

8.3 Motor, gerador, balança de Kibble e galvanômetro

Já explicamos a ideia básica de um motor elétrico na seção 6.6 quando discutimos o torque atuando numa espira de corrente exposta a um campo magnético. Mas a lei de indução introduz um aspecto novo nesta discussão e devemos estudar motores sob este ponto de vista.

Para facilitar a análise, vamos substituir o movimento rotatório, que a maioria dos motores apresenta, por um movimento em linha reta. Imaginem uma barra condutora que possa deslizar sem atrito mecânico em dois trilhos horizontais também condutores. Vamos imaginar ímãs permanentes muito fortes instalados por baixo do plano formado pelos trilhos. Estes ímãs criam supostamente um campo magnético uniforme e perpendicular ao plano dos trilhos. Uma bateria de eletromotância \mathcal{E} e resistência interna desprezível está ligada nos trilhos. A barra tem uma resistência elétrica R e sua massa vale m . Para facilitar, vamos supor que a resistência dos trilhos assim como uma possível resistência elétrica de contato entre trilhos e barra sejam desprezíveis. Esta hipótese não é muito realista, mas ela facilita a análise sem alterar os aspectos essenciais que quero discutir.

A figura 8.3.1 mostra este tipo de motor linear esquematicamente. A resistência da barra está representada como um resistor à parte. A figura mostra ainda uma coordenada x que caracteriza a posição da barra e vetores unitários de uma base ortonormal. O campo magnético gerado pelo ímã permanente é indicado com flechas azuis que entram no plano de papel, enquanto o vetor unitário \hat{z} é mostrado como flecha que sai voando na direção ao observador.

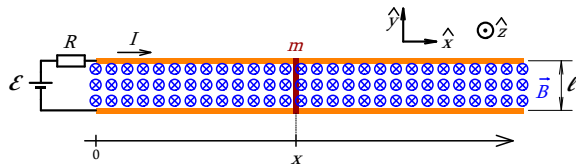


Fig. 8.3.1 Esquema de motor linear. A força magnética gerada por corrente numa barra condutora acelera a barra.

A lei que permite entender os movimentos da barra é a segunda lei de Newton. Podemos escrever esta lei na forma unidimensional considerando a força magnética como a única força que atua na direção \hat{x} .

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = I \hat{x} \cdot \int_{\text{trilho1}}^{\text{trilho2}} d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (8.3.1)$$

O sentido da integração é o mesmo que o sentido positivo da corrente, ou seja, o *trilho 1* é no desenho o trilho superior.

Com a fórmula (8.3.1) temos um exemplo da necessidade de complementar a mecânica com uma teoria das forças. Por enquanto esta igualdade não constitui uma descrição da dinâmica da barra, porque o lado direito, ou seja, a força contém incógnitas cuja relação com a incógnita x ainda não é conhecida. Estas incógnitas são a corrente I e também o campo magnético \vec{B} . Na maioria dos livros que discutem este tipo de problema nem sequer se considera o campo magnético como incógnita. Mas, a todo rigor, ele é uma incógnita, pois a corrente I que flui na malha formada pela bateria, pelos trilhos e pela barra contribui para o campo magnético, e como I é incógnita, \vec{B} também o é.

A dependência do campo magnético da corrente I pode ser calculada com a lei de Biot-Savart. Já fizemos este tipo de cálculo. Mas isto dá muito trabalho e neste momento vamos evitar esta complicação com a ajuda de uma boa desculpa. É fácil arrumar esta desculpa; simplesmente vamos supor que os ímãs permanentes sejam extremamente

fortes de tal forma que o campo magnético gerado pela própria corrente possa ser desprezado. Então vamos supor que

$$\vec{B} \approx -B \hat{z} \quad , \quad B > 0, \quad B = \text{const.} \quad (8.3.2).$$

Com esta hipótese a segunda lei de Newton fica com um aspecto mais simples:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = I \ell B \quad (8.3.3).$$

Mas continua um excesso de incógnitas. Precisamos de mais uma equação que determine I . Ingenuamente poder-se-ia escrever $I = \mathcal{E}/R$. Mas isto está errado! Devemos aplicar corretamente a lei das malhas:

$$-\mathcal{E} + RI = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (8.3.4).$$

Nesta fórmula Φ_m é o fluxo magnético através da malha formada pela bateria, pelo trecho dos trilhos até a barra e pela barra. Na avaliação deste fluxo magnético dever-se-ia também considerar o campo magnético gerado pela própria corrente. Mas de novo vamos desprezar esta contribuição. Na próxima seção trataremos justamente da lei de indução em situações nas quais a contribuição da própria corrente é importante. Mas aqui vamos desprezar esta contribuição. Com esta aproximação o fluxo magnético é bem simples:

$$\Phi_m \approx B \ell x \quad (8.3.5).$$

Inserindo isto na (8.3.4), obtemos

$$-\mathcal{E} + RI = -B \ell \frac{dx}{dt} \quad (8.3.6).$$

Então no lugar do valor \mathcal{E}/R temos

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{B \ell}{R} \frac{dx}{dt} \quad (8.3.7).$$

Substituindo esta expressão da corrente na segunda lei de Newton (8.3.3), obtemos finalmente uma equação diferencial que descreve a dinâmica da barra.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{B \ell}{R} \frac{dx}{dt} \right) \ell B \quad (8.3.8)$$

Percebemos que a equação poderá ser reduzida a uma equação diferencial de primeira ordem se usarmos a velocidade $v = dx/dt$ como incógnita:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mathcal{E} \ell B}{m R} - \frac{B^2 \ell^2}{m R} v \quad (8.3.9).$$

Esta equação é do tipo inhomogêneo-linear, com uma inhomogeneidade constante. Então, seguindo nossa receita de resolver tal tipo de equação, faremos a tentativa de uma solução particular constante: $v_p = \text{const.}$. A equação (8.3.9) determina o valor desta constante:

$$v_p = \frac{\mathcal{E}}{\ell B} \quad (8.3.10).$$

Para não perdermos o hábito de sempre olhar nossos passos criticamente, verificamos rapidamente se a expressão $\mathcal{E}/\ell B$ é mesmo uma velocidade. Escrevendo as unidades destas grandezas, obtemos $V/(m \times Vs m^{-2}) = m/s$. Isto está perfeito.

A equação homogênea é do tipo da conta bancária com juros negativos e a solução é bem conhecida. Podemos logo escrever a solução geral completa:

$$v_G(t) = \frac{\mathcal{E}}{\ell B} + A \exp\left\{-\frac{B^2 \ell^2}{mR}t\right\} \quad (8.3.11).$$

Se supusermos a condição inicial $v(0)=0$, ou seja, a barra partindo do repouso, obtemos

$$v(t) = \frac{\mathcal{E}}{\ell B} \left(1 - \exp\left\{-\frac{B^2 \ell^2}{mR}t\right\}\right) \quad (8.3.12).$$

Esta é a conhecida solução do problema do paraquedista ou da esfera caindo num fluido viscoso. A figura 8.3.2 mostra este comportamento.

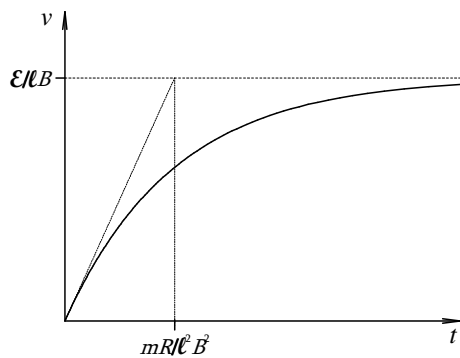


Fig. 8.3.2 Velocidade de um motor linear em função do tempo na ausência de forças não magnéticas.

É interessante analisar a situação assintótica para grandes tempos. O limite $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ é o valor v_p . Com a fórmula (8.3.9) segue que a corrente nesta condição vale zero. Podemos entender este resultado sem resolver nenhuma equação diferencial. Pois se a barra executa um movimento uniforme, a força atuando sobre a barra tem que ser nula. Então se a força

magnética for a única, esta tem que valer zero e conseqüentemente temos $I=0$. Podemos entender este resultado também usando um argumento energético: com velocidade constante e sem força de atrito ou outra força externa, a bateria não precisa fornecer nenhuma energia e conseqüentemente deve valer $I=0$. Durante a fase de aceleração, a bateria fornece energia (Exercício E 8.2).

Mas como podemos entender que não flui corrente numa simples malha com uma bateria e um resistor? O segredo está na lei de indução: esta malha não é simples, a barra em movimento imersa num campo magnético constitui uma segunda fonte e, na condição $v = \mathcal{E}/\ell B$, esta fonte tem a mesma eletromotância da bateria. Então nesta condição, o circuito equivale ao circuito da figura 8.3.3 e é obvio que não flui corrente.

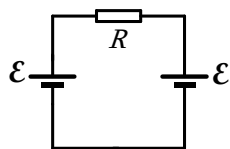


Fig. 8.3.3 Circuito equivalente para o sistema da figura 8.3.1 na condição $v = \mathcal{E}/\ell B$.

A situação muda se acrescentarmos uma força de atrito mecânico na dinâmica do sistema ou uma outra força. Vamos imaginar que haja um atrito do tipo viscoso e que amarremos uma corda na barra que passa por uma roldana e segura uma massa M . A figura 8.3.4. mostra este esquema em vista lateral. A corda com tensão T exercerá uma força adicional $\vec{F}_c = -T\hat{x}$ sobre a barra. A equação da lei das malhas (8.3.7) não sofre

nenhuma mudança por causa destas forças novas. Mas na equação de Newton teremos mais dois termos. Então no lugar da equação (8.3.8) temos

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{B \ell}{R} \frac{dx}{dt} \right) \ell B - \eta \frac{dx}{dt} - T \quad (8.3.13)$$

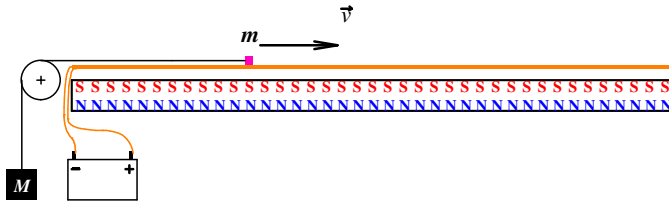


Fig. 8.3.4 Motor linear levantando uma massa M .

Nesta fórmula, $-\eta dx/dt$ representa um termo de atrito viscoso. Numa situação geral, a tração T dependeria da própria aceleração da

barra. Mas neste momento quero somente considerar um movimento uniforme da barra e neste caso a tração é constante valendo Mg , sendo g a aceleração da gravidade. A condição de movimento uniforme é

$$0 = \left(\frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{B \ell}{R} \frac{dx}{dt} \right) \ell B - \eta \frac{dx}{dt} - T \quad (8.3.14).$$

Desta condição obtemos a velocidade

$$v = \frac{\frac{\mathcal{E} \ell B}{R} - T}{\frac{B^2 \ell^2}{R} + \eta} \quad (8.3.15)$$

e com a lei das malhas (8.3.7) obtemos o valor da corrente

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{\frac{\mathcal{E} \ell^2 B^2}{R} - B \ell T}{B^2 \ell^2 + \eta R} \quad (8.3.16)$$

Para $\eta > 0$ ou $T > 0$ esta corrente não é zero e a bateria fornece energia. Nem toda energia fornecida pela bateria é usada para levantar o peso e para vencer o atrito viscoso. Uma parte aparece como energia térmica na resistência R . No exercício E 8.3 o leitor pode avaliar estes balanços de energia.

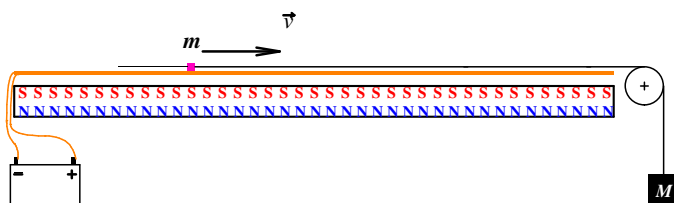


Fig. 8.3.5 Gerador elétrico.

O arranjo da figura 8.3.4 funciona como um motor elétrico, isto é, como uma máquina que transforma energia elétrica em energia mecânica. Podemos fazer

também o inverso. Imaginem que coloquemos a roldana na outra extremidade dos trilhos como indicado na figura 8.3.5. Nesta configuração a força exercida pela corda vale $\vec{F}_c = +T\hat{x}$. Considerando de novo apenas o caso de movimento uniforme, obtemos no lugar da fórmula (8.3.16) a seguinte expressão para a corrente:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{\mathcal{E} \ell^2 B^2}{R B^2 \ell^2 + \eta R} + \frac{B \ell T}{B^2 \ell^2 + \eta R} \quad (8.3.17).$$

Percebemos que agora a corrente pode ser negativa. Neste caso a bateria seria carregada. Nesta configuração temos uma máquina que transforma energia mecânica em energia elétrica.

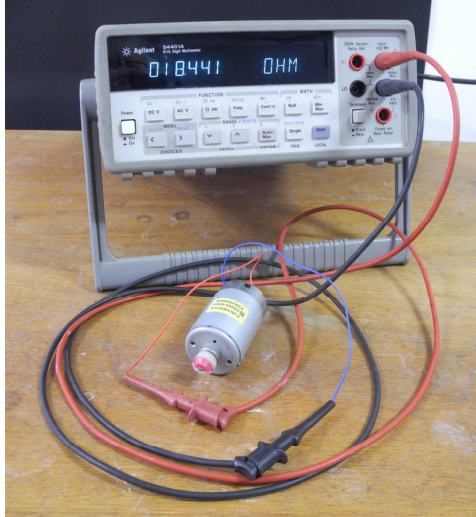
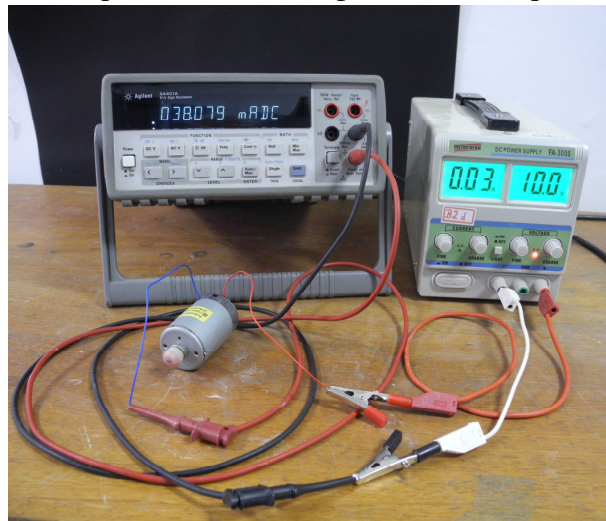


Fig. 8.3.6 Medida da resistência de um motor elétrico. O instrumento indica um pouco mais que $18,4\Omega$

Veremos todos estes resultados qualitativamente com um pequeno motor, porém com um motor que gira e não com um motor linear. A figura 8.3.6 mostra um pequeno motor ligado num ohmímetro. O motor tem aproximadamente uma resistência de $18,4\Omega$. Se ligarmos este motor numa fonte de 10 V , esperamos ingenuamente uma corrente de $0,543\text{ A}$. Mas a figura 8.3.7 mostra que a corrente é apenas 38 mA quando

deixamos o motor girar livremente. Sem atrito mecânico esta corrente seria até exatamente zero. Na figura 8.3.8 tento frear a rotação do motor com um dedo da mão e notamos que o valor da corrente aumentou para quase $0,158\text{ A}$. Na figura 8.3.9 o motor está ligado num voltímetro e eu giro o eixo. Percebe-se uma voltagem induzida. Então neste caso o motor funciona como gerador. Fig.8.3.7 Motor girando livremente provoca uma corrente muito aquém do valor ôhmico. →



←Fig. 8.3.8 O atrito da roda montada no eixo do motor com o dedo aumenta o valor da corrente.

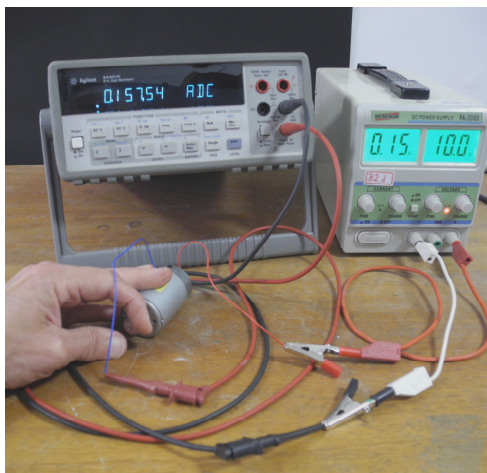
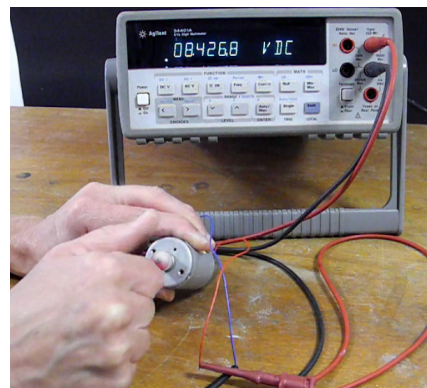
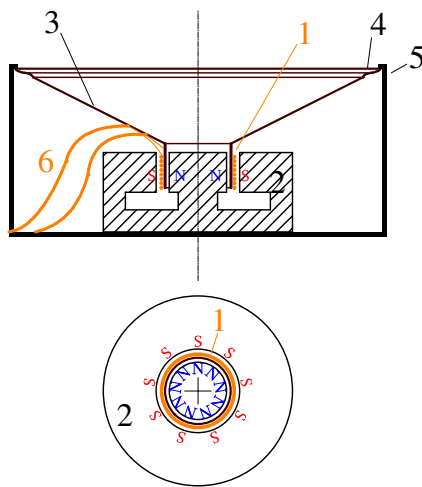


Fig. 8.3.9 Motor usado como gerador.



Nas aplicações, nem todos os motores são de rotação. Alguns motores são realmente lineares, mas geralmente não usam trilhos para transmitir a corrente para o condutor em movimento. Os alto-falantes são exemplos de motores lineares. Neles o condutor móvel é um arame de cobre fino enrolado num cilindro de papelão. Este solenoide é mergulhado numa fenda circular na qual existe um forte campo magnético radial. O cilindro de papelão está preso num funil de papelão que possui na parte mais aberta uma ondulação. Esta ondulação torna a beirada do funil maleável. Um suporte segura o funil nesta beirada. Por causa da ondulação da beirada do funil, este pode ser movido pelo motor linear para frente e para trás movimentando com isto o ar criando ondas acústicas. No caso dos alto-falantes, os movimentos não são grandes e a transmissão da corrente elétrica para o condutor móvel é feita com dois arames muito flexíveis fabricados de uma malha de arames finos de cobre. A figura 8.3.10 mostra o esquema de um alto-falante.



No caso do alto-falante a conversão de motor em gerador também pode ser feita. Estes alto-falantes magnéticos podem também ser usados como microfones. Nesta função eles são geradores. Se o leitor encontrar algum rádio jogado no lixo, ele deve aproveitar a oportunidade, deve retirar um alto-falante e desmontá-lo para conhecer os detalhes deste equipamento.

Fig. 8.3.10 Esquema de um alto-falante magnético: 1. solenoide mergulhado em fenda circular, 2. ímã, 3. funil de papelão, 4. beirada ondulada do funil, 5. suporte externo, 6. fios flexíveis.

Um motor linear muito parecido é usado na metrologia na tentativa de substituir o antigo padrão de quilograma por um ancorado em padrões quânticos de ampère e volt¹. Neste motor o condutor móvel também é um solenoide num campo magnético radial. Porém o solenoide não está preso num funil, ele está pendurado numa balança feita com uma roda² apoiada em duas cunhas que servem não apenas como eixo de giro da roda, mas são também usadas para transmitir a corrente elétrica. Primeiramente os pesos do solenoide e de seu suporte são perfeitamente equilibrados com uma pequena massa m_0 . Depois duas medidas são feitas com este motor linear. Na primeira, chamada de modo estático, a força peso que atua sobre uma massa adicional m pendurada no mesmo lado do solenoide é equilibrada com uma força magnética. A corrente necessária para esta realização de equilíbrio é medida com um amperímetro extremamente preciso. A geometria desta experiência é diferente do nosso motor linear feito com uma barra e dois trilhos. Mas podemos tranquilamente usar as nossas fórmulas para entender as experiências feitas com esta balança. O comprimento ℓ da barra corresponde ao comprimento do fio enrolado no solenoide pendurado. A condição de equilíbrio é

$$mg = I\ell B \quad (8.3.18).$$

¹ Kibble, B. P. (1975), Sanders, J. H.; Wapstra, A. H., eds., Atomic Masses and Fundamental Constants 5, New York: Plenum, pp. 545–51

Stock M.: *The watt balance: determination of the Planck constant and redefinition of the kilogram*, Phil. Trans. R. Soc. A 369 (2011), S. 3936-3953

² Na invenção original feita por Bryan Kibble em 1975, a balança não usava uma roda, mas um feixe de balança convencional.

Nesta fórmula B é o módulo do campo magnético e g é a aceleração da gravidade, que deve ser medida também com extrema precisão. Numa segunda experiência, chamada de modo de velocidade, com exatamente o mesmo campo magnético, a bobina é movida na direção vertical com uma velocidade constante muito precisamente medida. Nesta segunda experiência não há corrente no solenoide. No lugar da fonte e do amperímetro, se conecta um voltímetro na bobina. Este voltímetro também deve ser extremamente preciso e estar extremamente perto da condição de voltímetro ideal. Este instrumento indica a eletromotância magnética induzida na bobina. Esta vale

$$\mathcal{E} = v \ell B \quad (8.3.19).$$

Podemos eliminar o produto ℓB das duas fórmulas e obtemos uma expressão para a massa em termos da aceleração da gravidade, da velocidade, da voltagem e da corrente:

$$m = \frac{I \mathcal{E}}{g v} \quad (8.3.20)$$

Pode-se interpretar a junção das duas experiências como uma comparação de uma potência mecânica $m g v$ com uma potência elétrica $I \mathcal{E}$. Como Watt é uma unidade de potência, este equipamento recebeu o nome de *balança de Watt*³. Usa-se também o nome *balança de Kibble* homenageando o inventor Bryan Kibble. As figuras 8.3.11 e 8.3.12 mostram as duas medidas esquematicamente.

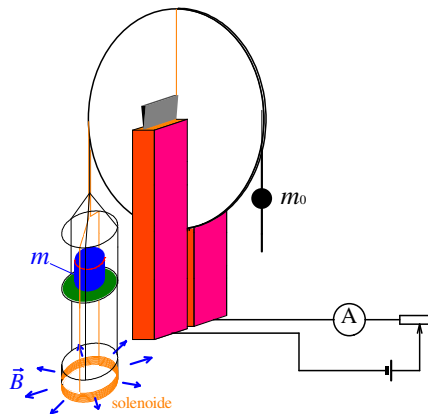
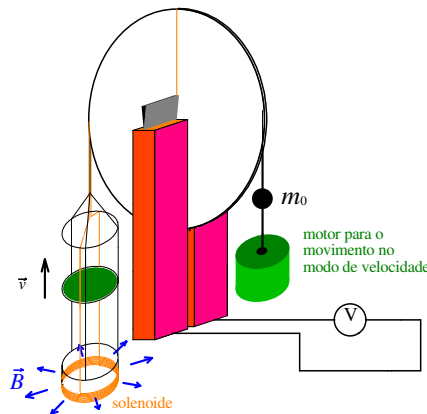


Fig. 8.3.11 Balança de Kibble usada no modo de equilibrar o peso de uma massa m com força magnética. ←

Fig. 8.3.12 Balança de Kibble usada no modo de velocidade. ↓



³ Balança de Watt é um péssimo nome. Poder-se-ia chamar este instrumento de balança de potência, mas não de balança de Watt. É sinal de ignorância pensar que uma grandeza é definida pela sua unidade.

A figura 8.3.13 mostra uma fotografia de tal equipamento.

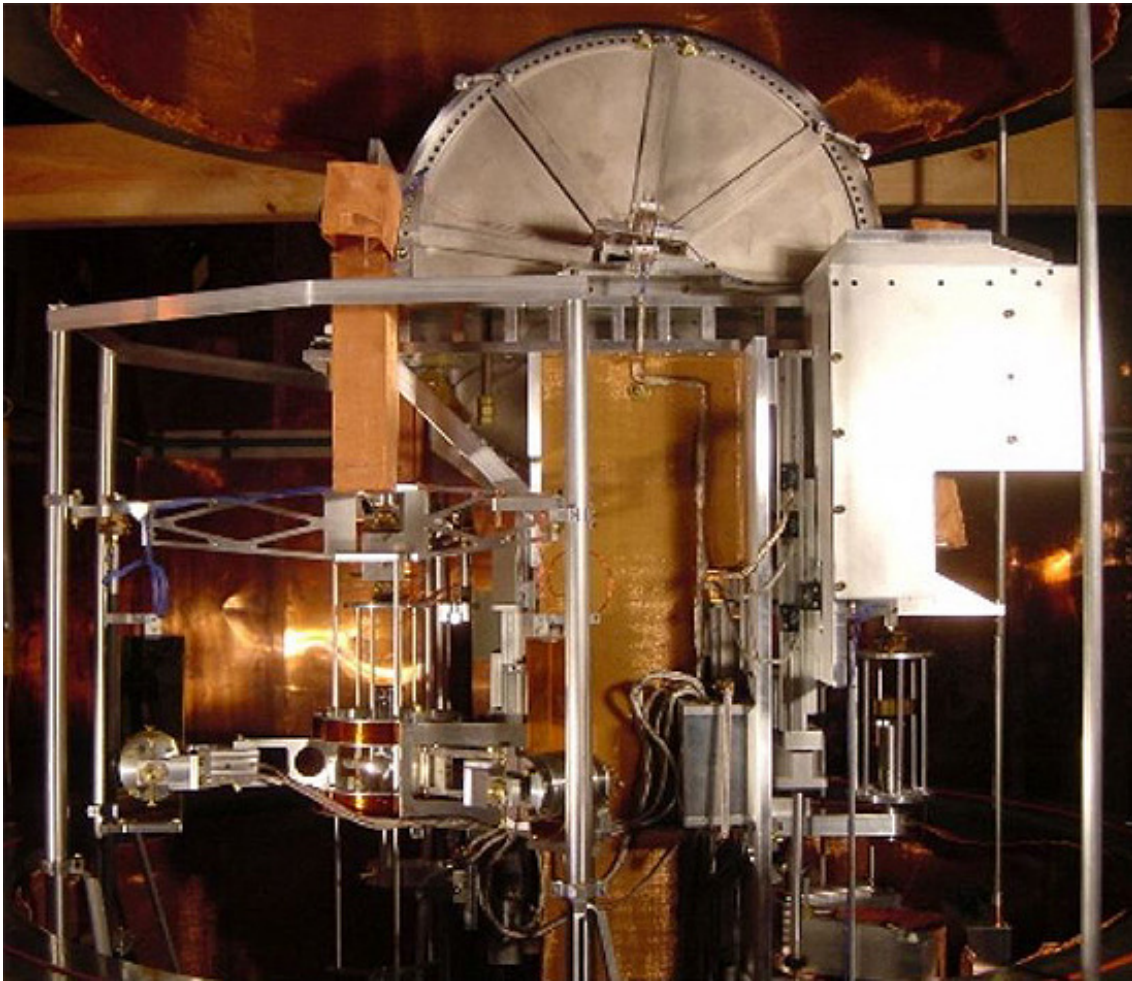


Fig. 8.3.13: Imagem de uma balança de Watt montada no National Institute of Standards and Technology (USA). Fotografia original feita por Richard Steiner. A imagem foi tirada da Wikipedia. A roda tem um diâmetro de 0,61 m. Acima da balança se vê a borda inferior de uma campânula de vácuo. Durante a experiência esta campânula é baixada e a medida é feita em alto vácuo para eliminar forças de empuxo e para tornar a medida interferométrica⁴ da velocidade na segunda parte da medida mais precisa.

O nosso modelo simples da barra deslizando em trilhos num campo magnético constante pode ser usado para entender mais um instrumento de medida. Vamos substituir a força de uma corda por uma força elástica de uma mola espiral como indicado na figura 8.3.14.

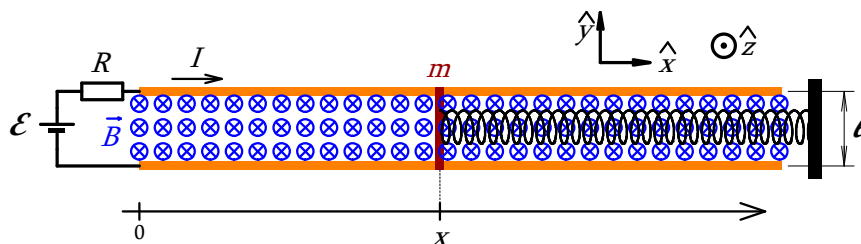


Fig. 8.3.14
Modelo de galvanômetro.

⁴ Interferometria é uma técnica de medir diversas grandezas usando o fenômeno de interferência de ondas. Aqui se usam ondas luminosas.

Então no lugar do termo de tração da corda, ou seja, no lugar do último termo na fórmula (8.3.13), vamos colocar uma força elástica:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \left(\frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{B \ell}{R} \frac{dx}{dt} \right) \ell B - \eta \frac{dx}{dt} - \kappa(x - x_0) \quad (8.3.21)$$

Nesta fórmula κ é a constante de mola e a constante x_0 é determinada pelo comprimento natural da mola e pela posição do suporte da mola. Esta equação é a equação diferencial de um oscilador harmônico amortecido com posição de equilíbrio

$$x_{\text{equilíbrio}} = \frac{\mathcal{E} \ell B}{R \kappa} + x_0 \quad (8.3.22),$$

constante de amortecimento

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{B^2 \ell^2}{m R} + \frac{\eta}{m} \right) \quad (8.3.23)$$

e frequência angular não amortecida

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}} \quad (8.3.24).$$

A medição da posição de equilíbrio fornece informação sobre a eletromotância \mathcal{E} ou sobre a corrente \mathcal{E}/R . Então temos aqui um galvanômetro. Mas este equipamento tem um comportamento inconveniente. Imagine que começamos com uma eletromotância nula e num determinado instante ligamos uma bateria com eletromotância $\mathcal{E} > 0$. Mas a barra não se deslocará diretamente e de forma rápida da posição original x_0 para a nova posição de equilíbrio descrita pela fórmula (8.3.22). Se $\alpha < \omega_0$, a barra oscila em volta do novo ponto de equilíbrio e lentamente a amplitude desta oscilação diminui. O observador precisa ter muita paciência para finalmente poder medir a nova posição de equilíbrio. Se $\alpha > \omega_0$, o sistema é superamortecido e se aproxima exponencialmente e de forma lenta do novo ponto de equilíbrio. De novo o observador precisa ter muita paciência. A forma mais rápida de estabelecer o novo equilíbrio é obtida usando valores dos parâmetros tais que $\alpha = \omega_0$, ou seja, na condição de amortecimento crítico. Nos galvanômetros este amortecimento é geralmente obtido pelo ponteiro que sofre atrito viscoso no ar. Um caso interessante é o nosso multímetro de demonstração que usamos na discussão do divisor de tensão (fig. 5.7.3) ou na lei de indução (fig. 8.1.4). Ele foi construído com um galvanômetro de espelho. Isto significa que a orientação da bobina giratória não é indicada por uma haste longa, mas com a ajuda de um pequeno espelho. Este espelho gira praticamente sem nenhuma força de atrito viscoso. Na construção deste aparato tive que usar o termo $B^2 \ell^2 / (2mR)$ para conseguir um amortecimento crítico. Mas isto impossibilita a alteração do fundo de escala ou a transformação do galvanômetro em voltímetro colocando resistores em paralelo ou em série. Então eu tive que usar sempre o mesmo resistor. Para as transformações de fundo de escala e a transformação do galvanômetro em voltímetro, eu usei uma eletrônica adicional cujo funcionamento será discutido numa seção futura.

Exercícios:

E 8.3.1: O expoente da função exponencial da fórmula (8.3.12) tem que ser um número puro. Então $B^2 \ell^2 / (mR)$ deve ser o inverso de um tempo. Mostre que esta expressão é realmente um inverso de um tempo.

E 8.3.2: Considere o motor linear da figura 8.3.1 sem atrito e sem força externa. Calcule a energia fornecida pela bateria durante a fase de aceleração da barra, ou seja, no intervalo de tempo $[0, \infty)$. Compare esta energia com a energia cinética final da barra.

E 8.3.3: Analise as potências envolvidas no funcionamento do motor linear em regime de velocidade constante na presença da força viscosa e da força Mg de uma massa pendurada no fio da figura 8.3.4.

E 8.3.4: Pense nas possíveis fontes de erro experimental nas medidas de massa com uma balança de Kibble. Por que se pendura a massa m no mesmo lado onde está o solenoide e não no lado oposto?

E 8.3.5: Escreva os pontos de destaque desta seção.