

3.3 Potencial e campo elétrico para dadas configurações de carga.

Embora a maior utilidade do potencial se revele em situações em que a própria configuração de carga é uma incógnita, nas situações com distribuições conhecidas de carga o uso do potencial também pode ser vantajoso. Uma vantagem é o fato de o potencial ser um escalar. Este argumento convence facilmente o aluno que odeia calcular com vetores. Então na superposição discreta

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} \quad (3.3.1)$$

ou na superposição contínua

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}_q)}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} d^3\vec{r}_q \quad (3.3.2)$$

precisamos somar apenas valores escalares. Isto parece bem mais fácil do que as somas vetoriais que aparecem nas fórmulas análogas do campo elétrico:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \quad (3.3.3)$$

ou

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}_q)(\vec{r} - \vec{r}_q)}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} dV \quad (3.3.4).$$

Uma vez determinado o potencial, pode-se calcular o campo elétrico calculando o gradiente do potencial. Isto é uma tarefa relativamente simples. Veremos nesta seção apenas três exemplos simples.

Voltamos ao problema de duas cargas de sinais opostos com valores q e $-q$ separados por uma distância d . Vamos escolher a origem, que serve para definir os vetores posição, no meio entre estas cargas na linha que as une. Desta forma, o vetor posição da carga $-q$ é o negativo do vetor posição da carga q : $\vec{r}_{-q} = -\vec{r}_q$. A fórmula (3.3.1) fornece o potencial desta configuração num ponto qualquer no espaço:

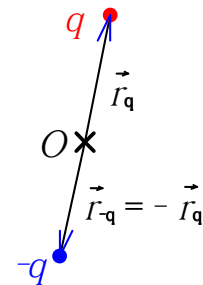


Fig. 3.3.1
Definição dos vetores posição de duas cargas.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} + \frac{-q}{|\vec{r} - \vec{r}_{-q}|} \right\} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} - \frac{1}{|\vec{r} + \vec{r}_q|} \right\} \quad (3.3.5)$$

Este cálculo do potencial foi extremamente simples. Vamos ainda considerar o comportamento assintótico para $|\vec{r}| \gg d$, como fizemos na seção 1.5. Para obter o comportamento assintótico, é conveniente escrever os módulos de vetores que aparecem na (3.3.5) com a ajuda do produto escalar. Para qualquer vetor \vec{a} vale

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \quad (3.3.6)$$

onde o ponto indica o produto escalar. Então temos

$$|\vec{r} - \vec{r}_q| = \sqrt{\left(r^2 + \frac{d^2}{4} - 2\vec{r}_q \cdot \vec{r}\right)} \quad (3.3.7)$$

e analogamente

$$|\vec{r} + \vec{r}_q| = \sqrt{\left(r^2 + \frac{d^2}{4} + 2\vec{r}_q \cdot \vec{r}\right)} \quad (3.3.8)$$

onde escrevemos o módulo do vetor \vec{r} como r e usamos $|\vec{r}_q| = d/2$. Depois de inserir estas expressões na fórmula (3.3.5), vamos botar o valor grande r em evidência:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_q}{r^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 + 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_q}{r^2}}} \right\} \quad (3.3.9)$$

Com os dois termos no colchete podemos aplicar a aproximação $(1+\epsilon)^n \approx 1+n\epsilon$ mantendo os termos de ordem $(d/r)^1$. No espírito desta aproximação é consistente desprezar o termo $(d/2r)^2$ que aparece embaixo da raiz:

$$V(\vec{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left\{ \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_q}{r^2}\right)\right) - \left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_q}{r^2}\right) \right\} \quad (3.3.10)$$

Os termos de ordem zero cancelam e o resultado é

$$V(\vec{r}) \underset{r \gg d}{\sim \sim \sim} \rightarrow \frac{2q \vec{r} \cdot \vec{r}_q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (3.3.11).$$

O vetor $\vec{p} \stackrel{\text{def.}}{=} 2q \vec{r}_q$ é o que chamamos antes de *vetor dipolo*. Então o potencial de um dipolo é

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (3.3.12)$$

Esta fórmula vale com a escolha da origem na posição do dipolo. Vamos calcular o campo elétrico do dipolo a partir deste potencial. Este cálculo será facilitado com algumas regras simples. São as mesmas regras de derivada: regra de produto e regra de cadeia, mas aqui formuladas para o gradiente. Sejam f e g dois campos escalares. O gradiente do produto destas funções é

$$\text{grad}(f g) = f \text{grad}(g) + \text{grad}(f) g \quad (3.3.13)$$

Seja h uma função escalar que depende de um escalar e seja K um campo escalar. O gradiente do campo $h(K(\vec{r}))$ é

$$\text{grad}(h \circ K) = h' \text{grad}(K) \quad (3.3.14)$$

onde “o” é o símbolo de composição de funções. No caso, vamos aplicar a regra de produto para os campos $f(\vec{r}) = \vec{r} \cdot \vec{p}$ e $g(\vec{r}) = |\vec{r}|^{-3}$ e a regra da cadeia com a função $h(r) = r^{-3}$ e o campo $K(\vec{r}) = |\vec{r}|$. O tratamento do fator $1/4\pi\epsilon_0$ é trivial. Então obtemos

$$\text{grad}\left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r^3} \text{grad}(\vec{r} \cdot \vec{p}) - 3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{p})}{r^4} \text{grad}|\vec{r}| \right\} \quad (3.3.15)$$

Falta somente calcular $\text{grad}(\vec{r} \cdot \vec{p})$ e $\text{grad}|\vec{r}|$. O produto escalar do vetor $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ com o vetor $\vec{p} = p_x\hat{x} + p_y\hat{y} + p_z\hat{z}$ é $\vec{p} \cdot \vec{r} = p_x x + p_y y + p_z z$. A derivada parcial disso em relação ao x é p_x e as outras derivadas fornecem analogamente os componentes do vetor \vec{p} . Então vale

$$\text{grad}(\vec{r} \cdot \vec{p}) = \vec{p} \quad (3.3.16).$$

É um ótimo exercício determinar $\text{grad}|\vec{r}|$ sem cálculo, apenas pensando na geometria. Obviamente $\text{grad}|\vec{r}|$ aponta radialmente para fora. O quociente do aumento de $|\vec{r}|$ e do aumento da distância andada na direção radial é obviamente 1. Então concluímos

$$\text{grad}|\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \equiv \hat{r} \quad (3.3.17)$$

O mesmo resultado sai facilmente do cálculo das derivadas parciais de $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Substituindo (3.3.16) e (3.3.17) na (3.3.15) e colocando ainda um fator -1 , obtemos o campo elétrico:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{p})}{r^4} \hat{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right\} \quad (3.3.18)$$

Para evidenciar o tipo de diminuição do campo com o aumento da distância, vamos expressar o vetor \vec{r} como $r\hat{r}$:

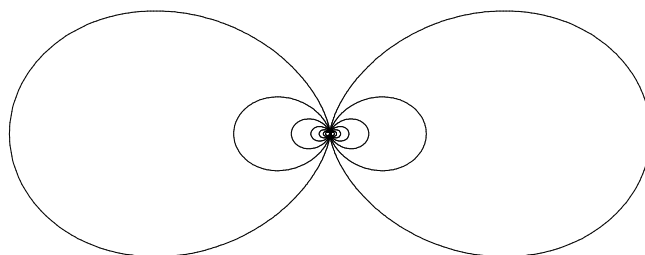
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left\{ 3 \hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p} \right\} \quad (3.3.19)$$

Repare que os termos na chave não dependem da distância. Então verificou-se o que suspeitamos na seção 1.5 baseados em apenas duas direções exemplares; o campo do dipolo cai como $1/r^3$.

Com a expressão do campo (3.3.18), pode-se calcular um sistema de linhas de força. A figura 3.3.2 mostra linhas de força do campo de um dipolo.

Fig. 3.3.2 Linhas de força do campo de um dipolo.

Para tornar o resultado ainda mais geral, podemos deslocar a origem para outro lugar e podemos escrever o potencial e o campo de um dipolo que



se encontra na posição \vec{r}_p :

$$V(\vec{r}) = \frac{(\vec{r} - \vec{r}_p) \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_p|^3} \quad (3.3.20)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ 3 \frac{((\vec{r} - \vec{r}_p) \cdot \vec{p})}{|\vec{r} - \vec{r}_p|^5} (\vec{r} - \vec{r}_p) - \frac{\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}_p|^3} \right\} \quad (3.3.21)$$

Veremos ainda dois exemplos de distribuições contínuas de carga: considere um disco de raio R uniformemente carregado com uma densidade superficial $\sigma_0 = const.$. Vamos calcular o potencial no eixo de simetria usando a convenção de zerar o potencial no infinito. Precisamos somar as contribuições de todos os pontos da superfície do disco. Isto significa que precisamos de uma integral de área, e esta integral faremos naturalmente em coordenadas polares usando o eixo de simetria como eixo- z e colocando o disco no plano x - y . Já discutimos os elementos de área em coordenadas polares na seção 1.6. O leitor deve fazer o desenho que acompanha esta construção, de preferência sem olhar a figura 1.6.3; ele deve desenhar o segmento de reta entre o ponto de integração e o ponto $\langle x=0, y=0, z \rangle$ cujo comprimento entra na expressão da contribuição do ponto de integração para o potencial. Feito isto, ele vai entender que o potencial no ponto $\langle x=0, y=0, z \rangle$ é

$$\begin{aligned} V(x=0, y=0, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \int_{\rho'=0}^R \frac{\sigma_0 \rho' d\phi' d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} = \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right) \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Há um ponto importante que precisa ser destacado: não é possível calcular o campo elétrico a partir do valor do potencial num determinado ponto! O gradiente do potencial não sai de um dado valor do potencial. É preciso conhecer o potencial numa vizinhança de um ponto para poder calcular o campo neste ponto. Com o resultado (3.3.22) temos quase esta situação de valor de potencial conhecido sem conhecimento dos valores vizinhos. Em relação à variável z não há problemas; conhecemos a dependência inteira. Mas em relação aos variáveis x e y conhecemos somente os valores para $x=0$ e $y=0$. Mas neste caso podemos calcular o campo no eixo z , porque a simetria do problema implica que nos pontos do eixo de simetria o campo elétrico não pode ter componentes perpendiculares ao eixo z . Então podemos concluir que

$$\vec{E}(x=0, y=0, z) = -\hat{z} \frac{\partial V(x=0, y=0, z)}{\partial z} \quad (3.3.23).$$

Esta fórmula, junto com o resultado (3.3.22), resulta em

$$\vec{E}(x=0, y=0, z) = \hat{z} \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right\} \quad (3.3.24)$$

Isto coincide com o antigo resultado (1.6.34).

Agora veremos um exemplo muito importante: consideraremos uma distribuição volumar de carga qualquer descrita por alguma função densidade ρ . Fora das suposições usuais de bom comportamento matemático (integrabilidade), vamos apenas supor que $\rho(\vec{r}_q)$ seja zero para pontos \vec{r}_q fora de uma esfera de raio δ e centro na origem.

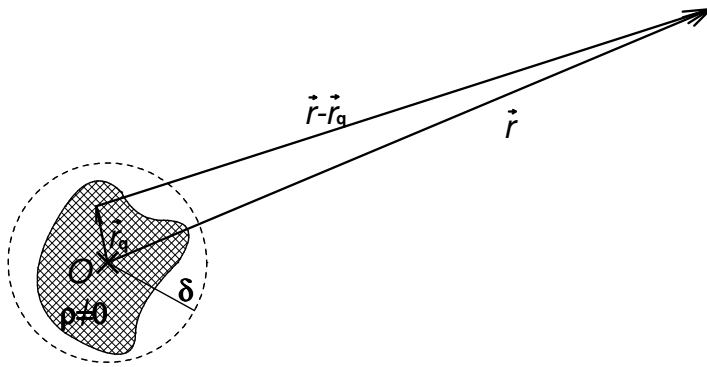


Fig. 3.3. Distribuição de carga concentrada numa bola de raio δ em volta da origem. Estaremos interessados no potencial para pontos \vec{r} muito afastados.

A expressão do potencial num ponto \vec{r} qualquer já está pronta. É simplesmente a fórmula (3.3.2). Mas esta fórmula se torna mais

interessante quando supusermos agora que o ponto onde queremos conhecer o potencial esteja muito afastado da região onde se encontra a carga. Neste caso podemos fazer aproximações com o fator $|\vec{r} - \vec{r}_q|^{-1}$ que aparece na integral. Num primeiro passo podemos dizer: se $|\vec{r}| \gg \delta$, vale $|\vec{r} - \vec{r}_q|^{-1} \approx |\vec{r}|^{-1}$ para os pontos que contribuem para a integral. Esta aproximação é muito cômoda, pois o fator $|\vec{r}|^{-1}$ não depende da variável de integração e pode ser tirado da integral. Com esta aproximação obtemos:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}_q)}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} d^3\vec{r}_q \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|} \iiint \rho(\vec{r}_q) d^3\vec{r}_q \quad (3.3.25)$$

A integral que sobra é simplesmente a carga total Q . Então obtemos o potencial de uma carga pontual na origem:

$$V(\vec{r}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|} \quad (3.3.26)$$

Agora, se queremos um pouco mais de precisão, podemos usar uma aproximação mais sofisticada. A aproximação que fizemos para chegar na (3.3.26) era de ordem $(\delta/|\vec{r}|)^0$.

Agora podemos desenvolver o fator $|\vec{r} - \vec{r}_q|^{-1}$ até os termos de ordem $(\delta/|\vec{r}|)^1$. Isto já fizemos exatamente quando passamos da fórmula (3.3.9) para a (3.3.10). Até os termos de ordem $(\delta/|\vec{r}|)^1$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} &= \frac{1}{\sqrt{\left(r^2 + \frac{d^2}{4} - 2\vec{r}_q \cdot \vec{r}\right)}} = \\ &= \frac{1}{r \sqrt{1 + \left(\frac{d}{2r}\right)^2 - 2\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_q}{r^2}}} \approx \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_q}{|\vec{r}|^3} \end{aligned} \quad (3.3.27).$$

Com esta aproximação obtemos um potencial

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}_q)}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} d^3\vec{r}_q \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}|} \iiint \rho(\vec{r}_q) d^3\vec{r}_q + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|^3} \vec{r} \cdot \iiint \vec{r}_q \rho(\vec{r}_q) d^3\vec{r}_q \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Reconhecemos o primeiro termo como potencial de uma carga pontual, a mesma expressão que tivemos na aproximação de ordem $(\delta/|\vec{r}|)^0$. O segundo termo tem a forma do potencial de um dipolo. Então chegamos ao resultado: o potencial de uma distribuição de carga concentrada numa região perto da origem de tamanho δ em grandes distâncias pode ser escrito como

$$V(\vec{r}) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (3.3.29)$$

onde Q é a carga total da distribuição e o vetor \vec{p} é dado pela integral

$$\vec{p} \stackrel{\text{def.}}{=} \iiint \vec{r}_q \rho(\vec{r}_q) d^3\vec{r}_q \quad (3.3.30)$$

Este vetor é chamado de *momento dipolar da distribuição de carga*. Em palavras podemos formular o resultado dizendo: em ordem $(\delta/|\vec{r}|)^1$ o potencial de qualquer distribuição de carga se comporta para grandes distâncias como uma superposição de uma carga pontual e um dipolo. Com a relação $\vec{E} = -\text{grad}V$ vale uma afirmação equivalente para o campo.

Se alguém quiser uma aproximação ainda melhor, pode-se desenvolver o fator $|\vec{r} - \vec{r}_q|^{-1}$ numa série de Taylor até ordens ainda mais altas. Mas isto vamos deixar para uma disciplina especializada de eletromagnetismo.

Exercícios:

E 3.3.1: No plano x - y existe a seguinte densidade de carga superficial:

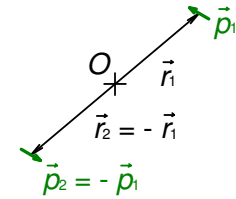
$$\sigma(x, y) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{para } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ -\sigma_0 & \text{para } R^2 < x^2 + y^2 \leq 2R^2 \\ 0 & \text{para } 2R^2 < x^2 + y^2 \end{cases} \quad (3.3.31)$$

onde σ_0 é uma constante.

(a) Calcule o potencial elétrico V nos pontos do eixo z usando a convenção que V é zero no infinito. Sugestão: use coordenadas cilíndricas.

(b) Calcule o campo elétrico nos pontos do eixo z .

E 3.3.2: Calcule o potencial $V(\vec{r})$ gerado por dois dipolos elétricos \vec{p}_1, \vec{p}_2 separados por uma distância d . Um dipolo é o negativo do outro $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$. Escolha a origem de tal forma que as posições dos dipolos sejam descritas por vetores posição \vec{r}_1, \vec{r}_2



tal que $\vec{r}_2 = -\vec{r}_1$. Depois determine o comportamento assintótico deste potencial para $|\vec{r}| \gg d$ mantendo os termos de ordem $(|\vec{r}|/d)^1$. Finalmente calcule o campo elétrico com esta expressão assintótica e mostre que o campo desta configuração cai como $1/r^4$.

E 3.3.3 Escreva os pontos de destaque desta seção.