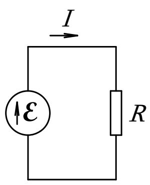
8.4 O circuito RL



Como a lei das malhas sofreu uma alteração, devemos rever os antigos resultados da seção 5.5 que trata de circuitos. Começamos com o circuito simples de um resistor ligado numa fonte como aquele da figura 8.4.1.

Fig. 8.4.1 Circuito simples de uma malha com fonte de voltagem ideal ligada num resistor.

No lugar da antiga lei das malhas

$$-\mathcal{E} \quad + \quad RI \quad = \quad 0 \qquad (8.4.1),$$

vale agora

$$-\mathcal{E} \quad + \quad RI \quad = \quad -\frac{d\Phi_m}{dt} \qquad (8.4.2).$$

Nesta fórmula, Φ_m é o fluxo magnético através da área da malha, aquela área que está mostrada hachurada na figura 8.4.2.

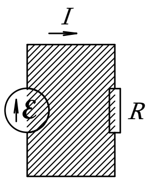


Fig. 8.4.2 Circuito da figura 8.4.1 com indicação de área de integração para cálculo de fluxo magnético.

Então tudo que fizemos na seção 5.5. estava errado? Não, enquanto não mexemos com ímãs perto do circuito e enquanto discutimos somente correntes estacionárias, a antiga análise é válida. Mas, mesmo sem a presença de ímãs, o termo do lado direito da fórmula (8.4.2) tem que ser considerado quando há variações temporais da corrente. Porque, neste caso, o campo magnético gerado pela própria corrente terá uma dependência temporal e o termo $d\Phi_m / dt$ será diferente de zero.

Agora, diferente de zero pode ainda significar um valor tão pequeno que $d\Phi_m / dt$ seja desprezível em comparação com o RI . A importância do termo $d\Phi_m / dt$ depende de três fatores: a rapidez das variações da corrente, o tamanho da área do circuito e a exigência de precisão para a corrente $I(t)$. Esta área depende da geometria. Se a forma da malha for uma forma simples, retangular de alguns centímetros de extensão e se olharmos as correntes numa escala de tempo de segundos querendo saber seus valores com precisão de, digamos, uma parte em 10^4, podemos tranquilamente desprezar o termo $d\Phi_m / dt$. Mas, se olharmos para fenômenos na escala de picossegundos, ou se estendermos a malha em volta de um campo de futebol, a situação muda.

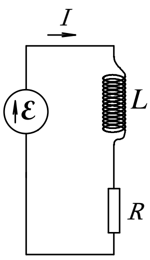


Fig. 8.4.3 Circuito simples de uma malha com fonte de voltagem ideal ligada num resistor com uma indicação que a geometria da malha não permite desprezar o termo da indução magnética.

Geralmente os circuitos de eletrônica cabem em caixinhas de alguns centímetros e normalmente não temos interesse em estudar uma malha que contorna um campo esportivo. Mas, com uma geometria diferente dos condutores, a área de integração pode ser grande mesmo com um circuito que cabe numa caixa de sapato. Basta que enrolemos o fio formando um solenoide. Para indicar num esquema de circuito que a área de integração é tão grande que o termo $d\Phi_m / dt$ não deve ser desconsiderado, desenha-se no caso uma parte dos fios de conexão em forma de espiral como indicado na figura 8.4.3.

Para poder considerar o termo indutivo na lei das malhas (8.4.2), precisamos de uma fórmula que expresse o fluxo magnético Φ_m em termos da corrente I da malha. O leitor que se lembra da lei de Biot-Savart e das dificuldades de calcular integrais de superfície, certamente sentirá neste momento uma sensação desagradável de horror. Mas a situação é menos grave do que parece. Por mais complicada que a lei de Biot-Savart possa ser, a relação entre corrente e campo é linear. A integração que relaciona o campo com o fluxo também é uma operação linear. Então não resta outra; o fluxo Φ_m deve ser proporcional ao valor da corrente com uma constante de proporcionalidade que é determinada pela geometria da malha. Este fator de proporcionalidade é chamado de indutância da malha e é abreviado pela letra L. No circuito, o valor L é anotado ao lado do símbolo que indica que a parte indutiva não pode ser desprezada. Então temos

$$\Phi_m \quad = \quad L\,I \tag{8.4.3}$$

A definição da indutância da malha envolve uma escolha de orientação. Como sempre a orientação da superfície que define o fluxo está atrelada à orientação da integração de linha sobre a beirada da superfície. Lembrem-se de que os termos da esquerda da fórmula (8.4.2) fazem parte da integral de linha $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$. Da maneira como a fórmula (8.4.2) está escrita (com $+RI$), a seta de definição da corrente aponta no mesmo sentido da integração. Juntando esta informação com a regra da mão direita percebemos que a constante de proporcionalidade L é necessariamente positiva.

Podemos usar Vs como unidade do fluxo magnético e A como unidade da corrente. Consequentemente a combinação de unidades $\mathrm{Vs\,A^{-1}}$ pode ser usada como unidade da indutância. Esta unidade recebeu o nome de Henry e é abreviada com H:

$$\mathrm{H} \quad \underset{def.}{=} \quad \mathrm{Vs\,A^{-1}} \tag{8.4.4}$$

O cálculo da indutância L para uma dada geometria de malha pode de fato ser muito difícil. Na próxima seção faremos um cálculo destes, mas de forma aproximada. Consideraremos um circuito de geometria retangular com uma parte do fio enrolada densamente formando um solenoide comprido. Neste caso, a contribuição para o fluxo da parte da superfície da malha que fica dentro do solenoide pode ser calculada, e a parte do retângulo externo será simplesmente desprezada. Ou seja, a maior parte da indutância provém do solenoide, e o resto é geralmente desprezado. Desta forma fala-se da "*indutância do solenoide*" e considera-se este como um novo elemento do circuito chamado de *indutor*. Mas, na verdade, a indutância é uma propriedade de toda a malha.

Aqui vamos analisar somente circuitos que não mudam sua geometria temporalmente. Então esta constante de proporcionalidade L não depende do tempo e a lei das malhas toma a seguinte forma:

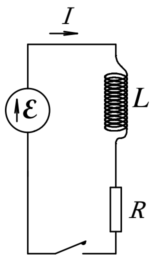
$$-\mathcal{E} \quad + \quad RI \quad = \quad -L\frac{dI}{dt} \tag{8.4.5}$$

No lugar da equação algébrica (8.4.1), de que tratamos na seção 5.5, temos agora uma equação diferencial para a função incógnita $I(\cdot)$. Esta equação é do tipo inhomogêneo -linear com uma inhomogeneidade constante. Já temos vasta experiência com este tipo de equação. Faremos a tentativa de uma solução particular constante: $I_p = const.$. Quando substituímos esta tentativa na equação, resulta exatamente a equação algébrica da seção 5.5:

$$-\mathcal{E} \quad + \quad RI_p \quad = \quad 0 \qquad (8.4.6),$$

cuja solução é $I_p = \mathcal{E}/R$. A equação homogênea é a velha conhecida da caderneta de poupança com uma taxa de juros negativa: $-R/L$. Então a solução geral é

$$I_G(t) \quad = \quad \frac{\mathcal{E}}{R} \quad + \quad A\exp\left\{-\frac{R}{L}t\right\} \qquad (8.4.7).$$



Qual seria uma condição inicial realista para este circuito? Certamente este circuito foi montado em algum momento. Ele não existiu deste o início do mundo. Então a malha não estava sempre fechada. Podemos explicitar este fato, desenhando um interruptor no circuito, como na figura 8.4.4. Vamos escolher a origem na escala dos tempos como o instante no qual se fecha o interruptor.

Fig. 8.4.4 Circuito da figura 8.4.3 com interruptor aberto.

Podemos introduzir o interruptor também na fórmula da lei das malhas (8.4.5). Basta que consideremos o resistor e o interruptor como dois resistores em série cuja resistência equivalente depende do tempo.

$$\begin{aligned} -\mathcal{E} \quad + \quad R_{equiv}I \quad &= \quad -L\frac{dI}{dt} \\ \text{com} & \qquad\qquad (8.4.8). \\ R_{equiv}(t) \quad &= \quad \begin{cases} \infty & \text{para} \quad t<0 \\ R & \text{para} \quad t\geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Para $t<0$ a corrente é zero e a derivada desta função constante é zero também. Portanto o lado esquerdo da equação (8.4.8) é zero para tempos negativos. No instante $t=0$, o valor do lado esquerdo desta equação pula descontinuamente para um valor diferente. Mas este pulo é certamente finito, pois agora todas as expressões adquirem valores finitos. Se integrarmos a equação (8.4.8) sobre o tempo começando num instante t_1 e terminando num instante t_2 obtemos:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{-\mathcal{E}+R_{equiv}(t)I(t)\right\}dt \quad = \quad -L\left\{I(t_2)-I(t_1)\right\} \qquad (8.4.9)$$

O fato de que o integrando do lado esquerdo é uma função limitada implica que o valor desta integral necessariamente tende a zero quando mandamos t_2 para t_1. Então segue

$$\lim_{t_2\to t_1} I(t_2) \quad = \quad I(t_1) \qquad (8.4.10),$$

e a função $I(\cdot)$ é necessariamente uma função contínua. Isto é um resultado importante: mesmo acionando interruptores abruptamente, a lei de indução garante que os valores das correntes num circuito não pulam!

Para o nosso caso, esta continuidade da função $I(\cdot)$ fornece a condição inicial $I(0)=0$. Com esta condição obtemos a solução

$$I(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t < 0 \\ \dfrac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - \exp\left\{-\dfrac{R}{L}t\right\}\right) & \text{para} \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{8.4.11}$$

A figura 8.4.5 mostra o gráfico desta função. A figura 8.4.6 mostra uma realização experimental com uma bobina de 9,70 mH. Nesta experiência usei o osciloscópio para o registro da corrente embora este instrumento funcione como um voltímetro e não como amperímetro. Para obter informação a respeito da corrente, meço a tensão no resistor e esta tensão é proporcional à corrente.

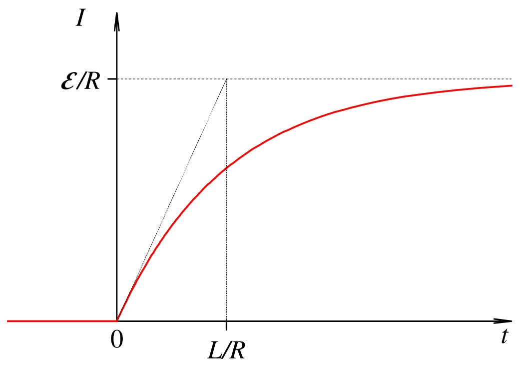


Fig. 8.4.5 Gráfico da solução (8.4.11).

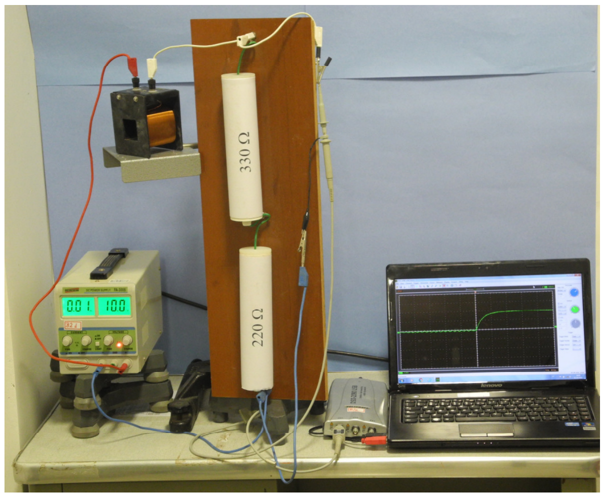


Fig. 8.4.6 Realização experimental do circuito da figura 8.4.4. Configuração do osciloscópio: *t*: 40µs/Divisão , y: Acopalmento=DC, Ponta 10x, 5 V/Divisão, Trigger Sweep= Single, Edge, Slope +.

O circuito que discutimos pode ainda ser simplificado. Podemos eliminar a fonte como indicado na figura 8.4.7. Na seção 5.5, onde estudamos circuitos no regime estacionário, este circuito teria sido trivial. A solução do problema seria simplesmente $I = 0$.

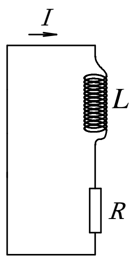


Fig. 8.4.7 Circuito RL sem fonte.

Mas, admitindo correntes variáveis no tempo, este circuito é interessante. Podemos escrever a solução geral imediatamente. Basta escolher $\mathcal{E} = 0$ na solução geral do circuito que acabamos de discutir:

$$I(t) \quad = \quad I_0 \exp\left\{-\frac{R}{L}t\right\} \tag{8.4.12}$$

Naturalmente deve-se injetar alguma corrente inicial $I_0 \neq 0$ para obter uma solução interessante. Esta criação de condição inicial pode, por exemplo, ser realizada com a ajuda de um campo magnético externo que varia abruptamente.

O que é interessante nesta solução é o balanço de energia. A corrente que flui no circuito resulta na deposição de energia térmica no resistor. A potência depositada neste resistor vale

$$P(t) \quad = \quad R\left(I(t)\right)^2 \quad = \quad R\,I_0^{\,2} \exp\left\{-2\frac{R}{L}t\right\} \tag{8.4.13}$$

A energia total depositada durante o intervalo de tempo $[0,\infty)$ é

$$E \;=\; \int_0^\infty P(t)\,dt \;=\; R I_0^{\,2}\left(\frac{-L}{2R}\right)\exp\left\{-2\frac{R}{L}t\right\}\Bigg|_0^\infty \;=\; \frac{L}{2}I_0^{\,2} \qquad (8.4.14)$$

De onde surgiu esta energia? Acreditando numa lei de conservação de energia, concluímos que esta energia deve ter existido inicialmente em forma de energia do campo magnético. Então chegamos a uma conclusão importante: a energia do campo magnético de uma malha de indutância L na qual corre a corrente I_0 vale

$$\boxed{E_{Mag} \;=\; \frac{L}{2}I_0^{\,2}} \qquad (8.4.15)$$

Esta fórmula é fácil de lembrar depois de ter aprendido a fórmula da energia elétrica num capacitor

$$E_{El} \;=\; \frac{C}{2}V_C^{\,2} \qquad (8.4.16),$$

que é, por sua vez, inesquecível por causa da sua semelhança com a energia cinética de uma partícula.

Terminamos esta seção com a discussão de uma desagradável combinação do resultado da energia magnética com a continuidade da função $I(\cdot)$. O que acontece quando você toca com as duas mãos nos polos de uma bateria de carro, que tem uma eletromotância de 12 V? - Nada de especial!

A resistência do seu corpo é tão elevada que a corrente que atravessa o seu corpo é fraca demais para sentir algum efeito. Mas se envolvermos um indutor neste contato com a fonte, podemos ter surpresas desagradáveis. Imagine o seguinte circuito.

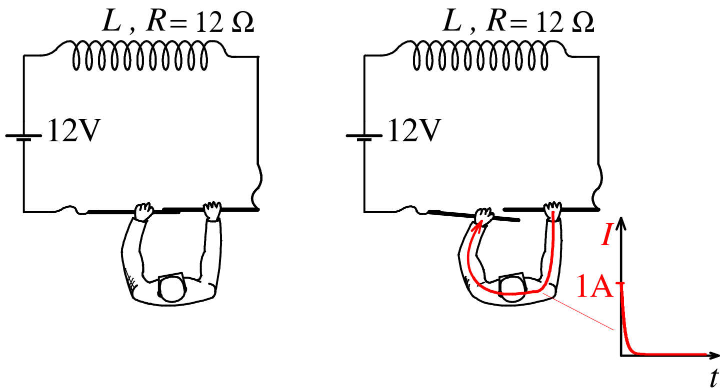


Fig. 8.4.8 Como levar um choque numa bateria de 12V.

Um solenoide de indutância L e resistência pequena, digamos de $12\,\Omega$, está ligado com uma das suas terminações num dos polos de uma bateria de carro de 12 V. A outra terminação é um fio desencapado que você segura na sua mão direita. A sua mão esquerda segura um fio desencapado ligado no segundo polo da bateria. Agora você fecha o circuito. Depois de alguns milissegundos se estabelece neste circuito uma corrente de aproximadamente 1 A. Até este ponto não há nada desagradável nesta experiência. Mas depois de algum tempo você resolve separar os dois fios. Agora entra a continuidade da função $I(\cdot)$ na história. O ato de separar os fios repentinamente substitui a resistência de $12\,\Omega$ desta malha pela resistência alta do seu corpo em série com os $12\,\Omega$ da bobina. Mas a corrente continua no valor de 1 A e esta corrente atravessa agora o seu corpo. 1 A fluindo no corpo humano não é nada agradável!

Felizmente este valor alto da corrente decai rapidamente de forma exponencial com constante de tempo $L/\left(R_{corpo}+R\right)$. Dependendo dos parâmetros L e R_{corpo}, a experiência pode ser apenas uma brincadeira, ou pode apresentar perigo de morte[1]. O que se deposita de energia no corpo é a energia magnética armazenada na bobina. A figura 8.4.8 mostra esta "brincadeira" esquematicamente.

O que era apenas uma "brincadeira" pode ser um problema para certos circuitos eletrônicos. É comum que se queira ligar ou desligar uma corrente de elevado valor controlado por um circuito eletrônico. Uma chave mecânica, ou seja, um interruptor é ainda o meio mais simples para ligar e desligar correntes de alto valor. Mas o acionamento deste interruptor deve funcionar eletronicamente. O dispositivo que permite isto é um relé. Isto é simplesmente um interruptor cuja parte móvel é movida por uma chapa de ferro que pode ser atraída por uma bobina quando se injeta corrente na mesma. A figura 8.4.9 mostra um pequeno relé que é usado em automóveis.

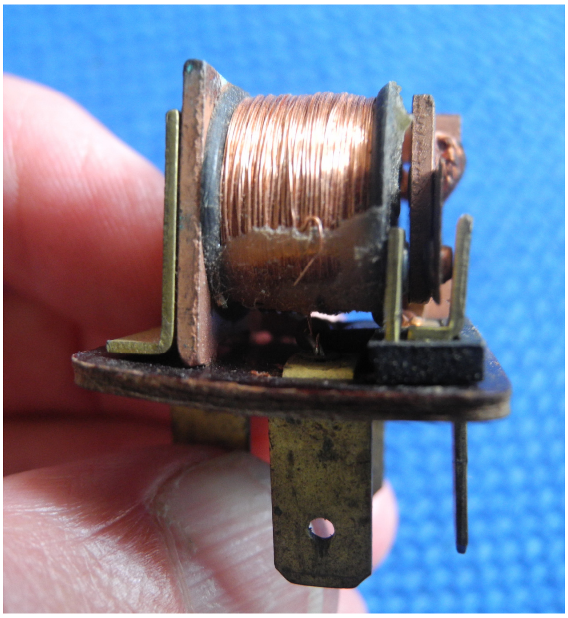
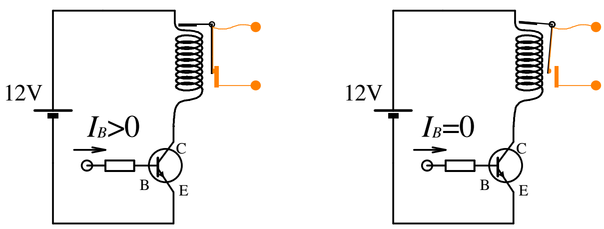


Fig. 8.4.9 Relé automotivo. Neste relé a chave é normalmente fechada e a injeção de corrente na bobina cria um campo magnético que atrai a chapa de ferro com um dos contatos da chave. O movimento da chapa abre o interruptor. Em outros relés a chave pode ser normalmente aberta. Há também relés com várias chaves, alguns normalmente abertos e outros normalmente fechados.

Neste exemplo, uma corrente de apenas 20 mA pode chavear uma corrente de vários ampères. Por sua vez a corrente de 20 mA pode ser chaveada com outro dispositivo, a saber, um transistor. Este dispositivo tem três contatos chamados de *emissor* (E), *base* (B) e *coletor* (C). Uma corrente de dezenas de miliampères fluindo entre emissor e coletor pode ser regulada ou também chaveada por uma corrente de alguns microampères entrando na base. A figura 8.4.10 mostra como seria esta combinação de transistor e relé. Na configuração (a) da figura se injeta uma pequena corrente (por exemplo 0,5 mA) na base, e isto libera a passagem de corrente entre coletor e emissor. Depois de pouco tempo, flui uma corrente pela bobina do relé que é limitada pela resistência do fio. No caso do relé da figura 8.4.9, esta resistência é pouco menor que $600\,\Omega$, e com a alimentação de bateria de carro fluem aproximadamente 20 mA. Entre coletor e emissor do transistor há uma queda de tensão de apenas 0,3 V, e no transistor se dissipam apenas 6 mW.



(a) (b)

Fig. 8.4.10 Relé controlado por um transistor.

[1] Não é aconselhável fazer esta experiência com as duas mãos. Isto cria um caminho da corrente passando perto do coração. Melhor segurar ambos os fios com a mão direita. Também se deve fazer um cálculo quantitativo antes. O autor não assume a responsabilidade para aplicações inadequadas.

Na situação (b) da figura 8.4.10, não foi injetada corrente na base, e o trajeto emissor – coletor não foi liberado. A bobina não recebe corrente e não atrai a chapa de ferro que acionaria o interruptor.

O circuito da figura 8.4.10 apresenta um defeito. Quando se passa do estado (a) para o estado (b), a continuidade de função $I(\cdot)$ resulta num problema sério. Os mesmos 20 A que antes depositavam apenas 6 mW no transistor, depositam agora no transistor altamente resistivo uma potência enorme. Toda energia magnética armazenada na bobina do relé é depositada no transistor. Isto pode destruir o transistor.

Há uma forma simples de evitar a destruição do transistor. A figura 8.4.11 mostra a solução do problema. Coloca-se um diodo paralelo à bobina com a orientação tal que a corrente de acionamento do relé não possa passar pelo diodo, mas a corrente que destruiria o transistor possa circular pela malha formada pela bobina e o diodo.

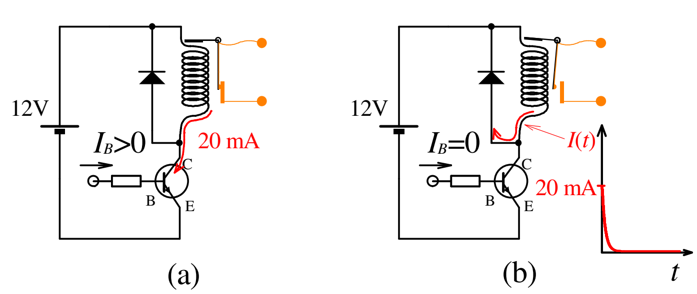


Fig. 8.4.11 Proteção de transistor com diodo.

Exercício:

E 8.4.1: A figura mostra um circuito de duas malhas. O circuito foi montado um bom tempo atrás. No instante $t = 0$ uma perna do resistor de 12 Ω quebra. a) Determine a voltagem que aparece nos terminais do resistor de 12 MΩ no instante $t = +0$ (logo depois da quebra). b) Calcule a energia dissipada no resistor de 12 MΩ durante o primeiro milissegundo após a quebra.

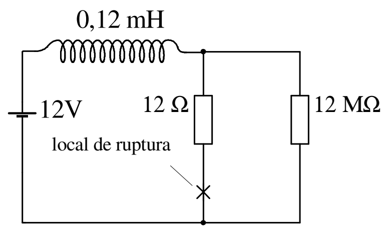


Fig. 8.4.12 Circuito com mudança repentina de resistência.

E 8.4.2: Escreva os pontos de destaque da seção.