

8.1 A lei de indução de Faraday

Michael Faraday inventou uma lâmpada de segurança para mineração, conseguiu liquefazer o gás cloro e mais oito outros gases, descobriu que existe para cada gás uma temperatura crítica acima da qual o gás não pode ser liquefeito, descobriu o benzeno, introduziu o conceito de campo na física, descobriu a constante dielétrica, descobriu as leis que regem a eletrólise, inventou o primeiro motor elétrico, descobriu que o plano de polarização de luz pode ser girado dentro de um vidro na presença de campo magnético e inventou uma porção de vidros especiais. Mas, como se tudo isto não bastasse, ele ainda descobriu uma das duas leis básicas que regem os fenômenos não estacionários do eletromagnetismo: a lei de indução eletromagnética¹. Como veremos nesta e na próxima seção, se trata no fundo de dois efeitos distintos que se unem magicamente numa única expressão matemática. De forma independente, a indução eletromagnética foi também descoberta um pouco mais tarde por Joseph Henry².

Vamos redescobrir os fenômenos de indução eletromagnética aqui com uma série de experiências. Começaremos com um efeito que poderíamos prever perfeitamente com os nossos conhecimentos. Se movermos um fio condutor numa região do espaço com campo magnético não nulo, atuam forças sobre as partículas carregadas existentes neste condutor. Os íons positivos da rede cristalina têm posições fixas em relação à forma geométrica do fio condutor e não serão movidos por estas forças. Mas os elétrons de condução podem sair do lugar, e se espera que a força magnética provoque um deslocamento destes elétrons. Se mantivermos o fio perpendicular ao vetor \vec{B} e o movermos numa direção perpendicular ao fio e ao vetor \vec{B} , a força magnética deve empurrar os elétrons na mesma direção do eixo do fio como mostra a figura 8.1.1 esquematicamente.

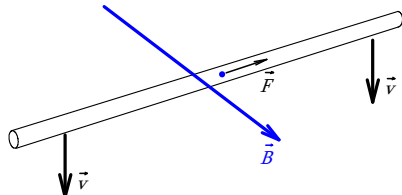
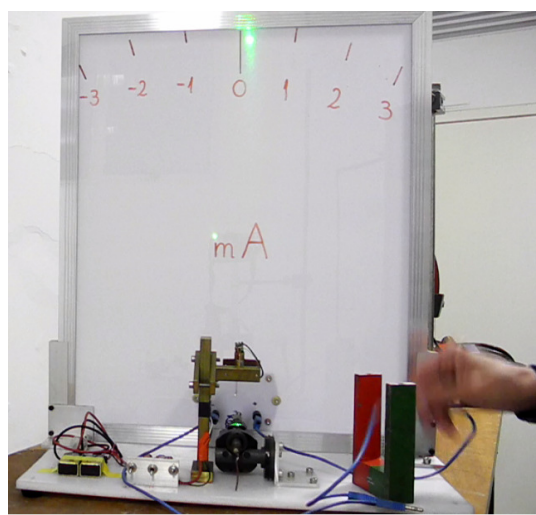


Fig. 8.1.1 Força atuando num elétron num fio que se move num campo magnético.

Então deve aparecer uma corrente neste fio. Na figura 8.1.2 mostro um quadro de uma

filmagem de uma experiência. Pela forma borrada da imagem do fio e da mão que segura este fio pode-se ver que este está em movimento. Ele está ligado num amperímetro, e a parte que apresenta o rápido movimento se encontra perto dos polos de um ímã. Realmente aparece uma pequena corrente no amperímetro indicada pelo feixe verde de luz. Mas o valor desta corrente é pequeno.

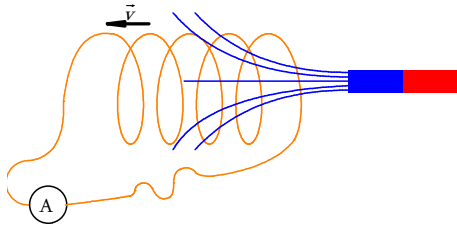
Fig. 8.1.2 Corrente provocada pelo movimento de um fio condutor entre os polos de um ímã. A mão que segura o fio e a parte do fio com maior movimento aparecem borradas na imagem.



¹ Experimental Researches in Electricity Michael Faraday Phil. Trans. R. Soc. Lond. 1832 122, 125-162, published 1 January 1832.

² Joseph Henry (17/12/1797 – 13/05/1878).

Podemos aumentar o valor da corrente aproveitando o fio diversas vezes. Se movermos uma bobina densamente enrolada na frente de uma barra imantada, devemos ver este efeito de forma amplificada. A figura 8.1.2 mostra esta versão da experiência esquematicamente, e a figura 8.1.3 mostra um quadro de uma filmagem. De novo o movimento é visível através de um borrão. No caso, os dois pinos banana encaixados na bobina permitem visualizar que a bobina está em movimento. Percebe-se que a corrente tem agora um valor bem maior do que na experiência que usava apenas um fio isoladamente.



imantada.

Fig. 8.1.3 Esquema de uma experiência de geração de corrente pelo movimento de uma bobina perto de uma barra

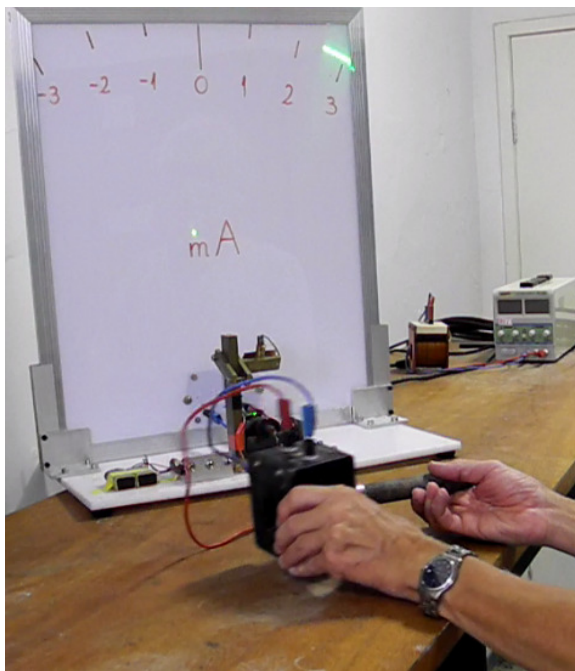


Fig. 8.1.4 Quadro de uma filmagem da geração de corrente pelo movimento de uma bobina perto de um ímã. Pelo aspecto borrado das imagens dos pinos banana que entram nos borns da bobina se percebe que a bobina está em movimento. A corrente indicada pelo amperímetro é bem maior do que aquela da experiência com um fio solitário.

Descobrimos com este efeito uma nova forma de força eletromotriz ou de eletromotância. De fato aqui o nome de força eletromotriz não está errado, pois neste caso a corrente é realmente provocada por uma força no sentido da segunda lei de Newton, a saber, pela força magnética. O fenômeno tem importantes aplicações. A conversão de energia mecânica em energia elétrica em praticamente todas as usinas de

eletricidade é feita com a ajuda deste fenômeno.

Apesar da enorme importância das aplicações deste efeito, não vamos nos deter mais na questão da conversão de energia mecânica em elétrica. Há muitas outras surpresas no nosso caminho.

Há um detalhe curioso neste efeito: imaginem uma formiguinha inteligente agarrada nas espiras da bobina. Ela vê que um ímã se aproxima da bobina e que o amperímetro indica uma corrente. Mas do ponto de vista da formiga o cobre das espiras da bobina está perfeitamente parado no espaço. Então para o observador associado ao referencial da bobina não há força magnética alguma, pois para ele os elétrons do fio de cobre estão parados no espaço deste referencial. Percebemos neste instante que os conceitos de campos elétrico e magnético que definimos durante nossa jornada dependem do referencial. Num referencial no qual uma barra imantada está em movimento, a barra produz não apenas um campo magnético, mas também um campo elétrico. Veremos se estas considerações correspondem à realidade. Eu vou agora manter a bobina parada, apoiada na mesa e vou mover o ímã. A figura 8.1.5 mostra esta experiência. De fato, o movimento do ímã realmente provoca uma corrente no circuito.

Fig. 8.1.5 Corrente gerada pelo movimento de um ímã perto de uma bobina.

O fato de que a distinção de campos elétrico e magnético depende do referencial nos confunde neste momento. Até agora usamos sempre o referencial do laboratório para definir espaço físico. Não pretendo investigar esta questão neste momento. O lugar apropriado para se discutir esta questão é a teoria da relatividade. Podemos escapar desta polêmica tirando os movimentos completamente das experiências.

Vejam: o movimento do ímã cria nas posições das espiras da bobina um campo magnético variável no tempo. Que tal experimentar se a mera variação do campo magnético sem movimento de um ímã seria também capaz de gerar uma corrente elétrica? Podemos gerar um campo magnético com corrente numa outra bobina e podemos variar a intensidade desta corrente. A figura 8.1.6 mostra esta experiência. Ao lado da bobina que está conectada ao amperímetro está uma outra bobina ligada na fonte regulável. A minha mão direita manuseia o botão giratório que regula a voltagem aplicada na bobina. Para poder indicar os movimentos do botão, seguro nesta mão uma caneta. A imagem borrada desta caneta mostra que estou girando o botão rapidamente. Correspondentemente a corrente injetada na bobina que está ligada na fonte varia rapidamente com o tempo, e com isto varia também o campo magnético gerado pela corrente. Percebemos na imagem que o amperímetro indica uma corrente diferente de zero na bobina que não está ligada na fonte.

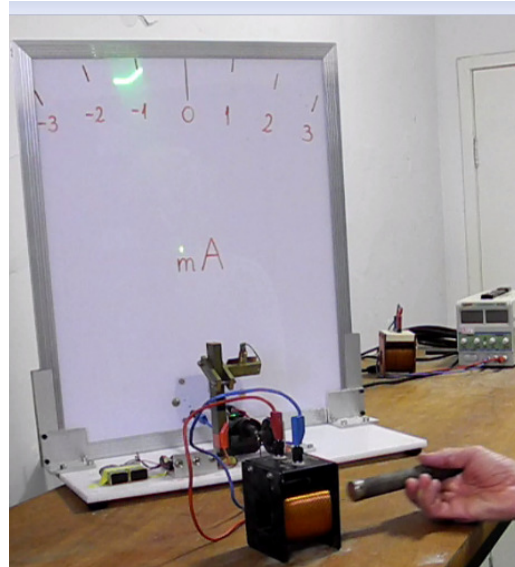
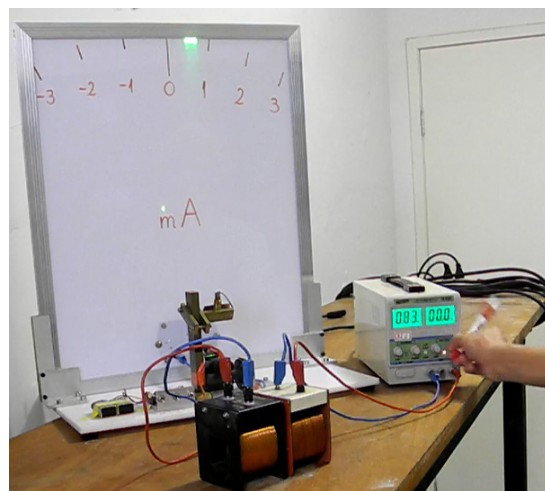


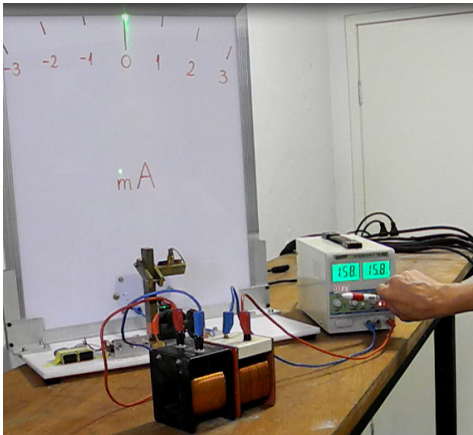
Fig. 8.1.6 Geração de uma corrente elétrica com a ajuda de um campo magnético variável no tempo. A mão que gira o botão de ajuste de voltagem da fonte segura uma caneta. A imagem da mesma está borrada indicando que o botão está sendo girado rapidamente.

Mas é bom verificarmos se é mesmo a variação do campo que cria esta corrente, ou se é pura e simplesmente o próprio campo magnético. Na figura 8.1.7 injeto uma corrente temporalmente constante na bobina da fonte e percebemos que o ponteiro luminoso do amperímetro permanece na sua posição de corrente zero. Verifica-se também que o sinal da corrente gerada pela variação do campo depende do sentido da variação, isto é, o sinal da corrente gerada por um aumento do campo é contrário ao sinal da corrente provocada por uma diminuição do campo.



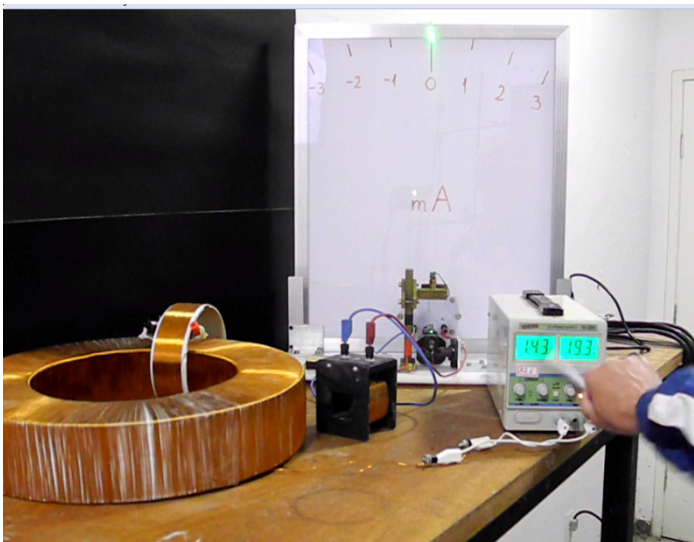
Assim parece que a corrente gerada está relacionada com a derivada temporal do campo magnético; $I \leftrightarrow \partial \vec{B} / \partial t$.

Fig. 8.1.7 O campo magnético temporalmente constante não provoca corrente na bobina ligada no amperímetro.



Mas agora teremos mais uma surpresa: podemos manter o fio da bobina que está ligada no amperímetro numa região do espaço sem campo magnético e mesmo assim podemos induzir corrente neste fio com a ajuda de um campo magnético variável. Na seção 7.5 calculamos o campo magnético gerado pela corrente numa bobina toroidal e vimos que somente dentro do toroide há valores diferentes de zero do campo magnético. Então vamos usar a bobina toroidal para criar o campo variável e manter a bobina na qual esperamos ter a corrente induzida na região sem campo magnético. Há duas formas

fundamentalmente diferentes de colocar esta segunda bobina na região sem campo: a bobina pode ficar ao lado do toroide, ou ela pode enlaçar o toroide. As figuras 8.1.8 e



8.1.9 mostram estes casos. Com a bobina posta ao lado não conseguimos corrente induzida mesmo girando o botão da fonte que alimenta o solenoide toroidal rapidamente. Mas na bobina que enlaça o corpo toroidal aparece uma corrente induzida quando se gira o botão da fonte rapidamente.

Fig. 8.1.8 Uma variação temporal do campo magnético dentro do toroide não provoca corrente numa bobina ao lado do toroide.

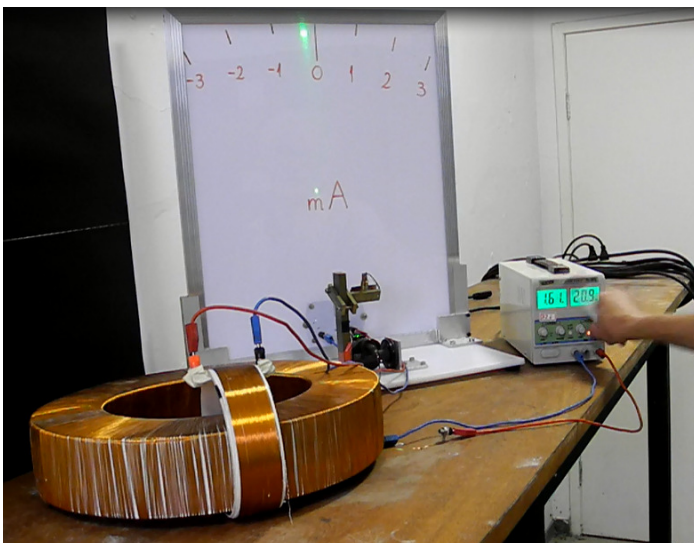
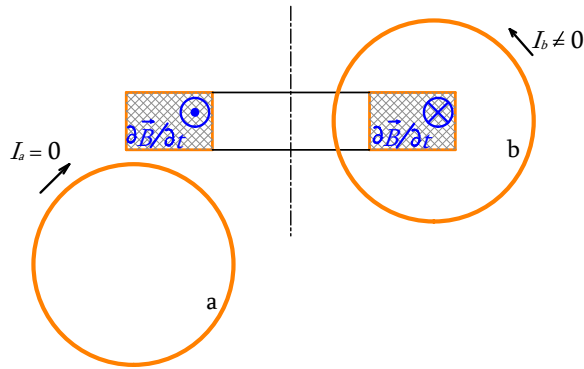


Fig. 8.1.9 Uma variação temporal do campo magnético dentro do toroide provoca corrente numa bobina que enlaça o toroide.

Agora tentaremos extrair destas observações alguma lei. Neste momento quero focar a atenção especialmente nas correntes induzidas pela variação temporal do campo magnético sem envolver movimentos dos condutores. Investigaremos o caso de fios em movimento na próxima seção.

Como não parece ter desequilíbrios termodinâmicos, tais como: diferenças de temperatura, ou reações químicas no circuito que apresenta a corrente induzida e também não há força magnética, pois os fios não estão em movimento, concluímos que a corrente observada deva ser causada por um campo elétrico. Então aparentemente a taxa de variação do campo magnético $\partial\vec{B}/\partial t$ cria campo elétrico. Mas os lugares no espaço que apresentam o campo elétrico não nulo não precisam ser os lugares onde



$\partial\vec{B}/\partial t \neq 0$. As duas últimas experiências com o solenoide toroidal dão uma dica bem clara de qual é a relação que existe entre $\partial\vec{B}/\partial t$ e campo elétrico gerado.

Fig. 8.1.10 Resumo esquematizado das experiências das figuras 8.1.8 e 8.1.9.

Para tornar a situação ainda mais clara, vamos esquematizar estas experiências e substituir a malha formada pelo fio da bobina e o amperímetro por um

único fio em forma de um círculo. A figura 8.1.10 mostra uma bobina toroidal numa vista de corte e duas espiras circulares de condutores. A espira *a* está ao lado do toroide e a espira *b* enlaça o corpo do toroide de tal forma que a curva *b* não pode ser deslocada ou deformada continuamente até coincidir com a curva *a* sem atravessar o corpo do toroide. Resumindo as experiências, podemos afirmar que uma taxa de variação do campo magnético no interior do toroide provoca uma corrente no circuito *b*, mas não no circuito *a*. Falamos que a corrente seria criada com a ajuda de um campo elétrico. Então fora do corpo do toroide há campo elétrico não nulo. Se a corrente no circuito *a* é zero, significa que um campo em uma parte do anel condutor deve cancelar a ação do campo em outra. Isto está de acordo com a lei das malhas. Pois neste anel não há nenhuma bateria e a lei das malhas, $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$, tem como única contribuição para a integral o termo RI_a , sendo R a resistência do anel condutor. Mas no anel *b* tampouco temos bateria e neste anel há também somente a contribuição RI_b . Então pelo valor não nulo da corrente I_b , devemos concluir que neste caso a lei das malhas na forma $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ não vale! Aparentemente a grandeza chave para caracterizar o fenômeno é a integral de linha $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$. O anel *a* não enlaça fluxo do campo $\partial\vec{B}/\partial t$, mas o anel *b* enlaça fluxo deste campo. Percebe-se nas experiências que a corrente induzida é tanto maior quanto mais rapidamente giramos o botão da fonte. Então a integral $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ parece ser proporcional ao fluxo do campo $\partial\vec{B}/\partial t$. Medidas quantitativas mais cuidadosas confirmam esta hipótese. Assim podemos escrever uma primeira forma de lei que descreve o fenômeno observado:

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \alpha \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (8.1.1),$$

com alguma constante de proporcionalidade α . Nesta fórmula S é uma superfície orientável e ∂S , sua beirada com a orientação relativa à orientação da superfície, como foi explicado na seção 7.3.

Vamos investigar a constante de proporcionalidade. A integral de linha do lado esquerdo da fórmula é uma voltagem. O módulo do campo magnético se mede em $V\text{m}^{-2}$. Consequentemente a integral de superfície do lado direito também sai como uma voltagem. Assim α é um número puro. Pode ser um número positivo ou negativo. As seguintes experiências mostram que α é negativo:

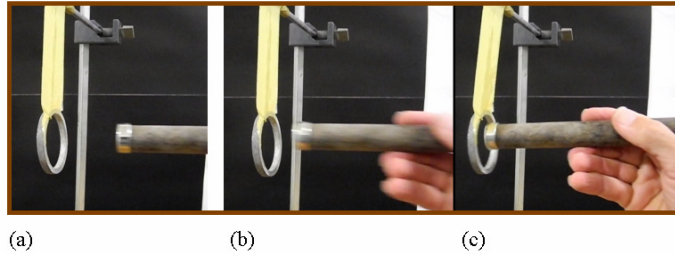


Fig. 8.1.11 Quadros de uma filmagem na ordem temporal (a)→(b)→(c). Um ímã é empurrado na direção de uma argola de alumínio pendurada. A argola foge do ímã.

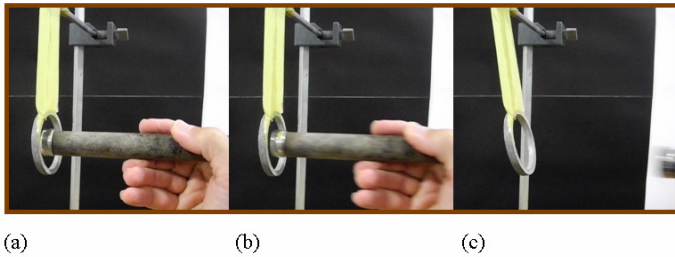
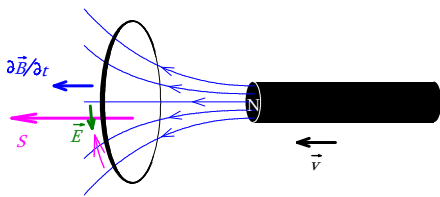


Fig. 8.1.12 Quadros de uma filmagem na ordem temporal (a)→(b)→(c). Um ímã é puxado de dentro de uma argola de alumínio. A argola segue o ímã.

As figuras 8.1.11 e 8.1.12 mostram quadros de filmagens de experiências. Um anel de alumínio está pendurado numa haste com a ajuda de fita adesiva. Na experiência da figura 8.1.11 empurro um ímã para dentro do anel. O último quadro mostra que o anel foge do ímã como se tivesse uma força de atrito viscoso entre ímã e anel. A figura 8.1.12 mostra o movimento inverso: começando com o ímã dentro do anel, retiro-o rapidamente. O anel parece ser puxado junto, de novo como se tivesse um atrito entre anel e ímã³. Este efeito pode ser usado para determinar o sinal da constante α . Vamos supor que α seja negativo e veremos se, com esta hipótese, podemos explicar este atrito magnético.



Vamos imaginar que o polo norte esteja virado para o anel e o campo magnético aponte do ímã para o anel. Vamos escolher a orientação da superfície que tem o anel como beirada neste mesmo sentido, como está indicado na figura 8.1.13

Fig. 8.1.13 Um ímã se aproxima de uma espira condutora. A figura mostra o vetor superfície em magenta da superfície circular que tem a espira como beirada. A orientação deste vetor foi escolhida coincidindo com o sentido do vetor \vec{B} no centro do ímã. A seta magenta ao lado do anel condutor indica a orientação relativa da beirada que serve para a integral de linha da fórmula (8.1.1). Com a aproximação do ímã gera-se um $\partial\vec{B}/\partial t$ que é indicado em azul. Se $\alpha < 0$ temos um campo elétrico induzido (mostrado em verde) contrário à orientação do caminho de integração.

Se o ímã se move na direção do anel, o módulo do campo magnético na região do anel aumenta temporalmente. Então $\partial\vec{B}/\partial t$ também aponta na mesma direção do vetor superfície. Consequentemente a integral de superfície da fórmula (8.1.1), quando

³ Poder-se-ia criticar a análise desta experiência alegando que o anel foi movido pelo movimento do ar em consequência do movimento do ímã. Pode-se repetir esta experiência com um cilindro de madeira com as mesmas dimensões do ímã e não se nota um movimento minimamente comparável com aquele observado com o ímã.

aplicada a esta experiência, é positiva. Se α for negativo, a integral de caminho do campo elétrico tem que ser negativa. Então os vetores do campo elétrico gerado devem apontar no sentido contrário da seta de orientação do caminho de integração. Indiquei o campo elétrico gerado com uma seta verde na figura. Com a lei de Ohm a corrente induzida também deve circular neste sentido contrário.

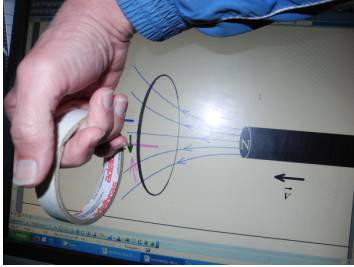


Fig. 8.1.14 Aplicação da regra da mão direita para a determinação do sentido do campo magnético gerado pela corrente induzida.

Mas, se há corrente induzida, esta também gerará um campo magnético. Vamos usar a regra da mão direita para determinar o sentido deste campo gerado. A figura 8.1.14 mostra o mesmo desenho da figura 8.1.13 na tela do computador e a minha mão direita segura um rolo de fita adesiva que simboliza o anel condutor. O meu polegar aponta no sentido do campo elétrico e no sentido da corrente induzida. Então os demais dedos representam as linhas de campo gerado e os vetores \vec{B} saem das minhas unhas destes dedos. Então o anel gera um campo magnético como se fosse um ímã com a polaridade contrária à do ímã em movimento. Isto explica a repulsão do anel. Com um sinal positivo de α , o anel seria atraído na experiência de empurrar o ímã. O leitor pode agora fazer este tipo de análise para o caso da retirada do ímã, ou seja, da experiência da figura 8.1.12. O leitor pode se convencer ainda de que o efeito não depende da orientação do ímã. Poderíamos ter usado o polo sul girado para o anel, e mesmo assim a força entre anel e ímã teria sido do tipo de atrito, ou seja, uma que resulta num arraste.

Há uma forma elegante de descrever esta orientação da corrente induzida. Investigaremos de novo a experiência da aproximação do ímã: enquanto o ímã está longe do anel, o fluxo magnético através do anel tem um valor pequeno. Na medida em que o ímã se aproxima, este fluxo aumenta. Mas durante este processo aparece a corrente induzida e gera um campo contrário, como se o anel “tentasse” manter o fluxo no antigo valor pequeno. O leitor pode fazer a mesma análise para o caso da retirada do ímã. Neste caso o fluxo inicial é grande e a análise detalhada mostra que neste caso a corrente induzida gera um campo que “tenta” manter este valor alto do fluxo. Então podemos resumir:

O sentido da corrente induzida por uma variação de fluxo magnético é tal que o campo gerado pela corrente induzida se opõe à variação do fluxo.

Esta regra é conhecida como lei de Lenz⁴. De certa forma a lei de indução tem neste aspecto algo em comum com a lei da inércia. As grandes massas se opõem às mudanças de velocidade. De fato veremos mais tarde que, nas equações que descrevem circuitos, a lei de indução gera termos que têm o mesmo papel do termo $m\vec{a}$ em certas aplicações da segunda lei de Newton.

⁴ Heinrich Friedrich Emil Lenz (em russo: Эмилий Христианович Ленц) (12/02/1804, em Dorpat / Estônia – 10/02/1865).

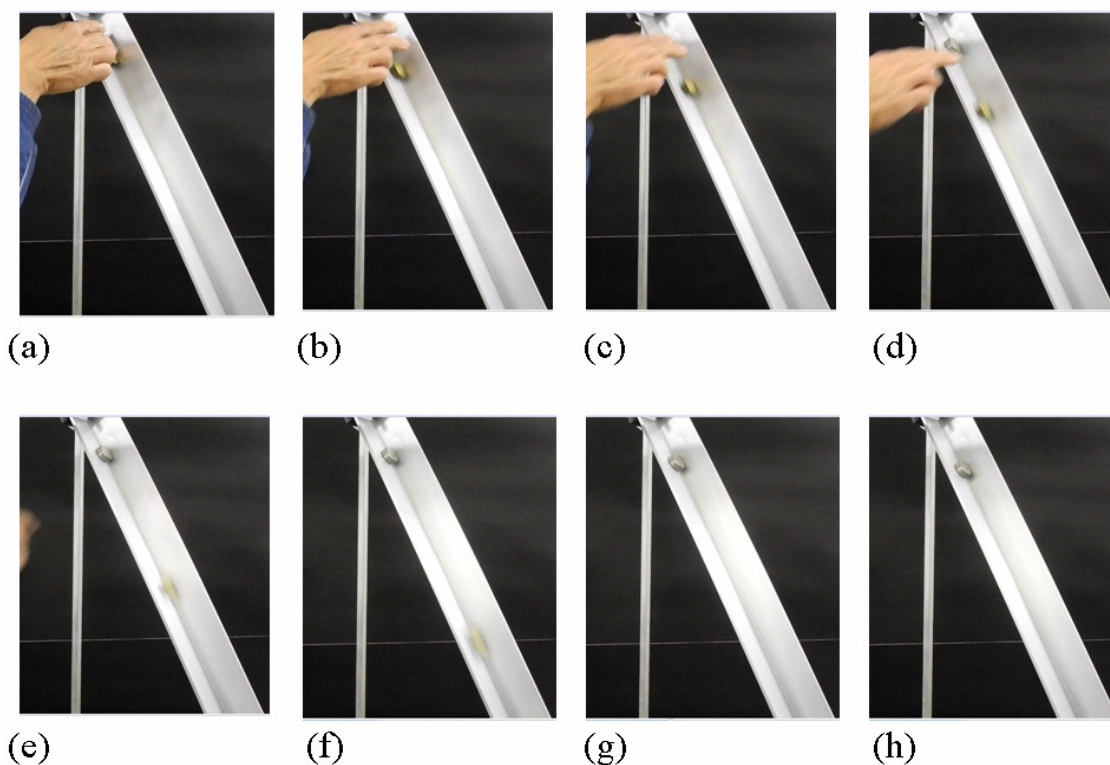


Fig.8.1.15 Um ímã e um disco de latão deslizando numa canaleta inclinada de alumínio. O ímã desce com a velocidade de uma tartaruga. Há que olhar os quadros com atenção para perceber que o ímã realmente se desloca.

O atrito magnético pode ter manifestações bem impressionantes. A figura 8.1.15 mostra quadros de filmagem do deslizamento numa canaleta de alumínio de um disco de latão e um ímã, mais ou menos do mesmo tamanho e com o mesmo peso. O coeficiente de atrito mecânico entre ímã e alumínio ou latão e alumínio é certamente da mesma ordem de grandeza. Mas enquanto o disco de latão desce com tanta rapidez que os quadros (c) - (f) da filmagem mostram este disco borrado, o ímã desce com a velocidade de uma tartaruga. Atrito magnético pode ser empregado para finalidades úteis. Na seção 4.6 mencionamos que Gerd Binnig, Heinrich Rohrer, Christoph Gerber e Edmund Weibel inventaram o microscópio de varredura que é capaz de mostrar átomos individuais numa superfície. Evidentemente um instrumento deste tipo precisa ser muito bem isolado de vibrações mecânicas. Então os inventores montaram este microscópio numa plataforma pendurada em três molas. Mas este sistema iria oscilar com qualquer perturbação mecânica vinda do ambiente. Então era necessário amortecer este oscilador. Os inventores usaram o atrito magnético para gerar o amortecimento. A plataforma que segurava o microscópio era uma grossa placa de cobre e embaixo dela havia uma porção de ímãs que geravam atrito sem encostarem-se à placa.

Em português as correntes induzidas que provocam esta força de atrito magnético são chamadas de correntes de Foucault. Jean Bernard Léon Foucault⁵ observou em 1855 que um disco de cobre girando entre os polos de um ímã é freado. De fato o atrito

⁵ Jean Bernard Léon Foucault 18/09/1819 – 11/02/1868. Foucault é muito conhecido pela demonstração da rotação da Terra com a ajuda de um pêndulo.

magnético já tinha sido observado por Dominique François Jean Arago⁶ em 1854. Ele notou que uma bússola suspensa por cima de um disco de cobre em rotação acompanha o giro do disco.

Depois deste desvio para as aplicações, voltamos para a determinação da constante de proporcionalidade α . Já sabemos que α é negativo e que se trata de um número puro. Este número não envolve propriedades da matéria e de nenhum material. Esperamos encontrar algum número simples e fundamental, como -4π , $-e$ ou algo parecido. Mas medidas quantitativas indicam algo ainda mais simples; encontra-se $\alpha = -1$. Na próxima seção veremos que este valor tem um significado muito especial e temos motivo muito forte para acreditar que se trata de um -1 exato e não algum valor muito próximo deste número.

Então encontramos a seguinte lei fundamental do eletromagnetismo:

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (8.1.2)$$

Esta fórmula vale para qualquer superfície orientável que tem uma beirada em forma de curva fechada. Com o teorema de Stokes, podemos reformular este resultado também em forma local: em todos os pontos do espaço físico vale

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8.1.3)$$

Terminaremos esta seção com algumas considerações matemáticas. Primeiramente podemos notar que a aula de hoje é o triste dia de enterro do “senhor potencial elétrico”; ††† ! Uma vez que as integrais de linha $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ podem ser diferentes de zero, não faz mais sentido falar de potencial elétrico. O que significa isto na prática? Isto significa que os valores medidos com um voltímetro podem depender do trajeto exato dos fios que conectam o voltímetro nos dois pontos A e B cuja “diferença de potencial” se pretendia medir. Se o valor medido depende do trajeto dos fios, então este valor não é mais um atributo somente destes dois pontos A e B e, portanto, a expressão “diferença de potencial entre A e B” não é um termo adequado. É muito comum ouvir falar de “DDP entre os terminais de um transformador”. Entre os terminais de um transformador não há DDP alguma! No fundo esta quebra do conceito potencial era esperada. Na seção 2.1 mencionamos que a lei de Coulomb tem uma parte válida mesmo em situações não estacionárias, a saber, a lei de Gauss e uma parte com validade restrita, a saber, a lei da existência do potencial. Como consolo devo mencionar que o “senhor potencial elétrico” terá seu dia de ressurreição em algum curso mais avançado de eletromagnetismo. Mas ele renasce como parte de um objeto de quatro dimensões, juntando o antigo potencial com um campo vetorial chamado de *potencial vetor*.

⁶ Dominique François Jean Arago (26/02/1786 – 02/10/1853). Arago teve uma vida multifacetada de militar, prisioneiro, inclusive prisioneiro de corsários, cientista e político. Ele conduziu junto com Jean-Baptist Biot uma medida de arco de meridiano, e principalmente contribuiu para a óptica colaborando com Augustin-Jean Fresnel. Na Física IV vocês devem conhecer um fenômeno curioso chamado de mancha de Poisson ou mancha de Arago. As obras científicas de Arago enchem 13 volumes.

A segunda observação matemática diz respeito à consistência matemática da própria lei de indução (8.1.2). O lado direito desta fórmula depende da escolha de uma superfície orientável \mathbb{S} . Mas o lado esquerdo depende apenas da beirada desta superfície. Em princípio isto poderia resultar em uma inconsistência. Pois há diversas superfícies diferentes que possuem a mesma beirada. Se duas destas superfícies dessem resultados diferentes para a integral do campo $\partial\vec{B}/\partial t$, teríamos uma contradição. Então temos que investigar se isto pode ocorrer.



Fig. 8.1.16 Duas superfícies orientáveis com a mesma beirada realizadas fisicamente por uma tigela de acrílico e uma folha de transparência. A beirada comum está marcada com uma linha vermelha. Uma seta de orientação está colada em cada uma das superfícies. Estas orientações são escolhidas de tal forma que a beirada recebe a mesma orientação relativa por ambas as superfícies.

Sejam \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 duas superfícies orientáveis que têm a mesma beirada $\partial\mathbb{S}_1 = \partial\mathbb{S}_2$. Na figura 8.1.16 mostro duas superfícies com a mesma beirada realizadas fisicamente. Usei a mesma tigela de acrílico da figura 7.3.1, mas eu arranquei uma das flechas que indicavam vetores normais. Cobri a boca da tigela com uma folha de transparência e coleí a seta nesta segunda superfície. A antiga interface acrílico-ar e a folha de transparência formam duas superfícies com a mesma beirada que é mostrada com o traço vermelho. As setas de orientação coladas nas superfícies são tais que a beirada comum recebe a mesma orientação relativa das duas superfícies orientadas pelas flechas. A questão é se as integrais do campo $\partial\vec{B}/\partial t$ integrado sobre \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 podem dar resultados diferentes. Evidentemente podemos formular esta questão de forma equivalente também perguntando se

$$\iint_{\mathbb{S}_2} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \iint_{\mathbb{S}_1} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (8.1.4)$$

é zero ou não. Podemos escrever esta diferença de integrais como a soma da integral calculada sobre a superfície \mathbb{S}_2 e a integral calculada sobre a superfície que resultou da superfície \mathbb{S}_1 por uma inversão da orientação. Vamos chamar esta superfície invertida de $\bar{\mathbb{S}}_1$. Na fotografia da figura 8.1.16 podemos mentalmente imaginar que o novo vetor normal de orientação da tigela seja a imagem especular tomada no plano tangencial da flecha colada. A figura 8.1.17 mostra isto esquematicamente.

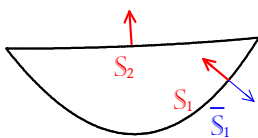


Fig. 8.1.17 Duas superfícies com a mesma beirada. Uma mudança da orientação de uma das superfícies permite formar uma superfície fechada com as duas.

Então temos

$$\iint_{\mathbb{S}_2} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \iint_{\mathbb{S}_1} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathbb{S}_2} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} + \iint_{\bar{\mathbb{S}}_1} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (8.1.5).$$

Mas esta soma forma uma integral calculada sobre uma superfície fechada, que podemos chamar de $\mathbb{S}_1 \cup \bar{\mathbb{S}}_2$

$$\iint_{\mathbb{S}_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \iint_{\mathbb{S}_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\mathbb{S}_1 \cup \overline{\mathbb{S}_2}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (8.1.6)$$

Com o teorema de Gauss, esta integral é igual à integral de volume da divergência do campo $\partial \vec{B} / \partial t$ integrado sobre o volume \mathbb{V} que está embrulhado pela superfície fechada $\mathbb{S}_1 \cup \overline{\mathbb{S}_2}$

$$\iint_{\mathbb{S}_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} - \iint_{\mathbb{S}_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathbb{V}} \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV \quad (8.1.7)$$

Mas, com o teorema de Clairaut e Schwarz, sabemos que

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{B}) \quad (8.1.8).$$

Se não existem cargas magnéticas, vale $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, e como $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ vale para todos os instantes, vale também $\partial (\operatorname{div} \vec{B}) / \partial t = 0$. Então a diferença das integrais sobre \mathbb{S}_1 e \mathbb{S}_2 é zero e não há perigo de uma inconsistência matemática da lei de indução. Mas, caso se descubra que há monopolos magnéticos, teremos que modificar a lei de indução.

Exercício:

E 8.1.1: Repita as experiências desta seção com a ajuda de um pequeno multímetro analógico como aquele da figura 5.6.12. Este tipo de instrumento é barato e mais adequado para estas experiências do que um instrumento digital.