

6.6 Força magnética atuando sobre condutores

Um campo magnético exerce força sobre um condutor no qual flui corrente elétrica estacionária. Dentro do condutor temos espécies de partículas carregadas, cada espécie com sua carga específica q_e , sua densidade numérica $\rho_{\#e}$ e velocidade de deriva \vec{v}_e . Sobre cada uma destas partículas atua a força $q_e \vec{v}_e \times \vec{B}$. Há $\delta V \rho_{\#e}$ partículas da espécie e num volume infinitesimal δV . Então a força magnética total que atua sobre um volume infinitesimal δV do condutor é

$$\delta \vec{F} = \sum_e \delta V \rho_{\#e} q_e \vec{v}_e \times \vec{B} \quad (6.6.1).$$

Nesta fórmula o somatório se estende sobre todas as espécies de partículas carregadas. Podemos até incluir aquelas que não contribuem para a condução; para estas a velocidade de deriva é simplesmente zero. Podemos definir uma densidade de força dividindo pelo volume:

$$\vec{f} = \sum_e \rho_{\#e} q_e \vec{v}_e \times \vec{B} \quad (6.6.2)$$

Na expressão que multiplica o campo magnético, reconhecemos a densidade de corrente da antiga fórmula (5.2.8). Então a densidade de força é

$$\boxed{\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}} \quad (6.6.3)$$

A força que atua sobre algum volume grande V é a integral de volume desta densidade:

$$\vec{F} = \iiint_V \vec{f} d^3\vec{r} \quad (6.6.4)$$

Estamos especialmente interessados no caso de um condutor em forma de um fio fino que percorre uma curva \mathcal{C} . Esta curva pode ser descrita de forma paramétrica com a ajuda de uma função $\vec{r}_{\mathcal{C}} : [0,1] \rightarrow \mathbb{V}$ em que \mathbb{V} é o nosso espaço físico do referencial adotado. Para cada valor do parâmetro $\lambda \in [0,1]$, o vetor posição $\vec{r}_{\mathcal{C}}(\lambda)$ aponta para um ponto do fio, sendo $\vec{r}_{\mathcal{C}}(0)$ e $\vec{r}_{\mathcal{C}}(1)$ o início e fim do fio.

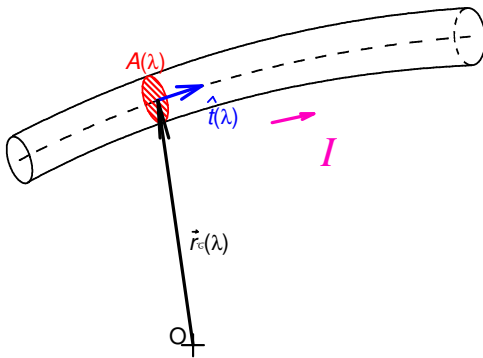


Fig. 6.6.1 Peça de um fio condutor cuja forma é descrita por uma curva \mathcal{C} .

No caso de um fio fino vamos supor que a seção transversal do fio seja tão pequena que o campo magnético e a densidade de corrente praticamente não variem na seção. Neste caso a integral de volume se simplifica da seguinte forma:

$$\iiint_V \vec{f} d^3\vec{r} = \int_0^1 \vec{f}(\vec{r}_{\mathcal{C}}(\lambda)) A(\lambda) \left| \frac{d\vec{r}_{\mathcal{C}}}{d\lambda} \right| d\lambda \quad (6.6.5),$$

ou seja, nas direções transversais a integração se reduz a uma simples multiplicação pela área transversal do fio $A(\lambda)$. A densidade de corrente tem a direção do vetor tangente

da curva \mathcal{C} e, se escolhermos a orientação que define o sentido positivo da corrente no mesmo sentido do vetor tangente, podemos escrever

$$\vec{j} = \frac{I}{A(\lambda)} \hat{i}(\lambda) \quad (6.6.6).$$

Nesta fórmula \hat{i} é o vetor tangente normalizado da curva:

$$\hat{i}(\lambda) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{d\vec{r}_{\mathcal{C}}/d\lambda}{\left|d\vec{r}_{\mathcal{C}}/d\lambda\right|} \quad (6.6.7)$$

Inserindo as fórmulas (6.6.3), (6.6.6) e (6.6.7) na (6.6.5), obtemos para a força que atua sobre o fio a seguinte expressão:

$$\vec{F} = I \int_0^1 \frac{d\vec{r}_{\mathcal{C}}}{d\lambda} \times \vec{B} d\lambda \quad (6.6.8).$$

Especialmente se o campo magnético for constante ao longo de todo o fio, podemos tirá-lo da integral. A integral que sobra é simplesmente o vetor que aponta do início até o fim do fio. Vamos chamar este vetor de $\vec{\ell}$:

$$\vec{\ell} \stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^1 \frac{d\vec{r}_{\mathcal{C}}}{d\lambda} d\lambda = \vec{r}_{\mathcal{C}}(1) - \vec{r}_{\mathcal{C}}(0) \quad (6.6.9)$$

Neste caso a força tem a forma simples

$$\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B} \quad (6.6.10)$$

Um caso especialmente interessante é o de um fio em forma de caminho fechado. Neste caso, os pontos inicial e final coincidem e o vetor $\vec{\ell}$ é o vetor zero. Então a força total é zero se o campo for uniforme. Este valor não parece ser interessante, mas logo veremos qual é o aspecto interessante.

Mas antes cabe um comentário sobre como realizar este tipo de condutor com corrente estacionária na prática. Num simples laço de fio condutor a corrente cessaria em pouquíssimo tempo. Para manter uma corrente estacionária, precisa-se de uma fonte. Mas se colocarmos uma pilha na malha, não teremos mais um condutor em forma de fio fino, como mostra a figura 6.6.2a.

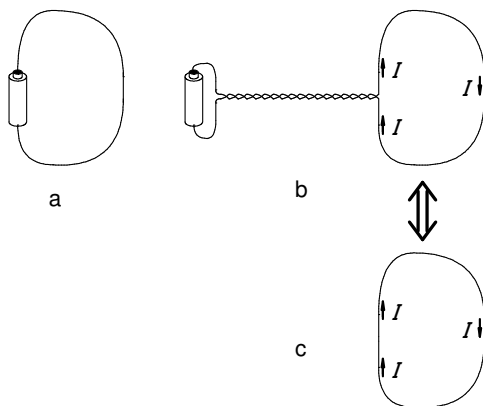


Fig. 6.6.2 Como manter uma corrente numa malha de fio fino sem engrossar o fio com uma pilha.

Mas há um truque para tirar a pilha, ou qualquer outra fonte, fora da malha sem alterar as questões de força magnética envolvidas. Usa-se um fio com uma fina capa de verniz isolante de tal forma que possamos encostar uma parte do fio em outra sem permitir a passagem direta da corrente pelo ponto de contato. Em algum ponto do caminho fechado da malha, podemos então trazer e levar a corrente da fonte praticamente

no mesmo caminho de tal forma que nesta parte de ida e volta para a fonte todas as forças cancelem-se. A figura 6.6.2 mostra esta configuração na opção b que pode ser considerada equivalente à malha c.

Uma vez resolvida a questão da realização prática de malhas de arame fino com corrente, podemos enfrentar a discussão das questões fisicamente relevantes. Então, se o campo magnético for uniforme, a força total não é de grande interesse. Mas obviamente as forças que atuam nas diversas partes do fio podem resultar num torque diferente de zero. Vamos calcular este torque para um caso especialmente simples. A figura 6.6.3 mostra uma espira retangular com lados de comprimentos a e b num campo magnético uniforme com uma orientação tal que dois lados do retângulo fiquem perpendiculares ao campo.

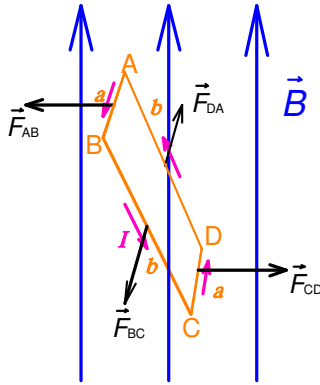
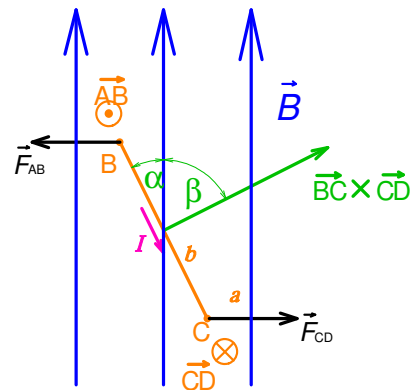


Fig. 6.6.3 Espira retangular num campo magnético uniforme. Os lados (AB) e (CD) estão postos ortogonais ao campo.

As forças sobre os lados (DA) e (BC) obviamente não causam torque. Para ver as contribuições de torque das forças sobre os lados (AB) e (CD) com mais facilidade, mostro a espira de lado de tal forma que o ponto A fique atrás do ponto B e o ponto D atrás do C.

Fig. 6.6.4 Vista lateral da configuração da figura 6.6.3. ↓

A figura 6.6.4 mostra ainda o ângulo α entre o plano da espira e a direção do campo magnético e o ângulo $\beta = 90^\circ - \alpha$ entre \vec{B} e $\vec{BC} \times \vec{CD}$. Podemos usar a fórmula (6.6.10) para calcular as forças \vec{F}_{AB} e \vec{F}_{CD} usando os vetores \vec{AB} e \vec{CD} no lugar de \vec{l} . Como os lados (AB) e (CD) estão perpendiculares ao campo, temos $|\vec{F}_{AB}| = |\vec{F}_{CD}| = a|\vec{IB}|$.



Para a contribuição da força \vec{F}_{AB} ao torque relativo ao

centro da espira, conta como alavanca $\frac{b}{2} \cos \alpha$. A força \vec{F}_{CD} contribui com o mesmo valor. Então obtemos para o módulo do torque $|\vec{\tau}| = a|\vec{IB}|b|\cos \alpha| = a|\vec{IB}|b|\sin \beta|$. Repare que ab é a área da espira e que o fator seno pode ser absorvido num produto vetorial do vetor superfície da espira $\vec{S} = \vec{BC} \times \vec{CD}$ e o valor do campo:

$$|\vec{\tau}| = |I(\vec{BC} \times \vec{CD}) \times \vec{B}| \quad (6.6.11)$$

Na figura 6.6.4 percebemos que o torque aponta na mesma direção e com o mesmo sentido do vetor \vec{AB} . Esta direção e este sentido são também as características direcionais do vetor $I(\vec{BC} \times \vec{CD}) \times \vec{B}$. Então podemos escrever o resultado de forma vetorial:

$$\vec{\tau} = I(\overline{BC} \times \overline{CD}) \times \vec{B} \quad (6.6.12)$$

Poderíamos ter chegado a este resultado de forma muito mais elegante, porém menos intuitiva, com os seguintes argumentos: primeiramente podemos usar uma origem na reta que contenha os pontos C e D, já que a força total na espira é nula e portanto o torque independe da origem. Com isto o torque se reduz à contribuição da força \vec{F}_{AB} :

$$\vec{\tau} = \overline{CB} \times \vec{F}_{AB} = \overline{CB} \times (I \overline{AB} \times \vec{B}) \quad (6.6.13)$$

Agora temos uma ótima oportunidade de praticar o cálculo com produtos vetoriais. Vamos usar a identidade de Jacobi (6.2.9):

$$\vec{\tau} = \overline{CB} \times (I \overline{AB} \times \vec{B}) = -I \vec{B} \times (\overline{CB} \times \overline{AB}) - I \overline{AB} \times (\vec{B} \times \overline{CB}) \quad (6.6.14)$$

Na figura 6.6.4 percebemos que os vetores $\vec{B} \times \overline{CB}$ e \overline{AB} são paralelos e consequentemente o último termo na (6.6.14) é nulo. Usando ainda a antissimetria do produto vetorial e $\overline{BC} = -\overline{CB}$ assim como $\overline{CD} = -\overline{DC}$, obtemos de novo o resultado (6.6.12).

Na fórmula do torque (6.6.12) há dois fatores: um que contém apenas características da espira de corrente e o outro é o valor do campo externo (isto é sem considerar possíveis contribuições geradas pela espira). Vamos introduzir um símbolo para o fator que contém as características da espira:

$$\vec{m} \stackrel{def.}{=} I(\overline{BC} \times \overline{CD}) \quad (6.6.15)$$

Com isto a fórmula do torque adquire uma forma muito parecida com a fórmula do torque de um dipolo elétrico num campo elétrico externo uniforme:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (6.6.16)$$

Por esta semelhança com o torque sobre um dipolo elétrico, vamos chamar uma pequena espira de corrente de *dipolo magnético*, e vamos chamar o vetor¹ \vec{m} de *vetor de dipolo magnético*. Coloquei o adjetivo “pequeno” junto com o substantivo espira de corrente. Como no caso do dipolo elétrico devemos considerar um caso limite. Mais tarde veremos que as espiras de corrente geram também um campo magnético e o caso de dipolo corresponde a uma aproximação do campo gerado que é válida numa distância grande da espira, sendo o significado de grande num sentido de comparação com o tamanho da espira. Os dipolos magnéticos têm um papel igualmente importante como os dipolos elétricos.

A analogia com os dipolos elétricos não se limita à fórmula do torque num campo uniforme. No apêndice desta seção mostro que um campo magnético não uniforme exerce uma força

$$\vec{F} = \text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad (6.6.17)$$

sobre um dipolo magnético \vec{m} . No exercício E 6.6.4 o leitor pode mostrar que esta força tem a mesma forma da força elétrica sobre um dipolo elétrico $(\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}$, ou seja, no caso $(\vec{m} \cdot \nabla) \vec{B}$, desde que valha a condição $\text{rot } \vec{B} = 0$.

¹ Na verdade este é um pseudovetor, (veja o exercício E 6.6.3).

A discussão feita aqui, como em outros livros de Física Básica, tem um defeito considerável. O defeito está na limitação à forma retangular da espira e a uma configuração geométrica muito especial (com dois dos lados do retângulo perpendiculares ao campo). Mas, no apêndice desta seção², mostro que o resultado pode ser generalizado para qualquer geometria da espira. Vale o seguinte resultado.

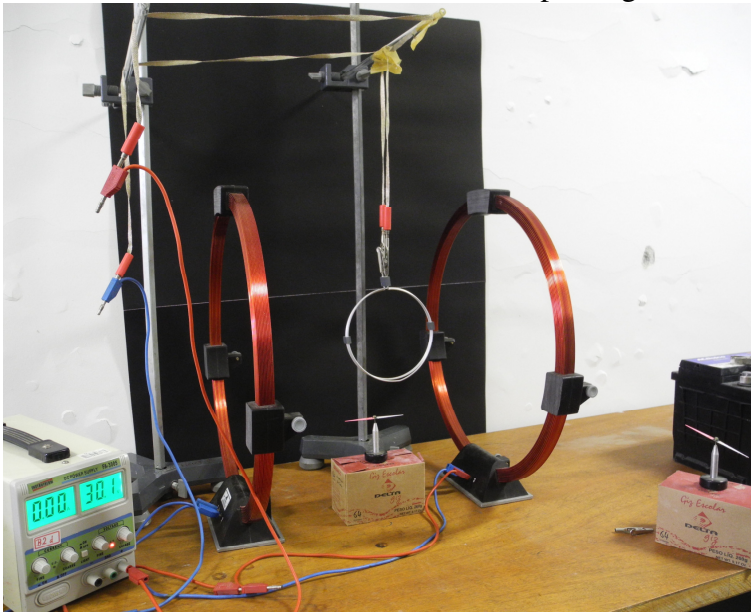
Teorema do dipolo magnético:

Seja S uma superfície orientável com beirada ∂S . Se colocarmos uma corrente I nesta beirada, esta espira de corrente sofre um torque num campo magnético externo uniforme \vec{B} que é dado por $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ com um vetor dipolo magnético \vec{m} dado por

$$\vec{m} = I \iint_S d\vec{S} \quad (6.6.18)$$

Nesta fórmula a orientação da superfície é tal que o sentido positivo da corrente forme com o vetor de superfície $\vec{S} \stackrel{\text{def.}}{=} \iint_S d\vec{S}$ um parafuso direito.

Vamos verificar o resultado experimentalmente com uma demonstração qualitativa. Ainda não discutimos como gerar um campo magnético uniforme. Tenho aqui um arranjo de bobinas que permite criar tal campo. No momento não precisamos entender como este arranjo funciona, mas com uma bússola podemos verificar que realmente existe um valor diferente de zero do campo magnético no espaço entre as duas argolas



douradas que aparecem na figura 6.6.5. Nesta região pendurei uma argola condutora ligada a dois fios condutivos e muito flexíveis que servem também para pendurar a argola. Na figura 6.6.6 mostro a situação com corrente injetada nesta argola enquanto na figura 6.6.5 não tinha corrente na argola. Nota-se claramente que o torque virou a argola.

Fig. 6.6.5 Entre duas argolas douradas foi criado um campo magnético não nulo. Duas

bússolas apoiadas em caixinhas de papelão pardo (uma no espaço entre as argolas e a outra na margem direita da imagem) apontam em direções diferentes. Sem o campo gerado no espaço entre as argolas, as bússolas apontariam na mesma direção, a saber, na direção do campo da Terra.

² Este apêndice se destina aos alunos com pretensões teóricas nas ciências quantitativas.

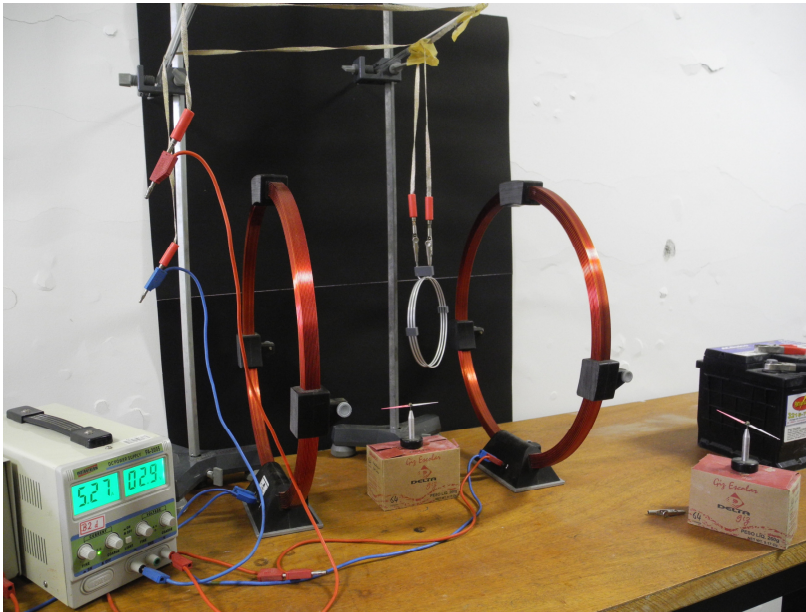


Fig. 6.6.6 Uma espira condutora (prateada), que já aparecia na figura 6.6.5, foi agora ligada numa fonte. O mostrador esquerdo da fonte indica uma corrente de 5,27 A. Na verdade flui o triplo disso na espira. A espira de corrente tem três voltas e aproveita a corrente de 5,27 A três vezes. Nota-se que o anel prateado girou em relação à orientação que tinha na figura 6.6.5.

Uma aplicação do torque sobre espiras de corrente num campo magnético é um tipo de

motor elétrico. Pode-se montar a espira num eixo de tal forma que o torque apareça neste eixo de rotação. O problema é que o torque não tem um valor constante. Na medida em que a espira gira e o vetor \vec{m} se torna paralelo ao vetor \vec{B} , o torque desaparece. Se a espira girasse além desta orientação, o torque até mudaria de sinal. Então uma simples espira de corrente num campo uniforme não giraria de forma contínua, mas oscilaria em volta da orientação $\vec{m} \parallel \vec{B}$.

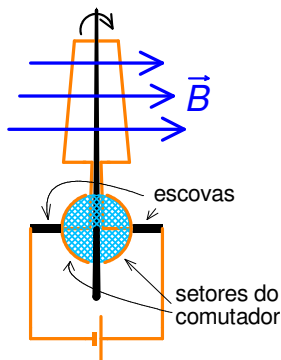


Fig. 6.6.7 Esquema de motor.

Um outro problema é a conexão elétrica de uma espira em rotação com uma fonte que geralmente não gira junto com o eixo do motor. Ambos os problemas podem ser resolvidos simultaneamente. Podemos ligar a espira de corrente na fonte através de contatos deslizantes, e as áreas de contato podem ter uma forma tal que a direção da corrente mude exatamente naquelas orientações da espira que correspondem a torques nulos. Os dois extremos da espira de corrente estão ligados a dois setores condutores. Cada um dos setores cobre um ângulo pouco menor que 180° de uma roda isolante montada no eixo do motor. A roda junto com os setores condutores se chama *comutador*. A figura 6.6.7 mostra o esquema deste tipo de motor. Dois blocos condutores de grafite (chamadas de *escovas*) ligadas numa fonte encostam-se nos setores do comutador e conectam a espira na fonte sempre com uma polaridade tal que o torque nunca mude de sinal. Esta construção consegue girar. Mas o torque deste motor seria pouco uniforme. A figura 6.6.8 mostra o torque em

função do ângulo entre vetor superfície da espira e o vetor \vec{B} .

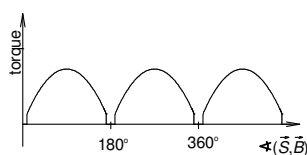


Fig. 6.6.8 Torque como função do ângulo entre vetor superfície e campo magnético. Os intervalos sem torque correspondem às orientações nas quais as escovas não se encostam nos setores.

Pode-se obter um torque mais uniforme usando várias espiras ligadas a setores menores, como indicado na figura 6.6.9 com um exemplo de três espiras ligadas num comutador com seis setores.

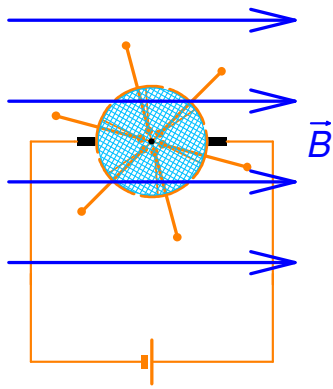


Fig. 6.6.9 Esquema de um motor com 3 espiras ligadas num comutador com 6 setores.

Exercícios:

E 6.6.1: Um anel circular de raio $R = 6$ cm leva uma corrente de 15 A e se encontra um campo magnético de 0,2 T. A normal do plano da espira faz um ângulo de 45° com a direção do campo. Calcule o módulo do torque que atua sobre a espira.

E 6.6.2: Num modelo (não muito correto) dos átomos, os elétrons são imaginados girando em torno do núcleo positivo como se fossem planetas girando em torno de um sol. Considere um elétron numa órbita circular girando com uma velocidade angular ω constante. Este elétron que gira constitui uma corrente e podemos tratar a órbita do elétron como uma espira de um minúsculo fio condutor que leva esta corrente. Esta espira possui um momento magnético. Deduza uma fórmula que relacione o momento magnético desta espira com o momento angular do elétron. Sabendo que o momento angular do elétron vale $\ell = 1,05 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$, calcule o momento magnético desta espira de corrente. (dados: massa do elétron = $9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$, carga do elétron = $-1,602 \times 10^{-19} \text{ As}$).

E 6.6.3: Mostre que o vetor dipolo magnético \vec{m} é na verdade um pseudovetor.

E 6.6.4: Mostre que a força $\vec{F} = \text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B})$ pode ser escrita como $(\vec{m} \cdot \nabla)\vec{B}$ desde que $\text{rot}\vec{B} = 0$.

E 6.6.5: Escreva os pontos essenciais desta seção.

Apêndice 6.6

Primeiramente vamos demonstrar o teorema do dipolo magnético. Seja S uma superfície orientada e $\vec{r}_{\partial S} : [0,1] \rightarrow \mathbb{V}$ uma descrição paramétrica da beirada ∂S desta superfície. Como é o costume, vamos supor a mesma convenção de orientação que se usa no teorema de Stokes, ou seja, a orientação da superfície deva formar com o sentido da curva ∂S (sentidos dos vetores tangentes) um parafuso direito. Vamos colocar um fio fino na curva ∂S e manter uma corrente I neste fio, com o sentido positivo de I coincidindo com o sentido dos vetores tangentes da curva. Num campo magnético uniforme esta espira de corrente recebe o torque

$$\vec{\tau} = \oint_{\partial S} \vec{r}_{\partial S} \times (I d\vec{r}_{\partial S} \times \vec{B}) = \int_0^1 \vec{r}_{\partial S}(\lambda) \times \left(I \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} \times \vec{B} \right) d\lambda \quad (6.6.19)$$

Com a regra do bacmenoscab podemos escrever esta expressão da seguinte forma:

$$\vec{\tau} = I \int_0^1 \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} (\vec{r}_{\partial S}(\lambda) \cdot \vec{B}) d\lambda - I \int_0^1 \vec{B} \left(\vec{r}_{\partial S}(\lambda) \cdot \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} \right) d\lambda \quad (6.6.20)$$

Como $\vec{B} = \text{const.}$, podemos tirar o fator \vec{B} da integral do segundo termo. O que sobra nesta integral do segundo termo é uma derivada

$$\int_0^1 \left(\vec{r}_{\partial S}(\lambda) \cdot \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} \right) d\lambda = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\vec{r}_{\partial S} \cdot \vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} d\lambda = \frac{1}{2} (\vec{r}_{\partial S}^2(1) - \vec{r}_{\partial S}^2(0)) \quad (6.6.21)$$

Mas, como a curva é fechada, temos $\vec{r}_{\partial S}^2(1) = \vec{r}_{\partial S}^2(0)$ e esta integral é simplesmente zero. Então obtemos para o torque

$$\vec{\tau} = I \int_0^1 \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} (\vec{r}_{\partial S}(\lambda) \cdot \vec{B}) d\lambda \quad (6.6.22)$$

Agora vamos aplicar a regra do bacmenoscab num outro produto vetorial duplo dos vetores $\vec{r}_{\partial S}$, $d\vec{r}_{\partial S}/d\lambda$ e \vec{B} :

$$\int_0^1 \vec{B} \times \left(\vec{r}_{\partial S} \times \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} \right) d\lambda = \int_0^1 \vec{r}_{\partial S} \left(\vec{B} \cdot \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} \right) d\lambda - \int_0^1 \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} (\vec{B} \cdot \vec{r}_{\partial S}) d\lambda \quad (6.6.23)$$

Na primeira integral do lado direito faremos uma integração por partes:

$$\int_0^1 \vec{r}_{\partial S} \left(\vec{B} \cdot \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} \right) d\lambda = \underbrace{\vec{r}_{\partial S}(\lambda) (\vec{B} \cdot \vec{r}_{\partial S}(\lambda)) \Big|_0^1}_{=0} - \int_0^1 \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} (\vec{B} \cdot \vec{r}_{\partial S}) d\lambda \quad (6.6.24)$$

O termo já integrado é zero porque se trata de uma curva fechada, $\vec{r}_{\partial S}(1) = \vec{r}_{\partial S}(0)$. Então temos

$$\int_0^1 \vec{B} \times \left(\vec{r}_{\partial S} \times \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} \right) d\lambda = -2 \int_0^1 \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} (\vec{B} \cdot \vec{r}_{\partial S}) d\lambda \quad (6.6.25)$$

Comparando com a (6.6.22) percebemos que

$$\vec{\tau} = \frac{I}{2} \left\{ \int_0^1 \left(\vec{r}_{\partial S} \times \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} \right) d\lambda \right\} \times \vec{B} \quad (6.6.26).$$

Então por enquanto mostramos que

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \int_0^1 \left(\vec{r}_{\partial S} \times \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} \right) d\lambda \quad (6.6.27).$$

Agora vamos escolher uma base ortonormal $\langle \hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3 \rangle$ e vamos calcular a componente número k do vetor \vec{m} nesta base:

$$m_k = \hat{b}_k \cdot \vec{m} = \frac{I}{2} \int_0^1 \hat{b}_k \cdot \left(\vec{r}_{\partial S} \times \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} \right) d\lambda \quad (6.6.28).$$

Neste produto triplo podemos trocar a ordem de fatores ciclicamente. Então obtemos

$$m_k = \frac{I}{2} \int_0^1 \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} \cdot (\hat{b}_k \times \vec{r}_{\partial S}) d\lambda \quad (6.6.29).$$

Isto é uma integral de linha comum (na qual um vetor é escalarmente multiplicado com o elemento de linha):

$$m_k = \frac{I}{2} \int_0^1 (\hat{b}_k \times \vec{r}_{\partial S}) \cdot \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} d\lambda = \frac{I}{2} \oint_{\partial S} (\hat{b}_k \times \vec{r}) \cdot d\vec{\ell} \quad (6.6.30).$$

Nesta integral de linha aplicamos o teorema de Stokes:

$$m_k = \frac{I}{2} \oint_{\partial S} (\hat{b}_k \times \vec{r}) \cdot d\vec{\ell} = \frac{I}{2} \iint_S \{ \text{rot}(\hat{b}_k \times \vec{r}) \} \cdot d\vec{S} \quad (6.6.31).$$

O rotacional pode ser calculado com a regra do bacmenoscab:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\hat{b}_k \times \vec{r}) &= \nabla \times (\hat{b}_k \times \vec{r}) = \\ &= \hat{b}_k \text{div} \vec{r} - (\hat{b}_k \cdot \nabla) \vec{r} = 3\hat{b}_k - \hat{b}_k = 2\hat{b}_k \end{aligned} \quad (6.6.32).$$

Então temos

$$m_k = I \hat{b}_k \cdot \iint_S d\vec{S} \quad (6.6.33).$$

Então se estas são as componentes, o vetor é

$$\vec{m} = I \iint_S d\vec{S} \quad (6.6.34).$$

Isto completa a demonstração do teorema.

Agora vamos estudar a força que um campo magnético não uniforme exerce sobre uma pequena espira de corrente. Com a (6.6.8) vale

$$\vec{F} = I \int_0^1 \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} \times \vec{B} d\lambda \quad (6.6.35)$$

A componente k deste vetor numa base ortonormal $\langle \hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3 \rangle$ é

$$F_k = \hat{b}_k \cdot I \int_0^1 \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} \times \vec{B} d\lambda \quad (6.6.36),$$

e com permutação cíclica dos fatores do produto triplo:

$$F_k = I \int_0^1 \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} \cdot (\vec{B} \times \hat{b}_k) d\lambda \quad (6.6.37).$$

Isto é uma integral de linha comum

$$F_k = I \int_0^1 (\vec{B} \times \hat{b}_k) \cdot \frac{d\vec{r}_{\partial S}}{d\lambda} d\lambda = I \oint_{\partial S} (\vec{B} \times \hat{b}_k) \cdot d\vec{\ell} \quad (6.6.38)$$

Nesta integral aplicamos o teorema de Stokes:

$$F_k = I \oint_{\partial S} (\vec{B} \times \hat{b}_k) \cdot d\vec{\ell} = I \iint_S \left\{ \text{rot}(\vec{B} \times \hat{b}_k) \right\} \cdot d\vec{S} \quad (6.6.39)$$

No cálculo do rotacional usamos a regra do bacmenoscab:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{B} \times \hat{b}_k) &= \nabla \times (\vec{B} \times \hat{b}_k) = \\ &= (\hat{b}_k \cdot \nabla) \vec{B} - \hat{b}_k \text{div} \vec{B} \end{aligned} \quad (6.6.40)$$

No capítulo 7 veremos que a divergência do campo \vec{B} é sempre zero. Então sobra

$$F_k = I \iint_S \left\{ (\hat{b}_k \cdot \nabla) \vec{B} \right\} \cdot d\vec{S} \quad (6.6.41)$$

Agora faremos a mesma aproximação que tinha sido feita no caso do dipolo elétrico num campo elétrico não uniforme. Naquela ocasião desenvolvemos o campo elétrico numa série de Taylor até os termos de primeira ordem numa pequena vizinhança do dipolo. Fazendo a mesma coisa aqui com o campo magnético significa que vamos considerar as derivadas do campo magnético na vizinhança da espira como constantes. Então estas derivadas podem ser tiradas da integral. Desta forma sobra

$$F_k = \left\{ (\hat{b}_k \cdot \nabla) \vec{B} \right\} \cdot I \iint_S d\vec{S} = \left\{ (\hat{b}_k \cdot \nabla) \vec{B} \right\} \cdot \vec{m} \quad (6.6.42)$$

Com estas componentes da força o próprio vetor de força é

$$\vec{F} = \text{grad}(\vec{B} \cdot \vec{m}) \quad (6.6.43)$$