2: Entre os polos de uma pilha (daquelas que se compram no supermercado ou na papelaria) existe uma diferença de potencial de aproximadamente 1,5 V. Qual é o trabalho necessário de transportar uma partícula com carga de $q = -1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ do polo positivo para o polo negativo da pilha?

E 3.1.3: Determine quais dos seguintes campos possuem um potencial:

$$\vec{E}_1(x, y, z) = \hat{x}\, A\, y^2 + \hat{y}\, A\, yx \qquad (3.1.37)$$

$$\vec{E}_2(x, y, z) = \{\hat{x}\, x + \hat{y}\, y + \hat{z}\, z\}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{5/7} B \qquad (3.1.38)$$

$$\vec{E}_3(r, \theta, \varphi) = C\, \hat{r}(\theta, \varphi) \times (\mathrm{sen}\, \theta)^2 \qquad (3.1.39)$$

onde *A*, *B* e *C* são constantes.

E 3.1.4: Explique a expressão $\left(\hat{r}\frac{dr_C}{d\lambda} + \hat{\theta}\, r_C \frac{d\theta_C}{d\lambda} + \hat{\varphi}\; r_C\, \mathrm{sen}\, \theta_C \frac{d\varphi_C}{d\lambda}\right)$ que aparece na fórmula (3.1.29)!

E 3.1.5: Escreva os pontos de destaque desta seção.