

## 8.5 Cálculo de indutância e densidade de energia magnética

Para algumas geometrias de malhas pode-se calcular a indutância aproximadamente. Calculamos aqui a indutância de uma malha que contém um solenoide cilíndrico densamente enrolado e muito comprido. A malha se fecha com um arame liso e não muito mais comprido do que o solenoide como mostra a figura 8.5.1.

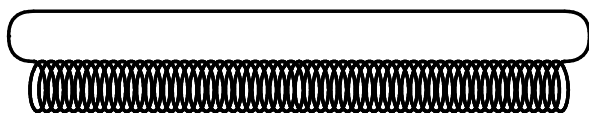


Fig. 8.5.1 Malha com um solenoide comprido e pequena área externa.

Vamos imaginar que flua uma corrente  $I$  nesta malha. Dentro do solenoide vamos aproximar o campo magnético pelo campo de

um solenoide infinitamente comprido. Este é uniforme dentro do solenoide apontando na direção do eixo de simetria e tem o valor

$$\vec{B} = \hat{z} \mu_0 \frac{N}{\ell} I \quad (8.5.1).$$

Nesta fórmula,  $N$  é o número de espiras enroladas e  $\ell$  é o comprimento do solenoide. O vetor unitário  $\hat{z}$  aponta na direção do eixo do solenoide com o sentido que forma um parafuso direito com o sentido positivo da corrente que circula em volta do cilindro. Fora do solenoide há campo magnético gerado pelo restante do fio que fecha o circuito e um fraco campo gerado pelo solenoide devido ao fato de que este não é infinitamente comprido. No presente cálculo, vamos desprezar o fluxo magnético através desta área da malha que fica fora do solenoide. De fato pode-se tornar esta aproximação mais exata, evitando o fio externo que fecha o circuito. Pode-se enrolar uma segunda camada no solenoide de tal forma que o fim do arame enrolado alcance o início. Desta forma não há área externa como mostrado na figura 8.5.2.

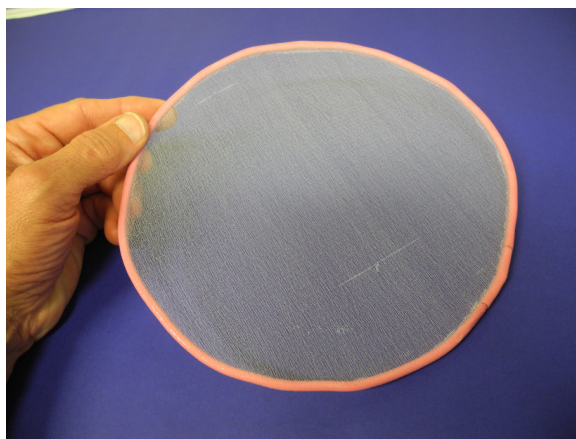
Fig. 8.5.2 Malha com solenoide de duas camadas sem área externa.



Nesta figura desenhei o fio da segunda camada em vermelho para distinguir melhor as camadas. Com este tipo de circuito formado por um único solenoide de duas camadas, a aproximação se limita ao fato de que o campo magnético gerado não é exatamente aquele gerado por uma densidade superficial de corrente circulando num tubo infinitamente comprido.

Fig. 8.5.3 Malha circular com superfície orientável marcada com a ajuda de um tecido elástico.

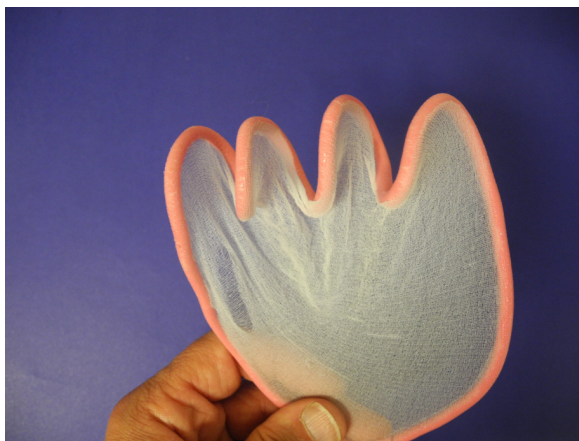
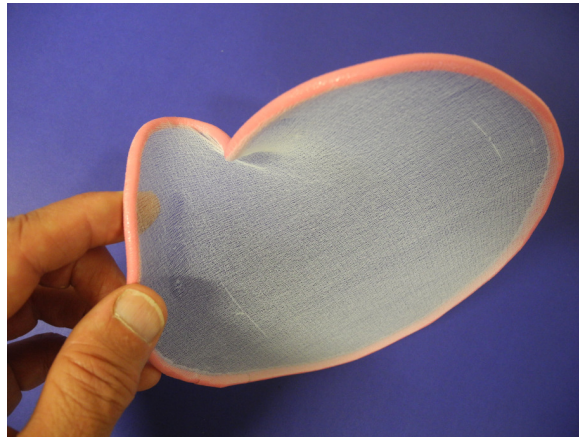
Para o cálculo da indutância é necessário ter uma ideia da forma de uma superfície orientável que tenha o fio da malha como beirada. Não é nada fácil imaginar tal superfície e no apêndice desta seção mostramos que nesta tarefa podemos encontrar surpresas. Para podermos visualizar este tipo de superfície, vamos considerar somente o circuito da figura 8.5.1, que já põe um desafio à nossa imaginação. A superfície associada ao circuito da figura 8.5.2 é ainda muito mais complicada. Para ajudar nossa imaginação construí uma malha de arame em forma



circular e colei um tecido bem elástico nesta moldura redonda. O tecido marca no espaço uma superfície orientável que possui o fio da malha como beirada. A figura 8.5.3 mostra esta montagem.

Fig. 8.5.4 Deformação da malha circular da figura 8.5.4 para formação de um solenoide.

Depois do registro deste estado inicial, comecei a deformar o arame para formar um pequeno solenoide, não



muito denso para poder enxergar os detalhes da superfície. A figura 8.5.4 mostra o início desta deformação e a figura 8.5.5 o estado final. Todas estas deformações da superfície, começando com a formação da primeira espira e terminando com o solenoide, são mudanças contínuas que mantêm a orientabilidade da superfície.

Fig. 8.5.5 Superfície orientável que tem uma malha com solenoide como beirada.

A superfície dentro das espiras do solenoide mostra algumas rugas e complicações, mas percebemos que no cálculo da integral de fluxo do campo magnético entra apenas a projeção desta superfície complicada numa área circular perpendicular ao eixo do solenoide. Isto ocorre devido ao fato de que  $\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ . Podemos formar uma superfície fechada com a superfície complicada numa das espiras do solenoide, com a superfície circular projetada e com uma parte da lateral do cilindro do solenoide, como indicado na figura 8.5.6.

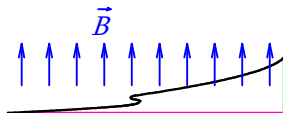


Fig.8.5.6 Superfície fechada formada pela parcela do tecido aderente a uma espira (preto), por uma superfície circular (magenta) e a parte lateral do cilindro do solenoide (verde).

Nesta figura mostrei a superfície circular projetada como uma linha magenta, a superfície lateral de verde e a superfície complicada como preta indicando simbolicamente alguma dobra. Como não há fluxo na parte lateral, segue que o fluxo através da superfície complicada é igual ao fluxo através da superfície circular. Como o campo é uniforme, a integral resulta simplesmente numa multiplicação pela área deste círculo. Cada espira contribui com um destes círculos de projeção. Então o fluxo total através da malha vale

$$\Phi_m = N \vec{B} \cdot \hat{z} \pi R^2 = \mu_0 \frac{N^2 \pi R^2}{\ell} I \quad (8.5.2).$$

Nesta fórmula,  $R$  é o raio do cilindro. De fato o campo da fórmula (8.5.1) vale também dentro de solenoides compridos de forma não redonda e neste caso podemos generalizar o resultado (8.5.2) substituindo o  $\pi R^2$  pela área da secção transversal  $A$  do solenoide

$$\Phi_m = N \vec{B} \cdot \hat{z} A = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} I \quad (8.5.3).$$

Percebemos que o fluxo é realmente proporcional ao valor da corrente e a constante de proporcionalidade é a indutância que queremos calcular:

$$L = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \quad (8.5.4).$$

Podemos aplicar esta fórmula de maneira semelhante à aplicação do cálculo de capacitância para chegar a uma densidade de energia do campo. Vamos substituir o resultado (8.5.4) na expressão da energia magnética, que calculamos na seção anterior (fórmula 8.4.15). Para um solenoide com corrente  $I$  vale

$$E_{Mag} = \frac{L}{2} I^2 = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \frac{I^2}{2} \quad (8.5.5).$$

Com a (8.5.1) podemos escrever  $I^2$  em termos do campo magnético:

$$I^2 = \frac{\ell^2 \vec{B} \cdot \vec{B}}{\mu_0^2 N^2} \quad (8.5.6).$$

Inserindo isto na (8.5.5), obtemos

$$E_{Mag} = \mu_0 \frac{N^2 A}{\ell} \frac{1}{2} \frac{\ell^2 \vec{B} \cdot \vec{B}}{\mu_0^2 N^2} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{2\mu_0} A \ell \quad (8.5.7).$$

$A \ell$  é o volume da região com campo magnético diferente de zero. Este resultado nos deixa suspeitar que a densidade de energia magnética associada ao campo é

$$\rho_{EMag} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{B}}{2\mu_0} \quad (8.5.8).$$

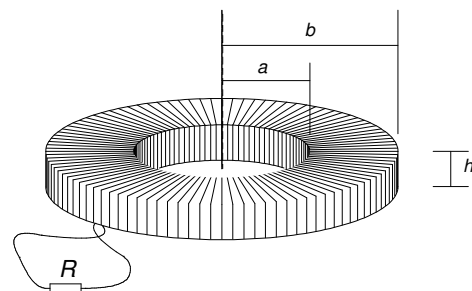
De fato, numa disciplina de eletromagnetismo avançado, mostra-se com argumentos rigorosos que esta é a densidade de energia associada ao campo magnético numa região sem preenchimento de matéria. Na presença de algum material há uma modificação desta fórmula que comentaremos num capítulo futuro.

No capítulo 9 teremos os conhecimentos para poder entender que a análise de circuito feita na seção anterior e o cálculo da indutância feita nesta seção são apenas aproximações. Na seção 9.1 discutiremos a validade destas aproximações. Pode-se considerar uma sorte que o uso destes cálculos aproximados leva à expressão correta da densidade de energia magnética.

### Exercícios:

Fig. 8.5.7 Bobina toroidal

**E 8.5.1:** Mostramos que a corrente numa malha de resistência  $R$  e indutância  $L$  sem nenhum outro elemento é descrita pela lei horária  $I(t) = I_0 \exp\left\{-\frac{R}{L}t\right\}$ . Integrando a potência dissipada no resistor de  $t=0$  até



$t = \infty$ , percebemos que a energia inicialmente armazenada no campo magnético vale  $\frac{L}{2} I_0^2$ .

(a) Use a lei de Ampère para calcular o campo magnético de um solenóide toroidal com  $N$  espiras que leva uma corrente  $I_0$  (compare com a figura 8.5.7).

(b) Calcule a indutância do solenóide.

(c) Comprove, neste exemplo, que a energia armazenada  $\frac{L}{2} I_0^2$  é igual à integral de

$$\text{volume} \iiint \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) d^3\vec{r}.$$

**E 8.5.2:** Escreva os pontos de destaque desta seção.

### 8.5 Apêndice: uma curiosidade.

Na tentativa de visualizar uma superfície que tenha uma malha com solenoide como beirada, podemos ter boas surpresas. Montei uma malha de um arame de ferro com um minissolenoide de apenas duas voltas. Escolhi este número pequeno de voltas para tornar a superfície mais simples, mas a mesma surpresa que teremos com esta malha poderíamos ter com uma com um solenoide muito comprido e densamente enrolado. Para gerar uma superfície mais lisa e bonita que aquela feita com um tecido elástico das figuras 8.5.3 – 8.5.5, eu mergulhei esta malha numa solução de detergente com a intenção de criar uma superfície com uma lâmina de líquido. A figura 8.5.8 mostra uma fotografia desta experiência. Aparentemente há alguns buracos nesta lâmina de líquido. Mas se trata apenas de um efeito da óptica. Em algumas regiões a lâmina tem uma espessura tal que as duas reflexões da luz nas interfaces líquido-ar dos dois lados interferem destrutivamente<sup>1</sup>, e isto resulta na impressão de que a lâmina tem buracos. Mas há realmente um buraco verdadeiro, e este fica num lugar muito surpreendente: justamente dentro do solenoide, onde no caso de um solenoide muito comprido com muitas espiras teria o campo magnético, não há lâmina de água com detergente! Será então o fluxo magnético nulo?

A solução deste enigma está na topologia desta superfície. Examinando a lâmina com cuidado, o leitor percebe que se trata de uma superfície não orientável. Para deixar este fato mais claro reconstruí a lamina de líquido com duas camadas de fita isolante, azul de um lado e preto do outro. Nas beiradas, ou seja, no arame as duas cores podem se encontrar sem violar a orientabilidade. Para marcar a beirada mais claramente, pinte-a com tinta vermelha. Mas percebemos que há um encontro de azul com preto que não tem o arame como fronteira. Trata-se da linha que aparece na fotografia da lâmina líquida entre duas espiras do solenoide começando numa pequena bolha de espuma. A figura 8.5.9 mostra a superfície criada com fita isolante mais ou menos com o mesmo ângulo de observação da figura 8.5.8. A figura 8.5.10 mostra um outro ângulo. Então qual é o valor do fluxo magnético através desta superfície se tivermos corrente fluindo no arame? A resposta é: o fluxo através desta superfície não pode ser definido. Este conceito tem sentido somente para superfícies orientáveis!

---

<sup>1</sup> Mais detalhes sobre interferência de ondas luminosas veremos na disciplina de Física IV.



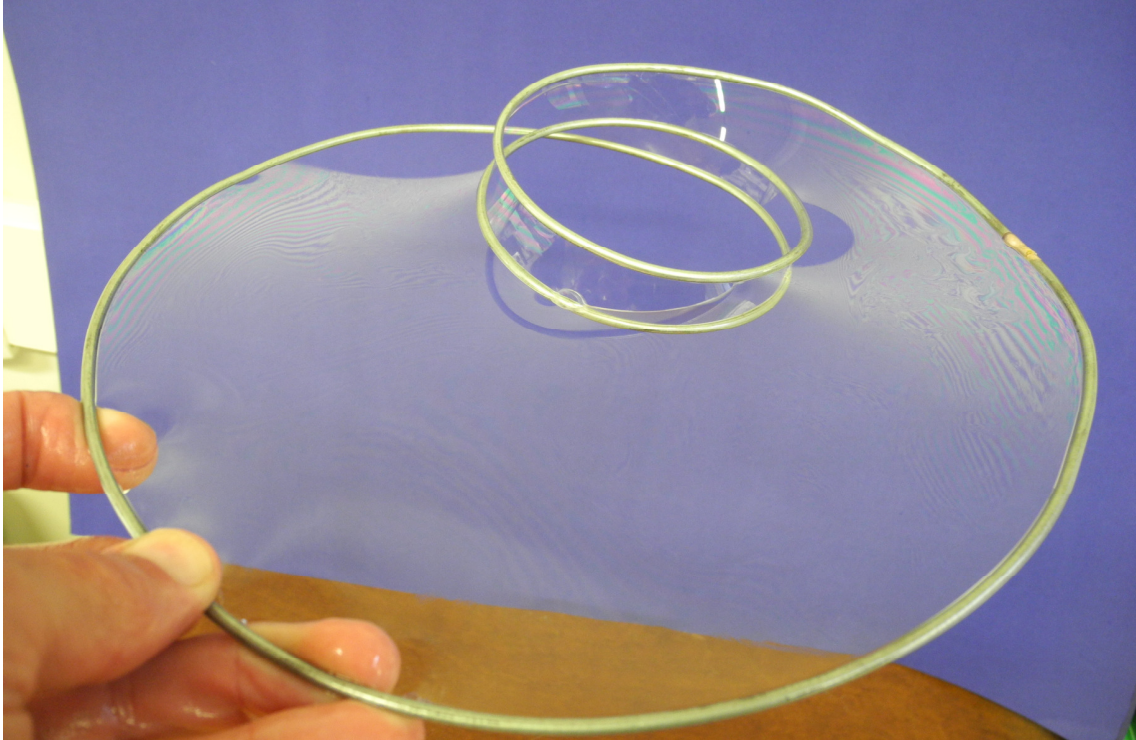


Fig. 8.5.8 Superfície que tem uma malha com minissolenoide como beirada. A superfície está realizada por uma lâmina de líquido.

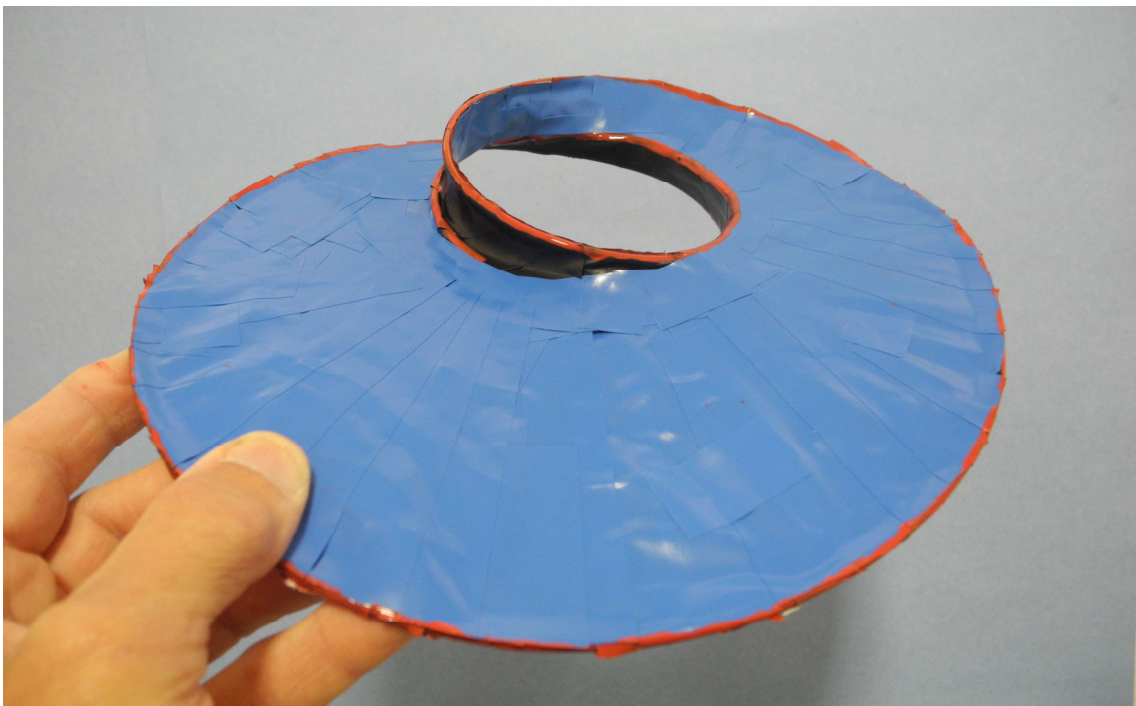


Fig. 8.5.9 Reconstrução da superfície da figura 8.5.8 com duas camadas de fita isolante, azul de um lado e preto do outro.



Fig. 8.5.10 Reconstrução da superfície da figura 8.5.8 com duas camadas de fita isolante, azul de um lado e preto do outro.