

7.5 Aplicações da lei de Ampère para distribuições de corrente com simetria

De forma muito semelhante do uso de simetria com a lei de Gauss, pode-se determinar o campo magnético gerado por uma distribuição de densidade de corrente altamente simétrica usando a lei de Ampère. Começaremos com um exemplo com simetria cilíndrica.

Suponha que exista no espaço uma densidade estacionária de corrente que, em coordenadas cilíndricas, aponte para a direção z e que dependa apenas da coordenada radial:

$$\vec{j}(\boldsymbol{r}) = j(r)\hat{z} \quad (7.5.1)$$

Um exemplo desta situação seria uma corrente fluindo num arame cilíndrico infinitamente comprido com uma densidade de corrente uniforme dentro do arame. Neste caso, a função $j(r)$ teria um valor constante para raios r menores do que o raio do fio e teria o valor zero para raios r maiores. Mas podemos também pensar em funções mais sofisticadas.

O grupo de operações de simetria desta configuração é um pouco menor do que o grupo de simetria do cilindro uniformemente carregado, que estudamos na eletrostática. Temos as rotações em volta do eixo z , as translações na direção z e planos especulares que contêm o eixo z . Mas em contraste com o caso da eletrostática, os planos especulares perpendiculares ao eixo z não representam simetrias, pois uma reflexão neste tipo de plano iria inverter o sentido da corrente.

Vamos escrever o campo magnético usando as coordenadas cilíndricas expressando o valor do campo $\vec{B}(r, \varphi, z)$ na base associada $\langle \hat{r}(\varphi), \hat{\varphi}(\varphi), \hat{z} \rangle$.

$$\vec{B}(r, \varphi, z) = B_r(r, \varphi, z)\hat{r}(\varphi) + B_\varphi(r, \varphi, z)\hat{\varphi}(\varphi) + B_z(r, \varphi, z)\hat{z} \quad (7.5.2)$$

Fizemos algo análogo com o campo elétrico na eletrostática. Naquela ocasião argumentamos que as componentes φ e z do campo tinham que ser zero por causa de simetrias especulares. Mas curiosamente aqui a conclusão que se pode tirar da simetria especular é diferente. Isto se deve ao fato de que o campo magnético é um campo pseudovetorial.

Imagine um dado ponto P com valores de coordenadas $r \neq 0$, φ e z . A reflexão no plano que contém o ponto P e o eixo de coordenadas z é uma operação de simetria da configuração. Esta operação mapeia o ponto P em si mesmo; $P \mapsto P$. Consequentemente o vetor $\vec{B}(r, \varphi, z)$ não deve sofrer nenhuma alteração nesta reflexão. Na seção 6.3 vimos que pseudovetores paralelos ao plano especular sofrem uma troca de sinal na reflexão neste plano, enquanto pseudovetores perpendiculares ficam inalterados. Consequentemente, concluímos que aqui as componentes B_r e B_z são necessariamente zero. Repare que precisamos aqui somente de um plano especular para eliminar logo duas componentes de \vec{B} . Com o vetor \vec{E} precisamos de dois planos para mostrar que duas componentes eram nulas. Então com este argumento de simetria especular chegamos ao resultado de que o campo magnético deve ter a forma

$$\vec{B}(r, \varphi, z) = B_\varphi(r, \varphi, z)\hat{\varphi}(\varphi) \quad (7.5.3).$$

Agora podemos invocar a simetria de rotação e de translação e escrever

$$\vec{B}(\boldsymbol{r}, \varphi, z) = B_\varphi(\boldsymbol{r}) \hat{\phi}(\varphi) \quad (7.5.4).$$

Então a simetria reduz a tarefa de calcular o campo à determinação de uma única função, a saber, a função $B_\varphi(\boldsymbol{r})$. Na aplicação da lei de Gauss tivemos que escolher neste ponto uma superfície Gaussiana apropriada. Aqui temos que escolher um caminho fechado apropriado. Estes caminhos fechados usados na lei de Ampère são também chamados de *espiras amperianas*. Como no caso da lei de Gauss, a escolha tem que ser uma que permita calcular a integral mesmo não conhecendo a função incógnita. Aqui a escolha apropriada da espira amperiana é bem óbvia. Para obter informação acerca do valor $B_\varphi(\boldsymbol{r})$, vamos escolher um círculo de raio \boldsymbol{r} no plano xy e com centro no eixo z . Neste caso temos

$$\oint_{\text{círculo}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \underbrace{B_\varphi(\boldsymbol{r})}_{=const.} \underbrace{\hat{\phi}(\varphi) \cdot \hat{\phi}(\varphi)}_{=1} \boldsymbol{r} d\varphi = B_\varphi(\boldsymbol{r}) 2\pi \boldsymbol{r} \quad (7.5.5).$$

Agora podemos aplicar a lei de Ampère neste resultado:

$$B_\varphi(\boldsymbol{r}) 2\pi \boldsymbol{r} = \mu_0 \iint_{\text{círculo}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\boldsymbol{r}'=0}^{\boldsymbol{r}} j(\boldsymbol{r}') \underbrace{\hat{z} \cdot \hat{z}}_{=1} \boldsymbol{r}' d\boldsymbol{r}' d\varphi' \quad (7.5.6)$$

Então temos o resultado

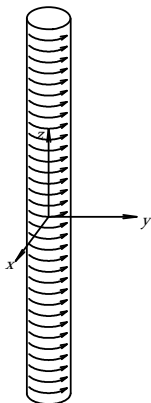
$$\vec{B}(\boldsymbol{r}, \varphi, z) = \hat{\phi}(\varphi) \frac{\mu_0}{\boldsymbol{r}} \int_0^{\boldsymbol{r}} j(\boldsymbol{r}') \boldsymbol{r}' d\boldsymbol{r}' \quad (7.5.7)$$

Resta somente o cálculo da integral para cada dada função $j(\cdot)$. Como exemplo, consideramos o caso do fio cilíndrico de raio R que transporta uma corrente I com densidade de corrente uniforme. Neste caso temos

$$j(\boldsymbol{r}') = \begin{cases} I/\pi R^2 & \text{para } \boldsymbol{r}' \leq R \\ 0 & \text{para } \boldsymbol{r}' > R \end{cases} \quad (7.5.8)$$

Inserindo esta distribuição no resultado (7.5.7) obtemos

$$\vec{B}(\boldsymbol{r}, \varphi, z) = \hat{\phi}(\varphi) \frac{\mu_0}{2\pi \boldsymbol{r}} \begin{cases} I \left(\frac{\boldsymbol{r}}{R}\right)^2 & \text{para } \boldsymbol{r} \leq R \\ I & \text{para } \boldsymbol{r} > R \end{cases} \quad (7.5.9)$$



Percebemos que o campo cresce linearmente com \boldsymbol{r} dentro do fio e fora do fio ele coincide com o campo de um fio fino que calculamos antes com a lei de Biot-Savart.

O próximo exemplo é uma corrente superficial circulando na superfície de um tubo infinitamente comprido como indicado na figura 7.5.1. Na realidade esta corrente flui numa camada de espessura não nula. Mas para fins de simplificação podemos imaginar uma camada infinitamente fina e descrever este tipo de corrente como corrente superficial com uma densidade linear de corrente Λ . Isto significa que num segmento do tubo de comprimento c circula uma corrente de Λc . Na prática este tipo de

configuração se realizaria de forma aproximada com um solenoide comprido. No caso do solenoide, a densidade linear de corrente seria a corrente I , que se injetou no arame enrolado, multiplicado pela densidade linear n das espiras; $\Lambda = nI$. Para o caso de tubo circular já calculamos o campo magnético para pontos no eixo de simetria. Com a lei de Biot-Savart encontramos na seção 2.7.2 o resultado

$$\text{solenóide infinitamente comprido} \quad \vec{B}(0,0,z) = \hat{z} \mu_0 n I \quad (7.5.10)$$

Agora podemos generalizar este resultado com a ajuda da lei de Ampère e podemos calcular o campo para pontos fora do eixo de simetria.

O primeiro passo é a aplicação da simetria do problema. Obviamente esta configuração de corrente tem simetria especular para planos perpendiculares ao eixo z . Com uma realização da configuração com um solenoide, esta simetria existe apenas de forma aproximada, pois a imagem especular de uma espira resulta numa espira de quiralidade oposta como mostra a figura 7.6.2

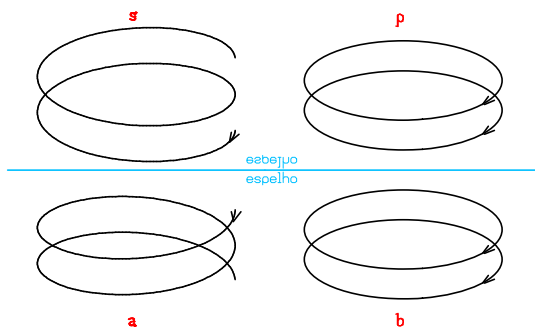


Fig. 7.5.2 Espelhamento de corrente (a) num fio de solenóide e (b) num tubo ideal com corrente superficial circulando em volta do tubo.

Mas vamos aceitar esta simetria especular mesmo no caso de um solenoide assumindo um fio muito fino de tal forma que o avanço das espiras possa ser desprezado. O campo magnético gerado deve ter a mesma simetria. Então as componentes x e y deste pseudovetor, que mudariam de sinal nesta operação especular, têm que ser nulas.

Então o campo magnético deve ter a forma

$$\vec{B}(x,y,z) = \hat{z} B(x,y,z) \quad (7.5.11)$$

Além disso, a configuração de correntes tem simetria de translação na direção z . Consequentemente nada pode depender de z . Então temos

$$\vec{B}(x,y) = \hat{z} B(x,y) \quad (7.5.12)$$

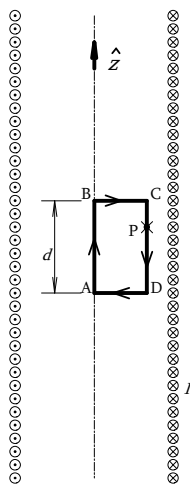


Fig. 7.5.3 Corte do cilindro de correntes com espira amperiana dentro do cilindro. O lado AB da espira retangular fica no eixo de simetria do cilindro.

Primeiramente vamos considerar um ponto P dentro do solenoide. A figura 7.5.3 mostra um corte do tubo que contém o ponto P e o eixo de simetria do tubo. Uma espira amperiana retangular que passa pelo ponto P está desenhada. O lado AB de comprimento d fica no eixo de simetria do cilindro, o ponto P está no segmento de reta CD. A corrente está indicada com flechas entrando no plano do desenho no lado direito e saindo do desenho no lado esquerdo.

No caminho A até B conhecemos o campo pelo cálculo com a lei de Biot-Savart. Os caminhos de B até C e de D até A não contribuem porque os deslocamentos da integração são perpendiculares ao vetor \vec{B} . Como o campo não depende de z as integrais se reduzem a simples multiplicações. Então temos

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 n I d + B(x, y) \hat{z} \cdot (-\hat{z} d) \quad (7.5.13)$$

Esta integral deve ser igual à corrente que atravessa a espira amperiana multiplicada por μ_0 . Mas obviamente não há corrente nenhuma que atravessa esta espira. Então segue

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 n I d + B(x, y) \hat{z} \cdot (-\hat{z} d) = 0 \quad (7.5.14)$$

(P dentro do tubo)

Desta igualdade obtemos o valor da componente z do campo para um ponto genérico dentro do tubo:

$$B(x, y) = \mu_0 n I \quad (\text{P dentro do tubo}) \quad (7.5.15)$$

Agora vamos fazer a mesma análise para um ponto fora do cilindro. A figura 7.5.4 mostra a correspondente espira amperiana que agora atravessa a parede do cilindro.

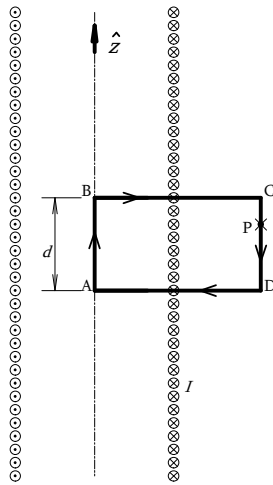


Fig. 7.5.4 Corte do cilindro de correntes com espira amperiana que atravessa a parede do cilindro.

A expressão da integral de caminho em termos dos valores do campo é exatamente a mesma do caso anterior. O que muda é o valor da corrente que atravessa a espira. Este é Λd . conseqüentemente temos

$$\oint_{ABCD} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 n I d + B(x, y) \hat{z} \cdot (-\hat{z} d) = \mu_0 n I d \quad (7.5.16)$$

(P fora do tubo)

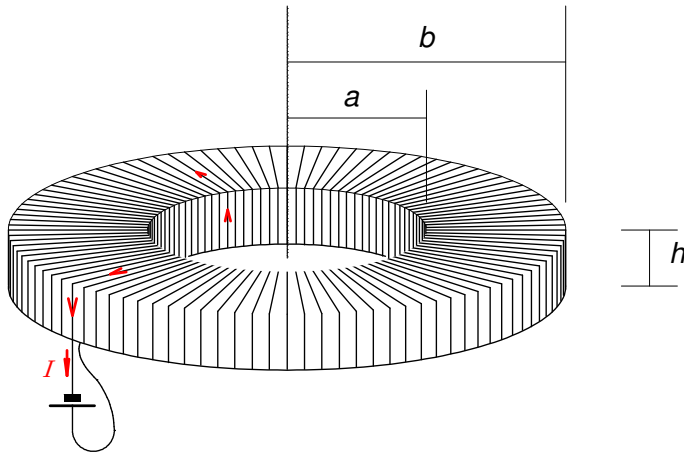
Então para pontos fora do cilindro segue $B(x, y) = 0$. Podemos juntar estes resultados e escrever o campo magnético de forma completa incluindo o vetor unitário:

$$\vec{B}(x, y) = \begin{cases} \hat{z} \mu_0 n I & (\text{P dentro do tubo}) \\ 0 & (\text{P fora do tubo}) \end{cases} \quad (7.5.17)$$

Este é um resultado importante. Aprendemos uma maneira de criar, pelo menos aproximadamente, um volume com campo magnético constante. Dentro de um solenoide muito comprido na região longe das beiradas do enrolamento, esperamos encontrar um campo magnético uniforme. Além disso, o valor do mesmo é descrito por uma fórmula muito simples.

Por último consideraremos uma corrente que flui na superfície de um toroide. Um toroide é uma forma geométrica volumar finita com simetria de rotação com um dado eixo de rotação e simetria de reflexão com planos contendo este eixo e que possui um buraco no lugar do eixo, isto é, algum cilindro infinitamente comprido, cujo eixo de simetria coincide com o eixo de simetria do toroide, não pertence ao toroide. É fácil produzir um toroide: pegue um disco circular e abra um furo no centro do disco. Pneus e certos tipos de bolos em forma de rosca são exemplos de toroides. Vamos considerar uma corrente na superfície de um toroide que possua a mesma simetria do toroide.

Na prática pode-se realizar esta configuração de forma aproximada injetando uma corrente I num fio densamente enrolado no toroide como mostra a figura 7.5.5. Na figura o enrolamento não é muito denso para poder ver os fios individualmente. A figura 7.5.6 mostra uma fotografia deste tipo de solenoide toroidal. Esta configuração de solenoide tem propriedades interessantes e a indústria fabrica tais solenoides apesar do fato de que o processo de enrolar tal tipo de bobina é muito mais oneroso do que o enrolar de um solenoide cilíndrico. Para enrolar uma bobina cilíndrica basta rodar o cilindro na frente do carretel de fio com uma extremidade do fio preso na superfície do cilindro. Para enrolar um solenoide toroidal, tem-se que passar o carretel de fio



inúmeras vezes através do buraco central do toroide. Mesmo assim a indústria enfrenta esta dificuldade porque as propriedades deste tipo de solenoide têm grandes vantagens. Se você abrir uma fonte de alimentação de um computador de mesa, você encontrará dentro dela algumas bobinas deste tipo.

Fig. 7.5.5 Esboço de uma bobina toroidal com algumas indicações da corrente marcadas com setas vermelhas.

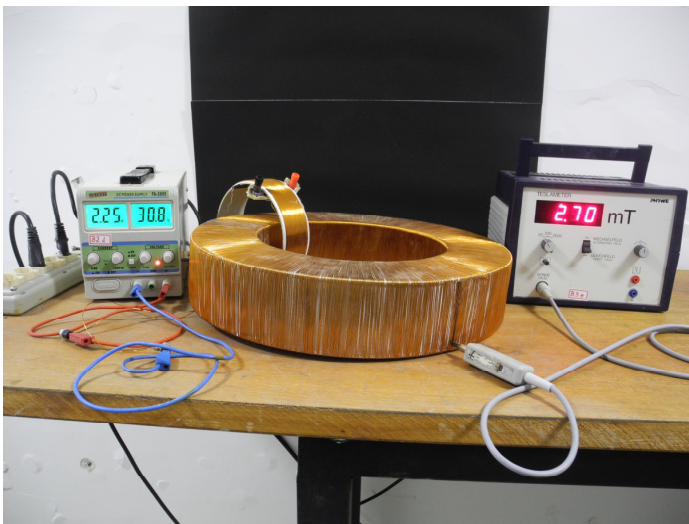


Fig. 7.5.6 Fotografia de uma bobina toroidal ligada numa fonte que injeta 2,25 A no enrolamento da bobina. Uma sonda Hall foi introduzida no interior da bobina através de uma fenda. O leitor deve ignorar uma segunda bobina cilíndrica que aparece na imagem. Esta será usada numa futura experiência.

No caso de uma densidade superficial de corrente ou no caso de um enrolamento infinitamente denso e uniforme a corrente teria uma perfeita simetria de rotação e de espelhamentos em planos contendo o eixo de simetria rotacional. Com os mesmos argumentos usados no caso do fio infinito concluímos que estes elementos de simetria especular excluem componentes x e z do campo:

$$\vec{B}(\boldsymbol{\rho}, \varphi, z) = B_{\varphi}(\boldsymbol{\rho}, \varphi, z) \hat{\varphi}(\varphi) \quad (7.5.18)$$

Nesta fórmula o sistema de coordenadas cilíndricas usa o eixo de simetria rotacional do toroide como eixo z . A simetria de rotação implica que a função $B_{\varphi}(\boldsymbol{\rho}, \varphi, z)$ não pode

dependem de φ . Mas, diferentemente do caso do fio infinito, aqui não temos simetria de translação e esta função pode depender de z . Então temos

$$\vec{B}(\boldsymbol{r}, \varphi, z) = B_\varphi(\boldsymbol{r}, z) \hat{\varphi}(\varphi) \quad (7.5.19)$$

Resta determinar a função incógnita $B_\varphi(\boldsymbol{r}, z)$. Esta tarefa é resolvida com a lei de Ampère. Para conhecer o valor de $B_\varphi(\boldsymbol{r}, z)$, usaremos como espira amperiana o círculo de raio \boldsymbol{r} que fica na altura z . A integral de linha vale

$$\oint_{\text{círculo}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \underbrace{B_\varphi(\boldsymbol{r}, z)}_{=const.} \underbrace{\hat{\varphi}(\varphi) \cdot \hat{\varphi}(\varphi)}_{=1} \boldsymbol{r} d\varphi = B_\varphi(\boldsymbol{r}, z) 2\pi \boldsymbol{r} \quad (7.5.20)$$

Com a lei de Ampère sabemos que a expressão $B_\varphi(\boldsymbol{r}, z) 2\pi \boldsymbol{r}$ é igual a μ_0 vezes a corrente que atravessa o círculo de integração. Este valor da corrente depende do par de valores de \boldsymbol{r}, z . Se o ponto considerado ficar fora do toróide a corrente que atravessa o círculo de integração é zero. Se o caminho de integração ficar dentro do toróide, este

valor da corrente é o valor que passa nos fios que sobem na “chaminé” central do toróide. Se temos N espiras enroladas no toróide e se o fio transporta uma corrente I , a corrente que entra na contabilidade da lei de Ampère é NI .

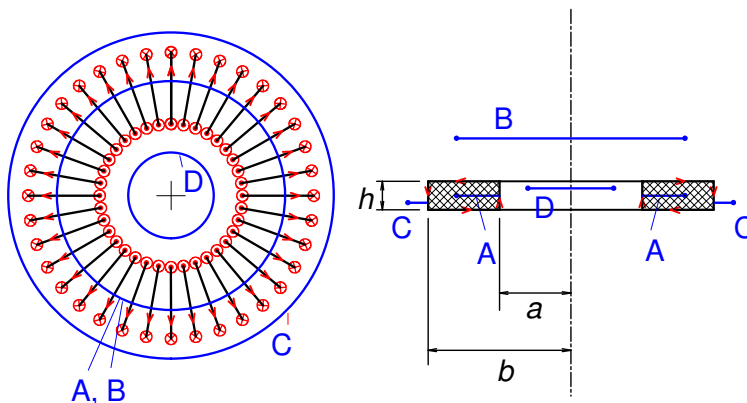


Fig. 7.5.7 Bobina toroidal vista de cima (imagem da esquerda) e em corte lateral (imagem da direita). Quatro espiras amperianas circulares

(A-D) são representadas em azul. Apenas a espira A fica dentro do toróide e tem corrente passando pela superfície associada ao caminho de integração. O interior do toróide é mostrado hachurado no corte.

A figura 7.5.7 mostra uma bobina toroidal com quatro linhas de integração. A linha A é a única que fica dentro do toróide. Para círculos de integração no interior (como o exemplo A), $B_\varphi(\boldsymbol{r}, z) 2\pi \boldsymbol{r}$ vale $\mu_0 NI$. Para círculos externos (exemplos B, C e D) temos $B_\varphi(\boldsymbol{r}, z) 2\pi \boldsymbol{r} = 0$. Então podemos concluir que

$$\vec{B}(\boldsymbol{r}, \varphi, z) = \begin{cases} \hat{\varphi}(\varphi) \frac{\mu_0 NI}{2\pi \boldsymbol{r}} & \text{para pontos dentro do toróide} \\ 0 & \text{para pontos fora do toróide} \end{cases} \quad (7.5.21)$$

As figuras 7.5.6, 7.5.8 e 7.5.9 mostram medidas do campo magnético. Na figura 7.5.8 a sonda Hall está numa posição com coordenada radial um pouco maior que na figura 7.5.6. Correspondentemente temos um campo mais intenso na figura 7.5.6 de acordo com a fórmula (7.5.21) que prevê uma dependência decrescente com \boldsymbol{r} . Fora do toróide se mede de fato o valor zero como é previsto pelo resultado (7.5.21).

Este valor nulo fora do toroide é justamente o ponto que torna esta configuração interessante para a indústria de eletrônica. Veremos num capítulo futuro que é interessante criar campo magnético não nulo em determinados dispositivos. Mas este campo poderia perturbar circuitos eletrônicos na vizinhança. Com a configuração toroidal o campo não nulo pode ser essencialmente limitado a um volume bem definido. Falei *essencialmente*, pois futuramente veremos que correntes não estacionárias numa bobina toroidal geram de fato também perturbação fora do toroide, mas em menor intensidade.

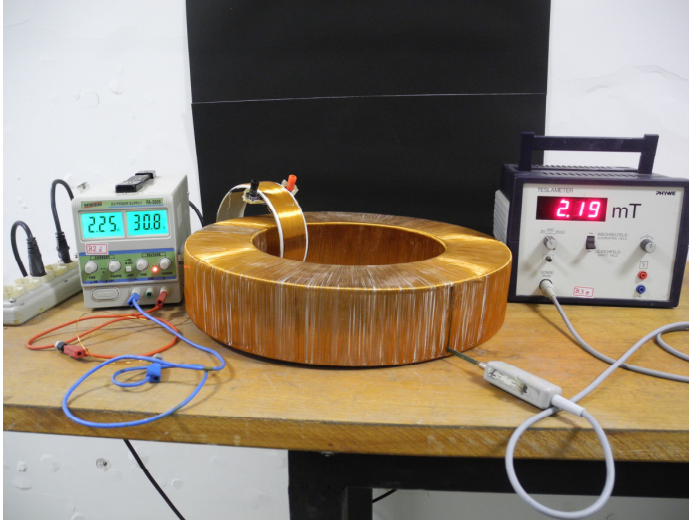


Fig. 7.5.8 Medida do campo magnético numa posição no interior perto da borda externa do toroide.

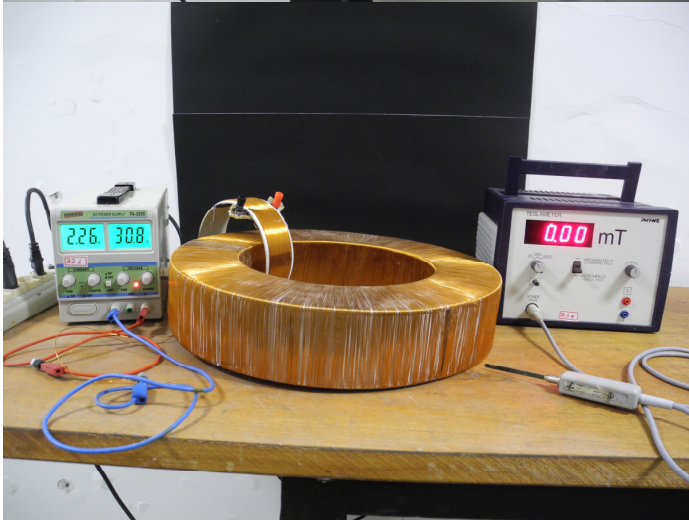


Fig. 7.5.9 Medida do campo magnético num ponto externo da bobina toroidal.

É interessante comparar o resultado da bobina toroidal com aquele do solenoide cilíndrico. Na figura 7.5.5 assumimos um perfil retangular do corpo toroidal com um raio da “chaminé” interna a e um raio externo b e uma altura h . Se mandarmos a e N para infinito mantendo $b-a$ constante e também N/a constante, obtemos um resultado que se parece com a fórmula do campo do solenoide infinitamente comprido. Para qualquer valor de ϵ entre a e b temos no limite

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{N}{2\pi\epsilon} = n = \text{densidade de espiras} \quad (7.5.22)$$

Com isto a fórmula do campo dentro do toroide se transforma na fórmula do campo dentro do solenoide cilíndrico infinitamente comprido. Isto era de se esperar. Note, no entanto, que o perfil da bobina não precisa ser redondo como supusemos com o nosso cálculo do cilindro. Então ganhamos através deste limite logo uma generalização do resultado para cilindros não redondos.

Exercícios:

E 7.5.1: Use argumentos de simetria e a lei de Ampère para calcular o campo magnético gerado pela densidade de corrente

$$\vec{j}(x, y) = \hat{z} j_0 \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2a^2}\right\} \quad (7.5.23)$$

Nesta fórmula x, y e z são coordenadas cartesianas, a é uma distância positiva e j_0 uma constante medida em ampère por metro quadrado.

E 7.5.2: Use argumentos de simetria e a lei de Ampère para calcular o campo magnético gerado pela densidade de corrente

$$\vec{j}(z) = \hat{x} j(z) \quad (7.5.24)$$

com uma função par (isto é uma função que satisfaz $j(z) = j(-z)$ para todo z).

E 7.5.3: Seja $\langle \boldsymbol{\rho}, \varphi, z \rangle$ um sistema de coordenadas cilíndricas e sejam $\hat{\boldsymbol{\rho}}(\varphi)$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi)$ e \hat{z} os vetores básicos associados a este sistema. Considere uma densidade de corrente da seguinte forma:

$$\vec{j}(\boldsymbol{\rho}, \varphi, z) = \hat{\boldsymbol{\rho}}(\varphi) j_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}, z) + \hat{z} j_z(\boldsymbol{\rho}, z) \quad (7.5.25)$$

(a) Use argumentos de simetria e o fato de que os valores do campo magnético são pseudovetores, para determinar quais das componentes do campo magnético na base $\langle \hat{\boldsymbol{\rho}}(\varphi), \hat{\boldsymbol{\varphi}}(\varphi), \hat{z} \rangle$ são nulos.

(b) Suponha que no plano xy vale

$$j_{\boldsymbol{\rho}}(\boldsymbol{\rho}, 0) = 0 \quad \text{e} \quad j_z(\boldsymbol{\rho}, 0) = \begin{cases} \frac{A}{\boldsymbol{\rho}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{R} \boldsymbol{\rho}\right) & \text{para } \boldsymbol{\rho} \leq R \\ 0 & \text{para } \boldsymbol{\rho} > R \end{cases}$$

Nesta fórmula A e R são constantes positivas. Calcule o campo magnético no plano xy .

E 7.5.4: Argumentos de simetria permitem às vezes tirar conclusões exatas mesmo sem ter conhecimento dos detalhes de uma teoria. Não aprendemos ainda como funciona a geração de campo magnético em situações não estacionárias. Mas mesmo assim, o leitor pode usar argumentos de simetria e determinar o campo magnético gerado pelo seguinte tipo de densidade de corrente não estacionária:

$$\vec{j}(r, \theta, \varphi, t) = j(r, t) \hat{\boldsymbol{r}}(\theta, \varphi) \quad (7.5.26).$$

Nesta fórmula r, θ, φ são coordenadas esféricas. Quanto vale $\vec{B}(r, \theta, \varphi)$?

E 7.5.5: Escreva os pontos de destaque desta seção.