

6.3 Movimento de uma partícula carregada num campo magnético

Numa seção futura veremos que é bem fácil criar um campo magnético que seja uniforme num volume de alguns litros ou até alguns metros cúbicos. Sem nos preocupar no momento como isto pode ser feito, vamos estudar o comportamento de uma partícula eletricamente carregada que foi introduzida numa região \mathbb{V} com campo magnético constante e com campo elétrico nulo.

Há uma dificuldade na análise deste problema. Antes de introduzir a partícula naquele volume \mathbb{V} , os campos tinham os valores $\vec{E}(\vec{r}) = 0$ e $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0 = \overline{const.}$ para $\vec{r} \in \mathbb{V}$. Mas, uma vez que jogamos a partícula neste volume, os campos não serão mais os mesmos, pois a própria partícula dá uma contribuição para o campo elétrico e certamente também para o campo magnético. Vimos na seção 1.4 que o campo gerado pela própria partícula é singular na posição da partícula. A parte singular do campo tem que ser removida fazendo uma média de valores do campo sobre a superfície de uma esfera com centro na posição da partícula e tomando um limite mandando o raio desta esfera para zero. Pode-se mostrar que, para o caso de uma partícula em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, este procedimento de retirada de singularidade resulta na eliminação total de força que a partícula exerce sobre si mesma. Mas isto não é o caso quando há aceleração. Neste caso a remoção da parte singular do campo não elimina toda a força devido ao campo gerado pela própria partícula. Já enfrentamos este problema na seção 3.4 quando discutimos a aceleração de elétrons no tubo de Braun. Naquela ocasião mencionamos uma fórmula cuja dedução é vista numa disciplina muito mais avançada e que informa a potência irradiada por uma carga acelerada. Citamos esta fórmula aqui de novo:

$$P_{\text{radiação}} = \frac{q^2 |\vec{a}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (6.3.1)$$

Esta fórmula mede em termos energéticos os efeitos do campo gerado pela partícula sobre o movimento dela. No caso do tubo de Braun nos convencemos de que estes efeitos podem tranquilamente ser desprezados. No estudo do movimento de uma partícula carregada num campo magnético, vamos também desprezar estes efeitos causados pelo campo da partícula. Dependendo da massa da partícula, da sua velocidade e do módulo do campo magnético aplicado, isto pode não ser uma boa aproximação. Mas, para os campos que podemos gerar aqui no nosso laboratório mesmo com partículas leves como o elétron e com energias de alguns quiloeltronvolt, a aceleração é ainda tão pequena que podemos desprezar estes efeitos. Ou seja, podemos fazer de conta que a eliminação da parte singular do campo elimina praticamente toda a força que o campo da partícula exerce sobre ela. Fazendo isto, vamos simplesmente supor que os campos aos quais a partícula está exposta sejam $\vec{E}(\vec{r}) = 0$ e $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}_0 = \overline{const.}$ para $\vec{r} \in \mathbb{V}$.

Com esta hipótese a segunda lei de Newton para esta partícula é

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \times \vec{B}_0 \quad (6.3.2)$$

Para resolver esta equação diferencial, vamos escrevê-la em componentes. Para não criar muitos termos, vamos escolher um sistema de coordenadas cartesianas tal que o

campo magnético aponte na direção do eixo z . Com esta escolha o campo em \mathbb{V} tem o valor $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$. Temos

$$\vec{v} \times \vec{B}_0 = (\hat{x}v_x + \hat{y}v_y + \hat{z}v_z) \times \hat{z}B_0 = -\hat{y}v_x B_0 + \hat{x}v_y B_0 \quad (6.3.3)$$

Então a (6.3.2) fornece as seguintes três equações:

$$m \frac{dv_x}{dt} = qv_y B_0 \quad (6.3.4)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B_0 \quad (6.3.5)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (6.3.6)$$

Podemos resolver a equação da componente z imediatamente: $v_z = v_{z0} = \text{const.}$, e conseqüentemente $z(t) = z_0 + v_{z0}t$. Então na direção z a partícula anda como uma partícula livre. O movimento nas direções x e y é determinado pelo sistema de equações diferenciais acopladas (6.3.4) e (6.3.5). Para resolver este sistema, vamos combinar as equações. Calculamos a derivada da (6.3.4) e substituímos dv_y/dt da (6.3.5):

$$m \frac{d^2v_x}{dt^2} = q \frac{dv_y}{dt} B_0 = q \left(\frac{-qv_x B_0}{m} \right) B_0 \quad (6.3.7).$$

Então resultou uma equação diferencial que conhecemos da Física II no estudo do oscilador harmônico:

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = - \left(\frac{qB_0}{m} \right)^2 v_x \quad (6.3.8)$$

Conhecemos a solução geral desta equação. Há várias maneiras de escrever a solução geral: com a ajuda de um cosseno com uma constante de fase, com a ajuda de um seno com uma constante de fase ou como uma combinação linear de um cosseno e um seno. Eu prefiro um cosseno com uma constante de fase. Mas, como aqui temos que integrar ainda uma vez para obter a própria coordenada $x(t)$, usarei um seno para ficar no fim com um cosseno para a coordenada:

$$v_x(t) = -v_{\perp} \text{sen}(\omega t + \varphi_0) \quad \text{com} \quad \omega = \frac{q}{m} B_0 \quad (6.3.9)$$

Da equação (6.3.4) podemos então calcular a componente y da velocidade:

$$v_y(t) = \frac{m}{qB_0} \frac{dv_x}{dt} = -v_{\perp} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (6.3.10)$$

Integrando estas expressões das componentes da velocidade, obtemos a lei horária completa do movimento:

$$x(t) = x_0 + \frac{v_{\perp}}{\omega} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad \text{com} \quad \omega = \frac{q}{m} B_0 \quad (6.3.11)$$

$$y(t) = y_0 - \frac{v_{\perp}}{\omega} \text{sen}(\omega t + \varphi_0) \quad \text{com} \quad \omega = \frac{q}{m} B_0 \quad (6.3.12)$$

$$z(t) = z_0 + v_{z_0} t \quad (6.3.13)$$

As constantes que podem ser ajustadas às condições iniciais do movimento são x_0 , y_0 , z_0 , v_{z_0} , v_{\perp} e ϕ_0 . Por outro lado a constante ω não depende das condições iniciais, mas é determinada pela dinâmica da partícula.

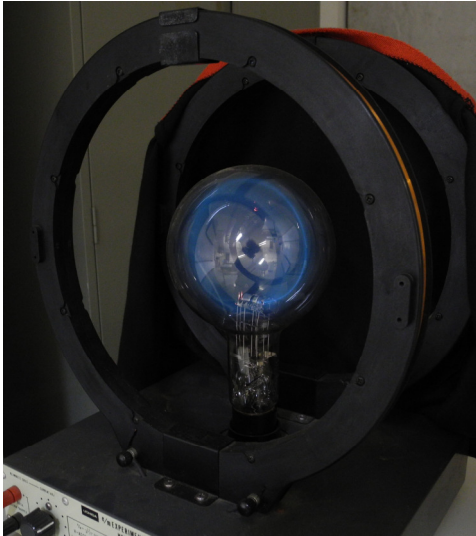


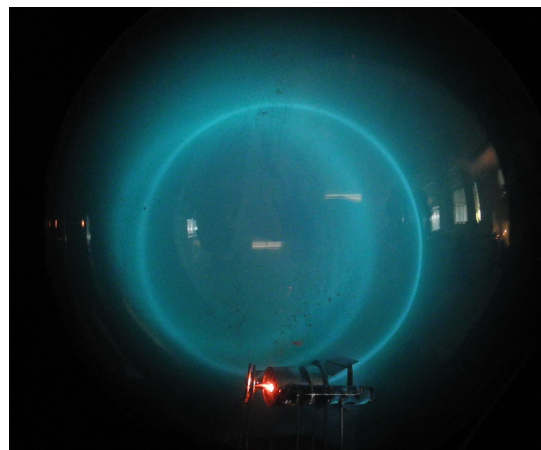
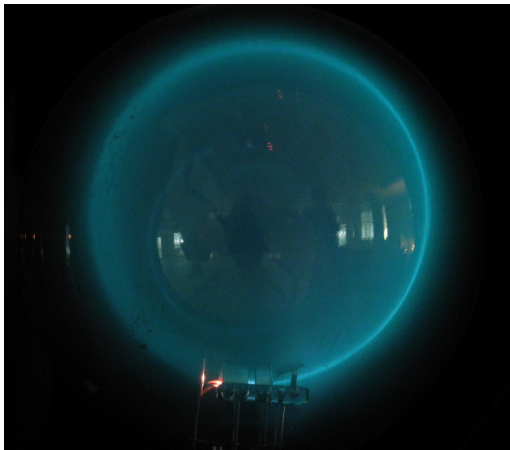
Fig. 6.3.1 Ampola para visualização de trajetórias de elétrons num campo magnético uniforme. A luz emitida por moléculas de gás atingidas pelos elétrons marca a trajetória.

A lei horária composta pelas três fórmulas (6.3.10), (6.3.12) e (6.3.13) descreve um movimento helicoidal. Enquanto a partícula avança da direção z com velocidade constante, ela executa um movimento circular uniforme no plano x - y . A velocidade angular deste movimento circular independe das condições iniciais e é determinada somente pela carga e massa da partícula e pelo valor do campo magnético. A figura 6.3.1 mostra um equipamento que permite realizar este movimento experimentalmente. Um feixe de elétrons é gerado com um canhão de elétrons parecido com aquele do tubo de Braun.

Este canhão de elétrons está montado numa ampola que possui ainda um resto de gás cujas moléculas emitem luz quando foram atingidas pelos elétrons. Desta forma o feixe de elétrons fica visível. Duas bobinas circulares fora da ampola fornecem o valor diferente de zero do campo magnético.

Fig. 6.3.2 Feixe circular de elétrons num campo magnético uniforme.

Fig. 6.3.3 Trajetória helicoidal de elétrons num campo magnético uniforme.



A figura 6.3.2 mostra a trajetória de elétrons num campo magnético uniforme. As condições iniciais na saída do canhão de elétrons são tais que a componente da velocidade na direção do campo é zero, $v_{z_0} = 0$, e a trajetória é circular. Já na figura 6.3.3 a ampola contendo o canhão foi girada de tal forma que os elétrons avançam na direção do campo e se forma uma hélice.

A constante $\omega = \frac{q}{m} B_0$ determina o tempo T que é necessário para a partícula completar uma volta. Da Física I lembramos que $\omega = 2\pi/T$. Mas a dinâmica da partícula determina não apenas este tempo. A direção do eixo de giro e o sentido de giro são também determinados pela dinâmica. Para poder descrever todas estas características de um movimento giratório, inventou-se um vetor $\vec{\omega}$ chamado de *velocidade angular vetorial*. Imagine algum movimento circular uniforme com período T , como indicado na figura 6.3.4. A tal movimento vamos associar o vetor $\vec{\omega}$ cujo módulo vale $2\pi/T$, cuja direção é a direção do eixo de rotação e cujo sentido é tal que o giro junto com um avanço neste sentido define um parafuso direito.

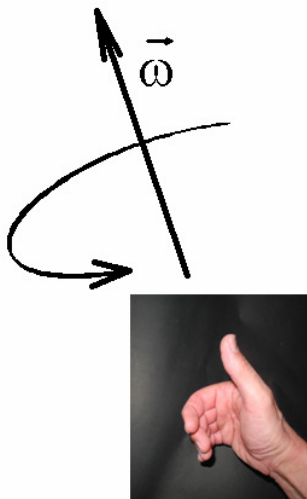


Fig. 6.3.4 Velocidade angular vetorial. Quando posicionamos a mão direita de tal forma que o dedo indicador acompanhe o movimento giratório, o polegar indica o sentido do vetor $\vec{\omega}$.

No caso do movimento de uma partícula carregada num campo magnético uniforme, a direção da velocidade angular vetorial obviamente coincide com a direção do campo magnético. Para ver qual é o sentido deste vetor, analisamos as fórmulas (6.3.11) e (6.3.12) para o caso $q > 0$ e $B_0 > 0$. A figura 6.3.5 mostra a projeção de uma trajetória no plano x - y para este caso.

Mostrei os vetores unitários \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} . O último vetor é mostrado como ponta de uma flecha voando na direção do observador. O campo magnético tem este mesmo sentido. Repare que a base é mesmo uma base direita. A orientação do movimento descrito pelas fórmulas (6.3.11) e (6.3.12) para o caso $q > 0$ e $B_0 > 0$ é horária. Quando girarmos um parafuso neste sentido, ele entrará no plano de desenho. Então o vetor $\vec{\omega}$ aponta no sentido contrário do campo magnético.

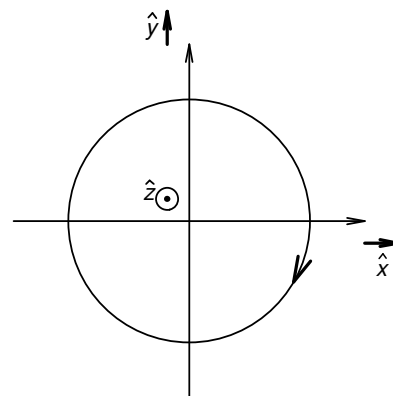


Fig. 6.3.5 Sentido da rotação de uma partícula positivamente carregada num campo magnético $B_0 \hat{z}$ com $B_0 > 0$.

Juntando este resultado com a informação sobre o módulo da velocidade angular, obtemos o resultado:

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m} \vec{B}_0 \tag{6.3.14}$$

Na seção 6.1 definimos o campo magnético como um campo tensorial. Isto significa que o valor deste campo num ponto é um tensor. De fato o valor é um tensor antissimétrico. Para poder visualizar este tipo de objeto graficamente, associamos um vetor \vec{B} a este tensor através da seguinte correspondência:

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{B}_{xy} & \mathbb{B}_{xz} \\ \mathbb{B}_{yx} & 0 & \mathbb{B}_{yz} \\ \mathbb{B}_{zx} & \mathbb{B}_{zy} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y \\ -B_z & 0 & B_x \\ B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (6.3.15)$$

$$\vec{B} = \hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z$$

Na seção 6.1 mencionamos que esta substituição do tensor por um vetor é uma mutreta, e que esta representação por vetores tem os seus defeitos. Agora temos os conhecimentos necessários para entender estes defeitos.

Com a fórmula (6.3.14) podemos concluir que \vec{B} tem as mesmas propriedades geométricas de uma velocidade angular. Descrevemos uma velocidade angular com um vetor, mas isto não está totalmente correto. Veremos qual é o comportamento de vetores perante um espelho.

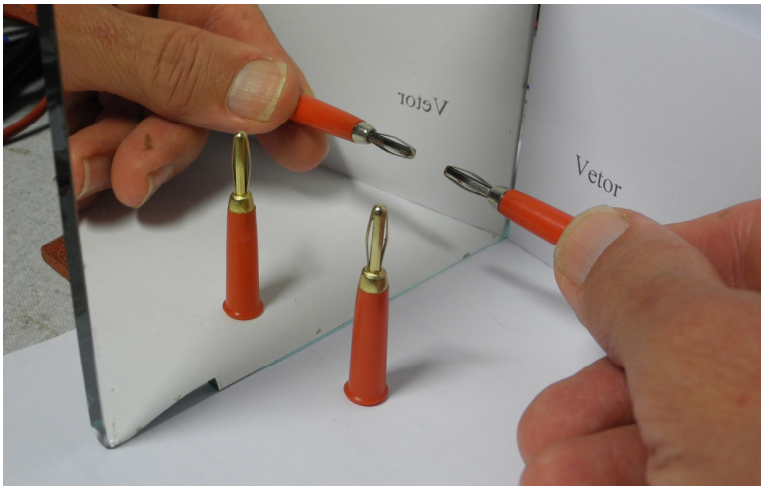
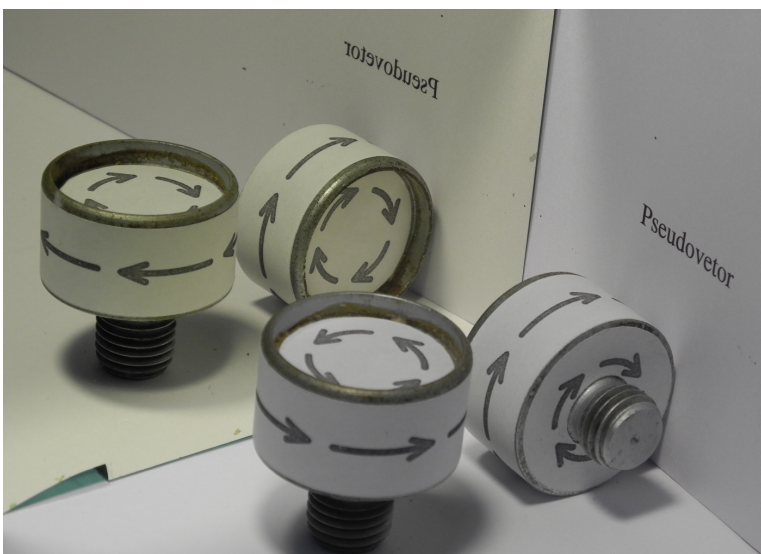


Fig. 6.3.6 Comportamento de vetores no processo de espelhamento.

A figura 6.3.6 mostra vetores realizados com conectores banana. Dois vetores estão postos perante um espelho e suas imagens do outro lado do espelho aparecem na fotografia. Um vetor está paralelo ao plano do espelho e o outro está perpendicular.

Percebemos que a imagem especular do vetor paralelo ao plano especular descreve o mesmo vetor do objeto original. Por outro lado, a imagem do vetor perpendicular ao espelho descreve um vetor que difere do original por um fator -1 . Agora veremos como ficam estes casos com velocidades angulares. Na sala de aula girei um objeto na frente de um espelho. Aqui nestas notas convencionais sem filmagem, posso substituir os



movimentos por desenhos de setas que indiquem uma rotação em peças redondas. A figura 6.3.7 mostra os casos de eixos de rotação paralelos e perpendiculares ao plano de espelho.

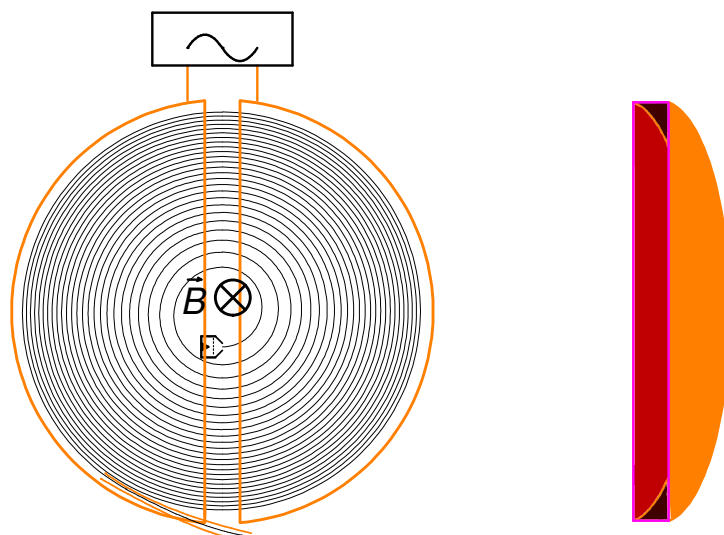
Fig. 6.3.7 Comportamento de velocidades angulares no processo de espelhamento.

Percebemos que o comportamento é exatamente o contrário daquele dos vetores. Então velocidades angulares não são vetores! Velocidades angulares assim como valores do campo magnético são tensores e não vetores. Os vetores que usamos para visualizar estes objetos são apenas “quebra-galhos” e este tipo de “quebra-galho” é chamado de *pseudovetor*. Futuramente utilizaremos os comportamentos de reflexão especular destes objetos com argumentos de simetria. Então o leitor deve gravar as imagens 6.3.6 e 6.3.7 na memória.

Discutiremos algumas aplicações deste movimento circular de uma partícula carregada num campo magnético. A fórmula $|\vec{\omega}| = |q\vec{B}_0/m|$ pode ser usada para medidas muito precisas. Para baixas acelerações, o campo eletromagnético da partícula tem uma influência desprezível sobre o movimento. Mas o campo existe e ele pode ser medido. Um correspondente sensor, que podemos chamar de antena, ligado num circuito eletrônico pode registrar o campo elétrico da partícula que está girando, e isto resulta num sinal elétrico oscilatório que oscila exatamente com a frequência angular $\omega_{\text{sinal antena}} = |q\vec{B}_0/m|$. Medidas de frequências podem ser feitas com altíssima precisão.

Então se pode medir $|q\vec{B}_0/m|$ com muita precisão. As partículas subatômicas possuem cargas que são múltiplos inteiros da carga elementar. Os valores mais frequentes de carga são $+1e$ e $-1e$. Geralmente é fácil descobrir o valor da carga de uma destas partículas. Injetando uma destas partículas num campo magnético bem conhecido, pode-se medir a massa desta partícula com boa precisão, medindo a frequência angular do sinal de uma antena perto da partícula que circula no campo. Inversamente pode-se usar a medida desta frequência com uma partícula bem conhecida, cujo valor de massa já foi previamente medido, para medir o módulo de um campo magnético com alta precisão.

Outra aplicação deste movimento com trajetória circular é um tipo de acelerador de partículas. O método mais direto de acelerar uma partícula carregada é deixando a partícula atravessar uma grande diferença de potencial. Mas, quando se quer partículas extremamente energéticas, precisar-se-ia de diferenças de potencial muito elevadas e



isto resulta em limitações ou em máquinas de aceleração muito grandes.

Fig. 6.3.8 (esquerda) Esquema de um ciclotron. (direita) Vista lateral de um dos eletrodos ocus em forma de D.

Um método de atingir altas energias sem precisar de elevadas diferenças de potencial é de utilizar a mesma diferença de potencial várias vezes. Para poder aproveitar uma

diferença de potencial diversas vezes é necessário trazer a partícula de volta para o lugar de mais alta energia potencial. Isto pode ser feito com a trajetória circular num campo magnético. Para evitar que no transporte para o ponto de partida a energia cinética seja convertida de volta em energia potencial, é também necessário variar o campo elétrico

que acelera temporalmente. Estas ideias são realizadas num acelerador chamado de *ciclotron*, que foi inventado em 1931 por Ernest Lawrence¹. A figura 6.3.8 mostra o esquema deste tipo de acelerador. As partículas (na maioria das vezes prótons ou íons mais pesados) saem de uma fonte de partículas perto do centro do aparato. Esta fonte não fornece uma sequência contínua de partículas, mas libera partículas em pequenas porções saindo dela regularmente com certa periodicidade. Perpendicularmente ao vetor velocidade destas partículas aplica-se um campo magnético constante que mantém o pacote de partículas numa trajetória circular. Logo que as partículas saíram da fonte, elas entram num eletrodo oco de forma de um D. O interior deste eletrodo é quase uma gaiola de Faraday. Então as partículas estão expostas a um campo elétrico nulo enquanto elas permanecem neste “D”. Mas, completando pouco menos de meio círculo, as partículas chegam de novo na parte reta do “D” e saem. Oposto a este primeiro “D” se encontra um “D invertido”. No momento da passagem do pacote de partículas entre os dois eletrodos em forma de D, aplica-se uma diferença de potencial entre estes eletrodos que acelera as partículas. No segundo “D”, ou melhor, no “D invertido”, a trajetória é de novo circular, porém com um raio já um pouco maior, pois a velocidade aumentou na passagem do “D” para o “D invertido” e de acordo com a (6.3.11) o raio de curvatura da trajetória vale v_{\perp} / ω . Enquanto o pacote de partículas percorre outro semicírculo, a diferença de potencial entre os eletrodos é trocada de tal forma que, ao sair do “D invertido”, as partículas encontram de novo um campo elétrico que as acelera. Seguindo desta maneira, o pacote de partículas percorre uma espiral aumentando a velocidade em cada passagem de um eletrodo para o outro. No fim as partículas entram num canal onde elas são guiadas com a ajuda de um campo elétrico para sair da máquina.

Nas primeiras décadas do desenvolvimento da física nuclear, os ciclotrons foram uma ferramenta muito usada em pesquisa fundamental. Para poder investigar os núcleos dos átomos, precisava-se de partículas muito energéticas para poder excitar os elevados níveis de energia e, no caso de projéteis positivos, precisava-se de muita energia para poder vencer a repulsão elétrica dos núcleos positivos. Hoje se usam ciclotrons ainda para aplicações médicas e na fabricação de radioisótopos. Tipicamente se conseguem energias na ordem de 10^7 eV com estas máquinas. Para as pesquisas fundamentais interessam hoje faixas de energia muito mais elevadas que requerem máquinas mais sofisticadas.

Há dois fenômenos que limitam a energia máxima que se pode atingir com um ciclotron. Usamos a segunda lei de Newton para montar a equação diferencial (6.3.2), que supostamente descreve a dinâmica da partícula. Mas, quando a partícula atinge velocidades com módulo próximo da velocidade da luz, a segunda lei de Newton perde sua validade. Na Física IV aprenderemos um pouco da teoria da relatividade e veremos que a segunda lei de Newton precisa ser corrigida. A correção pode ser expressa com um fator de correção como se a massa da partícula aumentasse com a velocidade. Esta massa corrigida, também chamada de massa relativística, é

$$m_{rel.} = \frac{m}{\sqrt{1 - \vec{v}^2 / c^2}} \quad (6.3.16)$$

Então na medida em que a partícula entra nas voltas mais externas da espiral no ciclotron, sua massa aumenta e conseqüentemente a velocidade angular diminui. Desta forma a fonte da voltagem que fornecia as diferenças de potencial entre os eletrodos “D” vai trocar de polaridade na hora errada. Esta dificuldade pode ser resolvida de

¹ Ernest Orlando Lawrence (08/08/1901 – 27/08/1958).

várias maneiras. Pode-se variar a frequência de oscilação da fonte de tensão para poder acompanhar a mudança de velocidade angular, ou pode-se alterar o valor do campo magnético para manter a velocidade angular constante. Isto é feito em aceleradores chamados de *síncrotron*.

A segunda limitação de energia atinge principalmente as partículas leves como os elétrons. Na descrição da dinâmica pela equação (6.3.2), consideramos apenas o campo eletromagnético externamente aplicado na partícula e desprezamos a contribuição de campo oriunda da própria partícula. A força magnética $q\vec{v}\times\vec{B}$ é perpendicular à velocidade e conseqüentemente esta força não realiza trabalho. Então a energia cinética não deve mudar quando uma partícula circula num campo magnético constante e num campo elétrico nulo. Mas, como mencionamos, uma carga em movimento acelerado emite ondas que levam energia embora. A potência perdida é descrita pela fórmula (6.3.1). Se há perda de energia, então há trabalho envolvido, e isto mostra que o campo da própria partícula realmente exerce força sobre a partícula. As perdas de energia causadas por este efeito de radiação precisam ser repostas pelo acelerador. Como a aceleração que entra quadraticamente na fórmula da potência perdida cresce com a velocidade, existe um limite superior da velocidade que pode ser alcançada. Neste limite o acelerador iria somente repor as perdas sem poder aumentar a velocidade da partícula. O módulo da aceleração num movimento circular uniforme com velocidade \vec{v} e raio de curvatura R é $|\vec{v}|^2/R$. Isto mostra que uma maneira de diminuir estas perdas por radiação é usar raios de curvatura grandes. Por esta razão o acelerador de partículas no CERN (Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire) tem dimensões enormes. O grande anel do acelerador principal tem um diâmetro de 8,6 km.

As perdas de energia por radiação num síncrotron não são sempre um efeito indesejável. O síncrotron pode também ser usado como fonte desta radiação para fins de pesquisa em diversas áreas. O Brasil possui um centro de pesquisa multidisciplinar construído em volta de um enorme síncrotron (Laboratório Nacional de Luz Síncrotron em Campinas - SP).

Quando falamos de aplicações de um fenômeno físico, pensamos geralmente em alguma invenção humana que utiliza aquele fenômeno em prol de algum benefício. Mas às vezes a própria Natureza fornece um benefício para a humanidade baseada num fenômeno físico. Isto remete às afirmações feitas na seção 1.1 quando falei da compreensão das condições de vida. Sim, as condições de vida, e não apenas da vida humana, dependem crucialmente destes movimentos helicoidais de partículas carregadas num campo magnético. Do nosso Sol, cuja energia irradiada é a fonte de toda a vida na Terra, vêm também partículas eletricamente carregadas e com elevada energia cinética. Este fluxo de partículas é chamado de *vento solar*. O campo magnético da Terra captura estas partículas mantendo-as em trajetórias helicoidais em volta das linhas de campo do campo magnético. Sem este escudo magnético o vento solar iria destruir as moléculas essenciais dos seres vivos e iria com o passar do tempo levar toda a atmosfera terrestre embora. Sem atmosfera as condições de temperatura da superfície da Terra se tornariam impróprias para a vida.

As partículas do vento solar presas nas linhas do campo magnético terrestre provocam um fenômeno visível perto dos polos magnéticos da Terra. No céu noturno nestas regiões aparecem luzes chamadas auroras polares (aurora boreal no norte e aurora austral no sul). As linhas de campo magnético que na região equatorial ficam aproximadamente paralelas à superfície terrestre convergem nos polos e se aproximam da superfície. As partículas do vento solar espiralando em volta das linhas do campo são

então guiadas para baixas altitudes. “Baixa altitude” significa algo como 100 km de altura acima da superfície terrestre. Nesta altura já há uma pequena pressão de gás da atmosfera terrestre e as partículas do vento solar ionizam e excitam as moléculas do gás. Ao voltar para o estado fundamental, as moléculas emitem luz que é a fonte do fenômeno observado. A figura 6.3.9 mostra uma fotografia de aurora boreal.



Fig. 6.3.9 Aurora boreal (Imagem tomada da Wikipedia; United States Air Force photo by Senior Airman Joshua Strang. http://en.wikipedia.org/wiki/File:Polarlicht_2.jpg)

O campo magnético da Terra não é um campo uniforme e as trajetórias das partículas do vento solar não são estas hélices simples que calculamos. O primeiro que calculou trajetórias em campos magnéticos parecidos com o campo da Terra foi C. Störmer². Kr. Birkeland³ e E. Brüche⁴ fizeram experiências para comparar os cálculos com dados experimentais. As trajetórias em campos não uniformes podem ser bastante complicadas e no campo entre dois polos de barras magnéticas podem-se inclusive aprisionar partículas carregadas como indicado qualitativamente na figura 6.3.10. A trajetória mostrada nesta figura não foi calculada e não é para ser tomada ao “pé da letra”. Mas esta trajetória mostra um fenômeno que realmente ocorre; na região da confluência das linhas magnéticas, a trajetória helicoidal retorna. Isto possibilita aprisionar uma partícula numa “garrafa magnética”. Perto dos polos magnéticos da Terra acontece algo parecido com as partículas do vento solar.

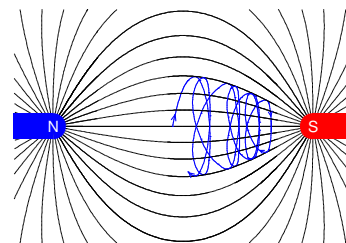


Fig. 6.3.10 Representação qualitativa da trajetória de uma partícula carregada num campo não uniforme entre os polos de dois ímãs.

Outra aplicação do movimento de partículas carregadas num campo magnético não uniforme são lentes para elétrons. Pode-se fabricar ímãs em forma de funil duplo como mostra a figura 6.3.11. Os polos deste ímã são dois anéis paralelos, um perto do outro. Pode-se mostrar que elétrons que incidem sobre este funil duplo com trajetórias perto do eixo de simetria do funil sofrem uma deflexão parecida com aquela de raios luminosos perto do eixo óptico de uma lente biconvexa. A única diferença em comparação com os raios luminosos é um giro da imagem por volta do eixo de simetria. Os microscópios eletrônicos usam este tipo de *lentes magnéticas*.

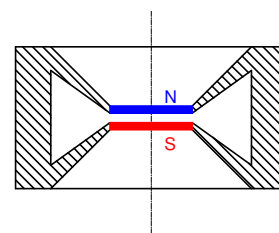


Fig. 6.3.11 Lente magnética.

² C.Störmer: Vidensk. Skr. Nr. 3 1904 e C.Störmer: ZS. f. Astrophys. 1, 237 1930.

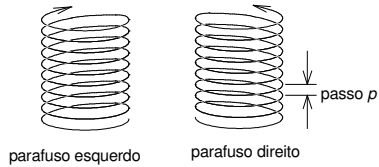
³ Kr. Birkeland: Norwegian Aurora Polaris, Exp. 1901-1903, Teil 1, 1902, Teil 2 1913.

⁴ E. Brüche: Störmers Polarlichttheorie in Experimenten. ZS. f. Astrophys. 2 p. 30 1931. veja também H. A. Bauer: Grundlagen der Atomphysik Springer-Verlag 1943.

Exercícios:

E 6.3.1: Calcule a frequência angular do movimento de um elétron num campo de 1T.

E 6.3.2: Um elétron do vento solar se move com uma velocidade de 400 km s^{-1} numa região onde o campo magnético da Terra tem um módulo de 10^{-6} Vs m^{-2} . A velocidade do elétron faz um ângulo de 45° com o campo de tal



forma que $\vec{v} \cdot \vec{B} = +(0,4/\sqrt{2})\text{ Vm}^{-1}$. A trajetória deste

elétron tem a forma de uma hélice. **(a)** Determine se esta hélice é um parafuso direito ou esquerdo. **(b)** Calcule o passo deste parafuso, ou seja, a distância entre as espiras (compare com a figura). **(c)** Calcule o raio desta hélice. Dados: massa do elétron = $9,11 \times 10^{-31}\text{ kg}$, carga do elétron = $-1,602 \times 10^{-19}\text{ As}$.

E 6.3.3: Sejam \vec{V} e \vec{W} dois vetores deslocamento na frente de um espelho e \vec{V}^{Es} e \vec{W}^{Es} os respectivos vetores espelhados. Sejam \vec{P} e \vec{S} dois pseudovetores na frente de um espelho e \vec{P}^{Es} e \vec{S}^{Es} os respectivos pseudovetores espelhados. Expresse os produtos escalares $\vec{V}^{Es} \cdot \vec{W}^{Es}$, $\vec{P}^{Es} \cdot \vec{S}^{Es}$ e $\vec{V}^{Es} \cdot \vec{S}^{Es}$ em termos dos respectivos produtos $\vec{V} \cdot \vec{W}$, $\vec{P} \cdot \vec{S}$ e $\vec{V} \cdot \vec{S}$.

E 6.3.4: Força e velocidade são vetores. Então podemos concluir da fórmula da força magnética que o produto vetorial de um pseudovetor e um vetor resulta num vetor. Use este fato, os resultados do exercício E 6.3.3 assim como as propriedades do produto triplo $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ para mostrar que o produto vetorial de dois vetores é um pseudovetor e que o produto vetorial de dois pseudovetores é também um pseudovetor.

E 6.3.5: Escreva os pontos de destaque desta seção.