

8.2 Indução eletromagnética e a lei das malhas

Vimos na última seção que a lei das malhas na forma $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$ não vale na presença de campos magnéticos temporalmente variáveis. Isto não é nenhuma tragédia, é fácil consertar esta lei. A própria seção 8.1 fornece a versão correta da lei. No lugar do zero do lado direito devemos escrever um $-\iint_S (\partial \vec{B} / \partial t) \cdot d\vec{S}$:

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (8.2.1).$$

Pronto, poderíamos terminar aqui. Mas vale a pena olhar o lado esquerdo de lei (8.2.1) um pouco mais detalhadamente. O cerne da questão de aplicar a lei das malhas é de substituir o campo elétrico na integral de caminho por expressões que envolvam as correntes que fluem numa malha. Então, por exemplo, no caso de um fio condutor comprido usamos $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, sendo σ a condutividade do material, e chegamos à conclusão de que a contribuição para a integral é RI . Mas há condutores especiais nos quais nem toda corrente se deve à ação do campo elétrico, e nestes há que descontar a parcela de corrente que flui não por causa do campo elétrico, mas apesar do campo elétrico. Neste caso chegamos a uma contribuição para a integral do tipo $RI - \mathcal{E}$. Há ainda os capacitores cuja contribuição é relacionada com a integral temporal da corrente que entra no capacitor. Resumindo estas contribuições, podemos escrever a lei das malhas com o lado direito consertado da seguinte forma:

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} R_r I_r + \sum_{c \in \mathcal{C}} \frac{q_{0c} + \int_0^t I_c dt'}{C_c} - \sum_{e \in \mathcal{E}} \mathcal{E}_e = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (8.2.2).$$

Nesta fórmula temos um somatório sobre o conjunto \mathcal{R} de todos os resistores da malha (incluindo resistências internas de fontes), um sobre o conjunto \mathcal{C} de todos os capacitores da malha e um sobre o conjunto \mathcal{E} de todas as eletromotâncias. Na fórmula (8.2.2) todas as correntes I_r , I_c e as setas de definição das eletromotâncias são definidas no mesmo sentido da integração de linha.

Na seção anterior descobrimos um novo tipo de eletromotância, a saber, uma provocada pelo movimento de um condutor num campo magnético. Então, para incluir movimentos, vamos agora permitir que a malha se possa deformar ou mudar de posição e de orientação no espaço. Neste caso aparece este novo tipo de eletromotância magnética. Chegaremos a um resultado muito interessante e prático se destacarmos esta eletromotância das demais e a investigarmos detalhadamente.

Quando movemos um condutor com velocidade \vec{v} numa região do espaço com campo magnético \vec{B} , atua a força $\vec{F}_M = q \vec{v} \times \vec{B}$ sobre os portadores de carga q existentes no material condutor. Esta força deve produzir uma velocidade de deriva destes portadores de carga da mesma maneira como a força elétrica provoca velocidade de deriva. Para a partícula que transporta carga não faz nenhuma diferença se a força é elétrica ou magnética. No caso da força elétrica sabemos que ela resulta numa densidade de corrente $\sigma \vec{E}$. Para poder aproveitar este conhecimento e poder transferi-lo para o caso da força magnética, devemos escrever esta densidade de corrente em termos da força elétrica. Isto é fácil:

$$\sigma \vec{E} = \frac{\sigma}{q} q \vec{E} = \frac{\sigma}{q} \vec{F}_{El} \quad (8.2.3).$$

Se substituirmos nesta igualdade a força elétrica \vec{F}_{El} pela força magnética, obtemos a densidade de corrente remanescente causada pelo movimento do condutor no campo magnético:

$$\vec{j}_{0\text{magnético}} = \frac{\sigma}{q} q \vec{v} \times \vec{B} \quad (8.2.4).$$

Fora desta densidade de corrente remanescente pode haver densidades de correntes remanescentes provocadas por desequilíbrios termodinâmicos, tais como: gradientes de temperatura ou desequilíbrios químicos. Então a densidade de corrente remanescente total \vec{j}_0 é a soma de uma parcela magnética e uma térmica:

$$\vec{j}_0 = \vec{j}_{0\text{magnético}} + \vec{j}_{0\text{térmico}} \quad (8.2.5).$$

Lembramos da seção 5.4 que a eletromotância existente num trecho da malha de um ponto a até um ponto b era

$$\mathcal{E} = \int_a^b \frac{\vec{j}_0}{\sigma} \cdot d\vec{\ell} \quad (8.2.6).$$

Então com condutores em movimento e na presença de campo magnético, temos uma eletromotância magnética

$$\mathcal{E}_{\text{magnética}} = \oint_{\partial\mathcal{S}(t)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \quad (8.2.7)$$

na malha. Na integral de linha, \vec{v} expressa as velocidades do material condutor que forma a malha. Vamos escrever esta eletromotância separadamente fora do somatório das demais eletromotâncias:

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} R_r I_r + \sum_{c \in \mathcal{C}} \frac{q_{0c} + \int_0^t I_c dt'}{C_c} - \sum_{e \in \mathcal{E}_{\text{term}}} \mathcal{E}_e - \oint_{\partial\mathcal{S}(t)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = - \iint_{\mathcal{S}(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (8.2.8).$$

Depois de destacar a parcela magnética, o somatório sobre as fontes se estende somente sobre o conjunto $\mathcal{E}_{\text{term}}$ das eletromotâncias de desequilíbrio termodinâmico, tais como: pilhas voltaicas e termopares. Já que permitimos que os condutores da malha podem se mover, devemos imaginar uma superfície $\mathcal{S}(t)$ para cada instante t cuja beirada $\partial\mathcal{S}(t)$ é formada pelos elementos da malha. Conseqüentemente anotei esta dependência temporal nos domínios de integração.

O ponto interessante nesta fórmula é que a eletromotância magnética forma junto com o lado direito da fórmula uma expressão simples e compacta. Então vamos transferir a integral de linha de $\vec{v} \times \vec{B}$ para o outro lado da fórmula e vamos investigar esta integral mais detalhadamente.

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} R_r I_r + \sum_{c \in \mathcal{C}} \frac{q_{0c} + \int_0^t I_c dt'}{C_c} - \sum_{e \in \mathcal{E}_{\text{term}}} \mathcal{E}_e = + \oint_{\partial \mathbb{S}(t)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} - \iint_{\mathbb{S}(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (8.2.9)$$

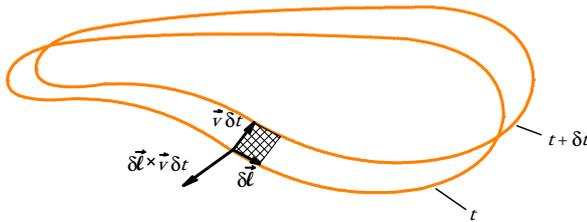
Na integral (8.2.7) há um produto triplo, e sabemos que podemos trocar a ordem dos fatores ciclicamente sem alterar o valor do produto:

$$\oint_{\partial \mathbb{S}(t)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\partial \mathbb{S}(t)} (d\vec{\ell} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} \quad (8.2.10).$$

Agora imagine este caminho de integração, isto é, o caminho formado pelos condutores da malha, num instante t e um tempo infinitesimal depois, no instante $t + \delta t$. Multiplicando e dividindo a integral da fórmula (8.2.10) por δt , obtemos um vetor deslocamento $\vec{v} \delta t$.

$$\oint_{\partial \mathbb{S}} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{\delta t} \oint_{\partial \mathbb{S}} (d\vec{\ell} \times \vec{v} \delta t) \cdot \vec{B} \quad (8.2.11).$$

Fig. 8.2.1 Conductor de uma malha em dois instantes t e $t + \delta t$. Um vetor deslocamento $\delta t \vec{v}$ e o vetor de avanço do processo de integração $\delta \vec{\ell}$ formam um paralelogramo infinitesimal.



A figura 8.2.1 mostra um exemplo deste vetor simbolicamente. Neste exemplo a malha se deslocou para cima. Mas ela pode se deslocar também para baixo, pode girar, ou pode até se deformar. Deixamos a análise destas outras possibilidades

como exercício. Imagine também que avancemos por um vetor deslocamento infinitesimal $\delta \vec{\ell}$ no processo de integração. O produto vetorial $d\vec{\ell} \times \vec{v} \delta t$ que aparece na integral do lado direito da fórmula (8.2.11) resulta num produto $\delta \vec{\ell} \times \vec{v} \delta t$ neste avanço. Este vetor é o vetor superfície do paralelogramo infinitesimal formado pelos vetores $\delta \vec{\ell}$ e $\vec{v} \delta t$. O produto triplo $(\delta \vec{\ell} \times \vec{v} \delta t) \cdot \vec{B}$ que contribui para a integral é justamente o fluxo magnético através deste paralelogramo.

Imaginem para cada instante t' uma superfície orientável $\mathbb{S}(t')$ associada à malha. No intervalo de tempo $[t, t + \delta t]$ estas superfícies $\mathbb{S}(t')$ varrem um volume $V_{[t, t + \delta t]}$. A beirada deste volume tem três partes: a superfície orientável $\mathbb{S}(t)$ associada à malha no instante t , a superfície $\mathbb{S}(t + \delta t)$ associada à malha no instante $t + \delta t$ e uma fita lateral que consiste dos pontos varridos pelos elementos da malha durante o intervalo $[t, t + \delta t]$. No processo de integração, os paralelogramos formados pelos vetores $\delta \vec{\ell}$ e $\delta t \vec{v}$ cobrem esta fita lateral. Então a integral $\oint_{\partial \mathbb{S}} (d\vec{\ell} \times \vec{v} \delta t) \cdot \vec{B}$ é simplesmente o fluxo do campo magnético através desta fita lateral.

Agora podemos utilizar a lei de Gauss do campo magnético para expressar esta integral de fluxo com a ajuda das integrais de fluxo do campo magnético através das superfícies

$\mathbb{S}(t)$ e $\mathbb{S}(t + \delta t)$. A junção das superfícies $\mathbb{S}(t + \delta t)$, da $\bar{\mathbb{S}}(t)$, isto é, da superfície $\mathbb{S}(t)$ com orientação invertida e a fita lateral formam uma superfície fechada, a saber, a superfície do volume $V_{[t, t + \delta t]}$. Com a lei $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ sabemos que

$$\oiint_{\partial V_{[t, t + \delta t]}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial \mathbb{S}} (d\vec{\ell} \times \vec{v} \delta t) \cdot \vec{B} + \iint_{\bar{\mathbb{S}}(t)} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{\mathbb{S}(t + \delta t)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8.2.12).$$

Um detalhe importante deve ser considerado nesta igualdade. A integral $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ é somente zero se usarmos em todas as partes da superfície fechada o valor de \vec{B} correspondente ao mesmo instante. Este instante pode ser qualquer um, mas tem que ser o mesmo em todas as partes da superfície. Aqui vamos escolher o instante t . Então em todas as integrais da fórmula (8.2.12) \vec{B} é tomado no instante t , mesmo na integral que usa a superfície $\mathbb{S}(t + \delta t)$:

$$\oint_{\partial \mathbb{S}} (d\vec{\ell} \times \vec{v} \delta t) \cdot \vec{B}(t) + \iint_{\bar{\mathbb{S}}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} + \iint_{\mathbb{S}(t + \delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (8.2.13).$$

Com

$$\iint_{\bar{\mathbb{S}}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} = - \iint_{\mathbb{S}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} \quad (8.2.14),$$

podemos escrever a integral de linha (8.2.7) como a diferença de duas integrais de superfície:

$$\oint_{\partial \mathbb{S}} (d\vec{\ell} \times \vec{v} \delta t) \cdot \vec{B}(t) = - \left\{ \iint_{\mathbb{S}(t + \delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \iint_{\mathbb{S}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} \right\} \quad (8.2.15).$$

Então a lei das malhas fica com o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned} \sum_{r \in \mathcal{R}} R_r I_r + \sum_{c \in \mathcal{C}} \frac{q_{0c} + \int I_c dt'}{C_c} - \sum_{e \in \mathcal{E}_{\text{tem}}} \mathcal{E}_e &= \\ &= - \frac{1}{\delta t} \left\{ \iint_{\mathbb{S}(t + \delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \iint_{\mathbb{S}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} \right\} - \iint_{\mathbb{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (8.2.16).$$

O lapso de tempo δt era supostamente infinitesimal. Isto significa que estamos desde logo avisando que pretendemos tomar um limite $\delta t \rightarrow 0$ e que termos de ordem superior ao δt^1 podem ser desprezados. Podemos logo colocar o limite na frente da expressão e podemos aproveitar e escrever a derivada temporal parcial do campo magnético com o mesmo limite:

$$\begin{aligned} \sum_{r \in \mathcal{R}} R_r I_r + \sum_{c \in \mathcal{C}} \frac{q_{0c} + \int_0^t I_c dt'}{C_c} - \sum_{e \in \mathcal{E}_{\text{term}}} \mathcal{E}_e &= \\ &= - \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left\{ \iint_{\mathbb{S}(t+\delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} - \iint_{\mathbb{S}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} + \iint_{\mathbb{S}(t)} \{ \vec{B}(t+\delta t) - \vec{B}(t) \} \cdot d\vec{S} \right\} \end{aligned} \quad (8.2.17).$$

Na última integral estamos integrando a função $\{ \vec{B}(t+\delta t) - \vec{B}(t) \}$ que é pequena, da ordem δt^1 . Então cometemos apenas um erro de ordem superior ao δt^1 se substituirmos nesta integral o domínio de integração $\mathbb{S}(t)$ pelo domínio $\mathbb{S}(t+\delta t)$. Esta alteração não modifica o resultado do limite. Fazendo esta alteração, obtemos algo sumamente simples:

$$\begin{aligned} \sum_{r \in \mathcal{R}} R_r I_r + \sum_{c \in \mathcal{C}} \frac{q_{0c} + \int_0^t I_c dt'}{C_c} - \sum_{e \in \mathcal{E}_{\text{term}}} \mathcal{E}_e &= \\ &= - \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left\{ \cancel{\iint_{\mathbb{S}(t+\delta t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}} - \iint_{\mathbb{S}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} + \iint_{\mathbb{S}(t+\delta t)} \{ \vec{B}(t+\delta t) - \cancel{\vec{B}(t)} \} \cdot d\vec{S} \right\} = \\ &= - \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \left\{ \iint_{\mathbb{S}(t+\delta t)} \vec{B}(t+\delta t) \cdot d\vec{S} - \iint_{\mathbb{S}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} \right\} = - \frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{S}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (8.2.18).$$

Então chegamos a uma formulação bem elegante da lei das malhas: a soma das contribuições dos resistores, capacitores e a contribuição negativa das eletromotâncias termodinâmicas é igual ao negativo da taxa de variação do fluxo magnético através da malha:

$$\boxed{\sum_{r \in \mathcal{R}} R_r I_r + \sum_{c \in \mathcal{C}} \frac{q_{0c} + \int_0^t I_c dt'}{C_c} - \sum_{e \in \mathcal{E}_{\text{term}}} \mathcal{E}_e = - \frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{S}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}} \quad (8.2.19).$$

Nos livros, o termo $-\frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{S}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}$ é geralmente chamado de *força eletromotriz*

induzida. É questionável se este nome ajuda na compreensão da sutil combinação de dois efeitos físicos que se unem num único termo. Este termo

$$-\frac{d\Phi_m}{dt} \stackrel{\text{def.}}{=} - \frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{S}(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S} \quad (8.2.20)$$

contém duas contribuições: uma originária da dependência temporal do campo magnético e uma outra originária da dependência temporal da superfície de integração. A primeira cria um campo elétrico não conservativo, a segunda veio do outro lado da

fórmula (8.2.1) e era um desconto das contribuições para a integral de linha $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ que expressamos em termos de correntes. Tínhamos que descontar a corrente gerada pela força magnética que indevidamente era contada nos termos do tipo RI .

É importante entender a dedução da lei das malhas (8.2.19). Uma aplicação cega da fórmula pode facilmente fornecer resultados errados. No apêndice A discutiremos dois exemplos de aplicações errôneas da fórmula (8.2.19).

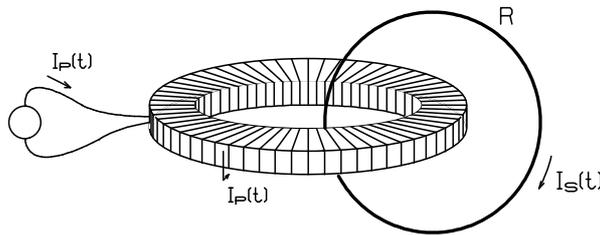
Há um aspecto muito interessante nesta incrível cooperação dos dois efeitos físicos resultando na única expressão compacta $-\frac{d}{dt} \iint_{s(t)} \vec{B}(t) \cdot d\vec{S}$ na fórmula (8.2.19).

Lembrem-se da discussão sobre o valor do fator de proporcionalidade entre $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ e $\iint (\partial \vec{B} / \partial t) \cdot d\vec{S}$? Podemos medir este fator e encontraremos algo como $(-1 \pm \text{incerteza experimental})$. Mas se este fator fosse algo diferente do exato valor -1 , a incrível cooperação da eletromotância magnética com a geração de campo elétrico não conservativo não aconteceria. Podemos então acreditar no exato valor $\alpha = -1$? Não! A beleza matemática não pode ser usada como argumento.

Mas existe outro argumento relacionando esta fórmula compacta (8.2.19) com princípios muito fundamentais. Lembrem-se das primeiras experiências que fizemos para redescobrir a lei de indução? Argumentamos com uma formiguinha inteligente agarrada nas espiras de uma bobina. A corrente observada não deve depender da escolha do ponto de vista. Podemos adotar o ponto de vista do laboratorista que vê uma bobina andando e um ímã parado, ou o ponto de vista da formiga que vê um ímã andando e uma bobina parada. Ambos os observadores têm que explicar a mesma corrente observada. Um observador usa uma eletromotância magnética e o outro um campo elétrico não conservativo. Pode-se mostrar que esta liberdade de mudar o ponto de vista existe somente com esta incrível cooperação dos dois efeitos. Então temos uma boa razão para acreditar que α vale exatamente -1 . No apêndice B discutimos esta questão com mais detalhe.

Exercícios:

E 8.2.1: Uma bobina de N espiras é enrolada em um toroide com raio interno a , raio externo b e altura h . Uma fonte variável injeta uma corrente dependente do tempo na bobina. A corrente na bobina é $I_p(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Calcule a corrente no anel de resistência R mostrado na figura. (despreze o campo magnético gerado pela corrente no anel).



↑Fig. 8.2.2: Indução de corrente num anel que enlaça uma bobina toroidal.

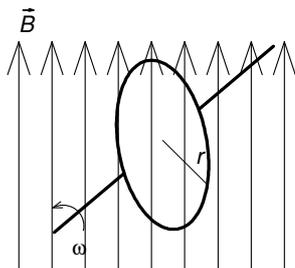


Fig. 8.2.3: Indução de corrente num anel que gira num campo magnético.

E 8.2.2: Um anel circular de raio $r = 50$ cm é montado num eixo horizontal como mostra a figura. O anel consiste em um material fracamente condutor e o eixo não conduz eletricidade. A resistência elétrica do anel

vale $R = 10\text{k}\Omega$. Com ajuda de um motor o eixo é posto em rotação de tal forma que o anel executa 60 rotações completas por segundo. Toda a experiência é mantida num campo magnético uniforme de 1 T ($= 1\text{ Vsm}^{-2}$). Em $t = 0$ o plano do anel está perpendicular ao campo. Calcule a corrente no anel como função do tempo. Neste cálculo você deve desprezar o campo magnético gerado pela corrente no anel.

8.2 Apêndice A: As armadilhas na lei de indução.

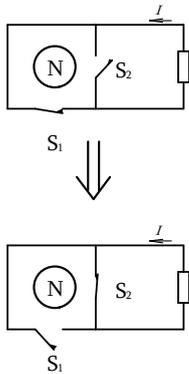
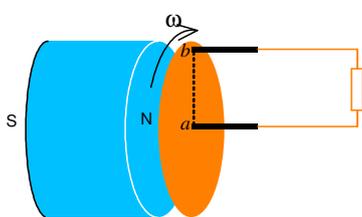


Fig. 8.2.4 “Moto perpétuo elétrico”. Apesar de termos um fluxo magnético variável não há corrente induzida.

Considere o circuito da figura 8.2.4. Este é um circuito com um resistor ligado em duas malhas com duas chaves. No centro da malha da esquerda, há um ímã permanente com o lado norte virado para cima. Este ímã cria um fluxo magnético intenso positivo na malha da esquerda e um fluxo de módulo muito menor negativo na malha da direita. A orientação das superfícies é para cima. Agora imagine que a chave S_1 estava inicialmente fechada e a chave S_2 , aberta. Nesta situação o resistor está ligado numa malha grande com fluxo magnético positivo. Num certo instante trocamos os estados dos dois interruptores simultaneamente. Então repentinamente o resistor fica ligado numa pequena malha com fluxo magnético negativo. Então há uma variação temporal do fluxo magnético na malha ligada ao resistor e quem usa a fórmula (8.2.19) ingenuamente pode pensar que na hora da mudança dos estados dos interruptores deve aparecer uma corrente no resistor. Com este tipo de arranjo poderíamos ganhar energia indefinidamente. Claro que isto não funciona. Não haverá corrente alguma neste resistor. Quem entendeu a dedução da fórmula (8.2.19) percebe imediatamente que não acontece nada, pois não há campo magnético variável no tempo e nem condutores em movimento no campo magnético (os interruptores podem ser interruptores eletrônicos sem peças mecânicas móveis).

O segundo exemplo de uso incorreto da fórmula (8.2.19) apresenta de certa forma o caso contrário: corrente induzida não nula com fluxo magnético constante. Imagine que um disco condutor esteja girando com velocidade ω na frente de uma barra imantada. Dois contatos, feitos de grafite, encostam-se a este disco, um no centro e o outro perto da beirada. Estes contatos estão ligados num resistor.

Fig. 8.2.5 Indução unipolar.

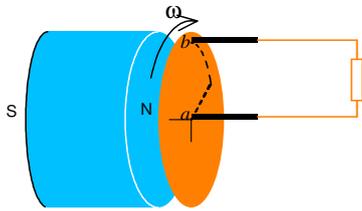


A figura 8.2.5 mostra esta experiência esquematicamente. Percebemos logo que esta experiência não se encaixa direito na nossa análise. Não temos uma malha que pode ser descrita por uma curva no espaço. Dentro no disco, a corrente flui de forma distribuída. Mas poder-se-ia pensar num caminho idealizado que corresponderia à linha

pontilhada que está desenhada entre os contatos. Se fizemos isto, teremos uma malha com fluxo magnético constante. Mas neste caso haverá uma corrente induzida. Ela pode ser medida e o efeito é conhecido pelo nome de *indução unipolar*. Entre os contatos, temos uma eletromotância que pode ser calculada perfeitamente com a fórmula

$$\mathcal{E} = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \quad (8.2.21).$$

Fig. 8.2.6 Indução unipolar com indicação de caminho que permite aplicar a fórmula (8.2.19)



Nesta expressão, \vec{v} representa as velocidades do material do disco ao longo do caminho reto de integração. Se colocarmos um resistor infinitamente grande e medirmos a corrente no circuito com um amperímetro infinitamente sensível, ou seja, se conectamos um voltímetro ideal nos contatos de grafite no lugar do resistor, iríamos medir esta

eletromotância. O resultado seria o mesmo usando a fórmula (8.2.19), mas não com a malha do caminho pontilhado entre a e b da figura 8.2.5, mas com um caminho que acompanharia o material do disco como indicado da figura 8.2.6. No caso de um resistor finito, teremos uma distribuição contínua de densidade de corrente no disco e a aproximação de circuito não é válida.

8.2 Apêndice B: $\alpha = -1$ e a relatividade do movimento

Analisaremos uma experiência imaginada de indução bem simples para facilitar a argumentação. No lugar de uma malha com bobina, cuja geometria seria complicada, usaremos um simples anel circular de raio r_0 que se aproxima de uma barra magnética com velocidade constante \vec{v} . A resistência do anel vale R e vamos imaginar que um amperímetro esteja embutido neste anel que possa ser lido pelo observador do laboratório e também pelo observador que se move junto com o anel. O plano do anel está perpendicular à velocidade e o eixo de simetria do anel coincide com o eixo de simetria da barra imantada. Usaremos este eixo como eixo z de um sistema de coordenadas cartesianas apontando do ímã para o anel. Vamos escrever a velocidade do anel na forma $\vec{v} = -v \hat{z}$ com $v > 0$. A figura 8.2.7 mostra esta experiência com indicações da orientação da malha e do vetor superfície da superfície circular que associaremos ao anel.

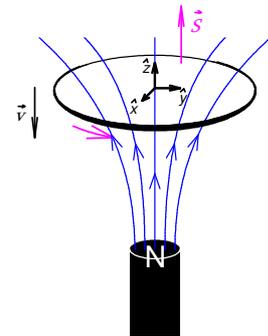


Fig. 8.2.7 Experiência imaginada de indução de corrente num anel circular que se aproxima de uma barra imantada.

O ímã está parado no referencial do laboratório e o campo magnético gerado pelo ímã não depende do tempo. Num sistema de coordenadas cilíndricas, o campo magnético tem a forma

$$\vec{B}(r, \varphi, z) = \hat{r}(\varphi) B_r(r, z) + \hat{z} B_z(r, z) \quad (8.2.22).$$

Vamos supor que R seja tão grande que o campo magnético gerado pela corrente no anel possa ser desprezado. No referencial do laboratório temos a eletromotância magnética

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{magnética} &= \oint_{\partial\mathcal{S}(t)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \\
&= \int_0^{2\pi} \left((-v \hat{z}) \times (\hat{\phi}(\varphi) B_z(\mathbf{z}_0, z) + \hat{z} B_z(\mathbf{z}_0, z)) \right) \cdot \hat{\phi}(\varphi) \mathbf{z}_0 d\varphi = \quad (8.2.23) \\
&= -v \int_0^{2\pi} B_z(\mathbf{z}_0, z) \hat{\phi}(\varphi) \cdot \hat{\phi}(\varphi) \mathbf{z}_0 d\varphi = -v B_z(\mathbf{z}_0, z) 2\pi \mathbf{z}_0
\end{aligned}$$

Esta eletromotância gera uma corrente no anel que vale¹

$$I = -\frac{v B_z(\mathbf{z}_0, z) 2\pi \mathbf{z}_0}{R} \quad (8.2.24),$$

sendo a orientação que define a corrente positiva com o mesmo sentido da orientação da malha.

Agora vamos olhar o campo magnético no referencial do anel. Neste referencial vamos também definir coordenadas cilíndricas, $\langle \mathbf{z}', \varphi', z' \rangle$ e vamos escolher a origem de coordenadas no centro do anel. Desta forma, a coordenada z' dos pontos da superfície circular associada ao anel tem permanentemente o valor zero. Neste referencial o campo magnético depende do tempo. Para o cálculo do fluxo da taxa de variação do campo, precisamos apenas da componente z deste campo. Na medida em que o anel passa pelos lugares $z(t) = -vt$, a componente z do campo magnético na superfície circular do anel atinge os valores

$$B'_z(\mathbf{z}', z'=0, t) = B_z(\mathbf{z} = \mathbf{z}', -vt) \quad (8.2.25).$$

Na verdade a análise da transformação do campo magnético para o referencial do anel é um pouco mais complicada do que isto. Numa disciplina mais avançada de eletromagnetismo se aprende que temos de fato sorte com a componente do campo paralela à velocidade. Esta não sofre nenhuma transformação complicada. Neste aspecto a fórmula (8.2.25) está correta. Mas tem um outro detalhe que está errado. Aprende-se na teoria da relatividade que o tempo marcado por um relógio no referencial do anel não coincide com o tempo marcado por um relógio no referencial do laboratório. Para eventos que ocorrem no plano do anel, os tempos t' do referencial do anel se relacionam com os tempos t do referencial do laboratório da seguinte forma²

$$t' = t \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (8.2.26).$$

Nesta fórmula $c \approx 3 \times 10^8$ m/s é a velocidade da luz no vácuo. Para aplicar a lei de indução no referencial do anel, devemos calcular o fluxo do campo $\partial \vec{B}' / \partial t'$ e não do campo $\partial \vec{B}' / \partial t$. Temos

¹ Nesta aplicação da lei de Ohm foi desconsiderada uma correção relativística. Mais tarde comentaremos a respeito desta correção.

² Compare B. Lesche *Teoria da Relatividade* Editora Livraria da Física 2005.

$$\frac{\partial B'_z(\mathbf{z}', z'=0, t')}{\partial t'} = \left. \frac{\partial B_z(\mathbf{z} = \mathbf{z}', z)}{\partial z} \right|_{z=-vt} (-v) \frac{dt}{dt'} =$$

$$-v \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left. \frac{\partial B_z(\mathbf{z} = \mathbf{z}', z)}{\partial z} \right|_{z=-vt} \quad (8.2.27).$$

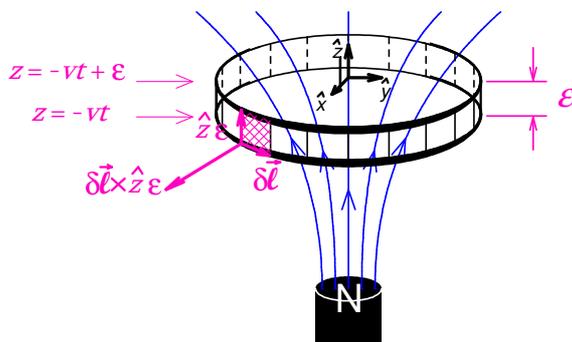
Sem esta estranha diferença entre tempos marcados no referencial do anel e no laboratório, teríamos obtido o resultado sem o fator $(1-v^2/c^2)^{-1/2}$. Para velocidades usualmente empregadas em laboratórios, este fator está muito perto de 1. Você pode convencer-se disso usando nossa famosa fórmula $(1+\epsilon)^n \approx 1+n\epsilon$ para $|\epsilon| \ll 1$. De fato este tipo de complicação relativística ocorre também com a lei de Ohm. Aqui usamos esta lei com um medidor de corrente integrado no condutor, portanto em repouso no referencial do condutor e com um voltímetro não necessariamente parado neste referencial. Para a discussão do valor do fator de proporcionalidade α , podemos nos livrar destas complicações relativísticas. Vimos na fórmula (8.2.24) que a corrente induzida no anel é de ordem v^1 e a diferença entre 1 e $(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ é de ordem v^2 . Então podemos nos livrar da difícil tarefa de pensar sobre uma forma relativística da lei de Ohm simplesmente supondo uma velocidade infinitesimal. Para v infinitesimal temos

$$\iint_{\mathbb{S}'} \frac{\partial B'_z(\mathbf{z}', z'=0, t')}{\partial t'} \cdot d\vec{S} = -v \int_{z=0}^{z_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left. \frac{\partial B_z(\mathbf{z}, z)}{\partial z} \right|_{z=-vt} \mathbf{z} d\mathbf{z} d\varphi =$$

$$= -v \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \iint_{\mathbb{S}(t)} B_z(\mathbf{z}, -vt + \epsilon) \hat{z} \cdot d\vec{S} - \iint_{\mathbb{S}(t)} B_z(\mathbf{z}, -vt) \hat{z} \cdot d\vec{S} \right\} = \quad (8.2.28)$$

$$= -v \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \iint_{\substack{\mathbb{S}(t) \text{ deslocado} \\ z=-vt+\epsilon}} \vec{B}(\mathbf{z}, \varphi, z) \cdot d\vec{S} - \iint_{\substack{\mathbb{S}(t) \\ z=-vt}} \vec{B}(\mathbf{z}, \varphi, z) \cdot d\vec{S} \right\}$$

O que está na chave da última linha desta fórmula é a diferença de duas integrais de



superfície integradas sobre discos circulares deslocados um em relação ao outro por uma distância ϵ . A esta altura do desenvolvimento, todo leitor já deve ser especialista na tarefa de reescrever esta diferença de integrais de fluxo com a ajuda da lei $\oiint_{\partial \mathbb{V}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$. A figura 8.2.6 mostra o volume \mathbb{V} usado para esta finalidade.

Fig. 8.2.8 Volume de altura ϵ para a aplicação da lei de Gauss do campo magnético. A diferença de integrais de superfície da fórmula (8.2.28) deve ser transformada numa integral de linha.

Com o volume \mathbb{V} entre os dois discos e supondo um ϵ infinitesimal obtemos

$$0 = \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\substack{S(t) \\ z=-vt+\epsilon}} \vec{B}(\mathbf{z}, \varphi, z) \cdot d\vec{S} - \iint_{\substack{S(t) \\ z=-vt}} \vec{B}(\mathbf{z}, \varphi, z) \cdot d\vec{S} + \epsilon \oint (d\vec{\ell} \times \hat{z}) \cdot \vec{B} \quad (8.2.29).$$

Combinando isto com a (8.2.28) obtemos

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{\partial B'_z(\mathbf{z}', z'=0, t')}{\partial t'} \cdot d\vec{S} &= v \oint (d\vec{\ell} \times \hat{z}) \cdot \vec{B}(\mathbf{z}_0, \varphi, -vt) = \\ &= v 2\pi \mathbf{z}_0 B_z(\mathbf{z}_0, -vt) \end{aligned} \quad (8.2.30).$$

Agora vamos usar a lei de indução, porém com um fator de proporcionalidade α ainda indeterminado:

$$\oint_{\partial S'} \vec{E}' \cdot d\vec{S} = \alpha \iint_{S'} \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \cdot d\vec{S} \quad (8.2.31).$$

Com o resultado (8.2.30) temos para a integral de linha do campo elétrico:

$$\oint_{\partial S'} \vec{E}' \cdot d\vec{S} = \alpha v 2\pi \mathbf{z}_0 B_z(\mathbf{z}_0, -vt) \quad (8.2.32).$$

No referencial do anel não há eletromotância magnética e a única contribuição para a integral de linha do campo elétrico é RI . Então segue

$$I = \frac{\alpha v 2\pi \mathbf{z}_0 B_z(\mathbf{z}_0, -vt)}{R} \quad (8.2.33).$$

Comparando este valor com o valor (8.2.24) obtido com os cálculos feitos no referencial do laboratório, concluímos que α tem que ter o valor -1 . Esta conclusão é exata e não depende das correções relativísticas, pois ela segue dividindo a diferença dos dois resultados por v e tomando o limite $v \rightarrow 0$. Mas, mesmo não tomando este limite, os dois resultados, quando calculados rigorosamente, coincidem para qualquer valor de v . A (8.2.33) adquire no cálculo relativístico um fator $(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ e a (8.2.24), também por causa de uma correção relativística da lei de Ohm.