8.6 A corrente de deslocamento e as equações de Maxwell

Michael Faraday descobriu uma das duas leis básicas que regem os fenômenos não estacionários do eletromagnetismo. Nela aparece uma derivada temporal do campo magnético. A outra lei básica do eletromagnetismo que contém uma derivada temporal de um campo foi descoberta pelo seu admirador, James Clerk Maxwell. Ao contrário da descoberta de Faraday, esta não foi feita a partir de experiências, mas saiu de uma análise lógica das leis já conhecidas. Com os conhecimentos que adquirimos durante nosso estudo do eletromagnetismo, temos todas as condições para redescobrir esta lei com os passos de Maxwell. A própria lei de indução de Faraday nos ensinou o ponto de partida. Vimos que a lei de indução

$$\oint_{\partial\mathbb{S}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \;=\; -\iint_{\mathbb{S}} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad (8.6.1)$$

abriga um perigo potencial de inconsistência matemática. Duas superfícies orientáveis $\mathbb{S}_1$ e $\mathbb{S}_2$ que têm a mesma beirada poderiam fornecer dois valores diferentes para a integral do lado direito da equação (8.6.1). Mas com $\partial\mathbb{S}_1 = \partial\mathbb{S}_2$ o lado esquerdo da equação tem somente um valor. O que garante que tal inconsistência não ocorre é a equação

$$\operatorname{div}\vec{B} \;=\; 0 \qquad (8.6.2)$$

da qual podemos concluir que

$$\oiint \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \;=\; 0 \qquad (8.6.3)$$

para qualquer superfície fechada. Isto garante que

$$\iint_{\mathbb{S}_1} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \;=\; \iint_{\mathbb{S}_2} \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad (8.6.4),$$

pois com $\mathbb{S}_1$ e $\mathbb{S}_2$ podemos formar a superfície fechada $\mathbb{S}_1 \cup \overline{\mathbb{S}}_2$ de tal forma que (8.6.3) com esta superfície implique em (8.6.4). O mesmo perigo de inconsistência matemática existe com a lei de Ampère. Ela tem uma forma muito parecida com a fórmula (8.6.1):

$$\oint_{\partial\mathbb{S}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} \;=\; \mu_0 \iint_{\mathbb{S}} \vec{j}\cdot d\vec{S} \qquad (8.6.5).$$

Para não resultarem inconsistências teria que valer $\oiint_{\mathbb{S}} \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$ para qualquer superfície fechada. De fato vale $\oiint_{\mathbb{S}} \vec{j}\cdot d\vec{S} = 0$ enquanto os escoamentos de carga forem estacionários. Neste caso toda carga que entra num volume necessariamente sai. Mas durante processos não estacionários o estoque de carga dentro de um volume pode mudar e neste caso entrada e saída de carga não são iguais. Então a fórmula (8.6.5) não pode ser válida para situações não estacionárias. Maxwell percebeu isto e propôs uma modificação da lei de Ampère que vale também para processos não estacionários.

Vamos pensar como consertar a lei de Ampère. No lugar da densidade de corrente $\vec{j}$ devemos ter um outro campo vetorial $\vec{J}$ que cumpre

$$\oiint_{\mathbb{S}} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad = \quad 0 \tag{8.6.6}$$

para qualquer superfície fechada, ou seja, um campo sem fontes. Além disso, este campo deve coincidir com a densidade de corrente $\vec{j}$ em situações estacionárias. O que garante $\oiint_{\mathbb{S}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ em casos estacionários é a conservação de carga elétrica. Para adivinhar qual é o novo campo $\vec{J}$, vamos formular a conservação de carga para situações não estacionárias. Em palavras podemos formular esta lei da seguinte forma: a taxa líquida de carga que sai de um volume pela superfície tem que ser igual à taxa de diminuição do estoque de carga dentro do volume. A taxa de diminuição do estoque é o negativo da taxa do aumento do estoque. Então a conservação de carga significa

$$\oiint_{\partial\mathbb{V}} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad = \quad -\frac{d}{dt} \iiint_{\mathbb{V}} \rho \, dV \tag{8.6.7}$$

ou

$$\oiint_{\partial\mathbb{V}} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad + \quad \frac{d}{dt} \iiint_{\mathbb{V}} \rho \, dV \quad = \quad 0 \qquad (8.6.8),$$

sendo ρ a densidade de carga. Aqui usamos a densidade total de carga incluindo também as cargas de polarização presas dentro das moléculas. Agora podemos combinar esta afirmação com a lei de Gauss e escrever $\varepsilon_0 \oiint_{\partial\mathbb{V}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$ no lugar de $\iiint_{\mathbb{V}} \rho \, dV$:

$$\oiint_{\partial\mathbb{V}} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad + \quad \frac{d}{dt} \varepsilon_0 \oiint_{\partial\mathbb{V}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad = \quad 0 \tag{8.6.9}$$

Para um volume $\mathbb{V}$ que não depende do tempo vale

$$\frac{d}{dt} \varepsilon_0 \oiint_{\partial\mathbb{V}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad = \quad \oiint_{\partial\mathbb{V}} \frac{\varepsilon_0 \partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \tag{8.6.10}$$

e a conservação de carga toma a seguinte forma

$$\oiint_{\partial\mathbb{V}} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad + \quad \oiint_{\partial\mathbb{V}} \frac{\varepsilon_0 \partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad = \quad 0 \qquad (8.6.11).$$

Como a integração é uma operação linear, podemos escrever isto ainda como

$$\oiint_{\partial\mathbb{V}} \left\{ \vec{j} + \frac{\varepsilon_0 \partial \vec{E}}{\partial t} \right\} \cdot d\vec{S} \quad = \quad 0 \qquad (8.6.12).$$

Pronto! Encontramos um campo sem fontes e que se reduz à densidade de corrente em situações estacionárias; o campo $\vec{J} = \vec{j} + \varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ satisfaz as duas exigências postas. Então podemos consertar a lei de Ampère e torná-la válida também para situações não estacionárias:

$$\oint_{\partial\mathbb{S}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \quad = \quad \mu_0 \iint_{\mathbb{S}} \left\{ \vec{j} + \frac{\varepsilon_0 \partial \vec{E}}{\partial t} \right\} \cdot d\vec{S} \tag{8.6.13}$$

Esta nova versão da lei de Ampère recebeu o nome de lei de Ampère-Maxwell e o termo extra $\varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ é chamado de densidade de corrente de deslocamento. Este nome tem sua origem numa estranha interpretação do campo elétrico. Maxwell imaginava o espaço repleto de cargas positivas e negativas e interpretava o campo elétrico como um pequeno deslocamento das cargas. Correspondentemente uma taxa de mudança do campo elétrico corresponderia a uma densidade de corrente. Hoje não se acredita mais nesta ideia, mas o nome de densidade de corrente de deslocamento ficou.

Chegamos ao ponto de poder compilar as quatro equações fundamentais que determinam a dinâmica dos campos elétrico e magnético. Elas são chamadas de equações de Maxwell:

$$\boxed{\oint\!\!\oint_{\partial\mathbb{V}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad = \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{V}} \rho \, dV} \tag{8.6.14}$$

$$\boxed{\oint_{\partial\mathbb{S}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \quad = \quad \mu_0 \iint_{\mathbb{S}} \left\{ \vec{j} + \frac{\varepsilon_0 \partial \vec{E}}{\partial t} \right\} \cdot d\vec{S}} \tag{8.6.15}$$

$$\boxed{\oint_{\partial\mathbb{S}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad = \quad -\iint_{\mathbb{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}} \tag{8.6.16}$$

$$\boxed{\oint\!\!\oint_{\partial\mathbb{V}} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad = \quad 0} \tag{8.6.17}$$

Com os teoremas de Gauss e Stokes podemos escrever estas equações também em forma local como equações diferenciais:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} \quad = \quad \frac{1}{\varepsilon_0} \rho} \tag{8.6.18}$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{B} \quad = \quad \mu_0 \vec{j} \quad + \quad \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \tag{8.6.19}$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} \quad + \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad = \quad 0} \tag{8.6.20}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} \quad = \quad 0} \tag{8.6.21}$$

Qualquer físico deve ter estas equações sempre prontas na cabeça e deve ter plena consciência do significado delas.

Maxwell percebeu que estas equações possuem soluções com um comportamento de onda. De fato é relativamente fácil fazer a conexão destas equações com equações diferenciais que foram apresentadas como equações de ondas na Física II. Por exemplo, aprendeu-se na Física II que uma onda sonora num gás possui uma dinâmica descrita pela equação de onda

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{c_s^{\,2}}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \tag{8.6.22}$$

Nesta equação P é a pressão do gás e c_s, a velocidade escalar de propagação das ondas sonoras. Esta equação pode também ser escrita com o operador Laplaciano Δ:

$$\Delta P = \frac{1}{c_s^{\,2}}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \tag{8.6.23}$$

Das equações de Maxwell podemos extrair algo muito parecido. Vamos considerar uma região do espaço sem matéria. Então nesta região não há cargas nem correntes; $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$. Supondo isto, vamos calcular a derivada temporal da equação de Ampère-Maxwell (8.6.19):

$$\operatorname{rot}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{8.6.24}$$

Agora podemos usar a lei de indução (8.6.20) para substituir a derivada $\partial\vec{B}/\partial t$ pelo negativo do rotacional do campo elétrico:

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{8.6.25}$$

Com a regra do “bacmenoscab” temos $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \Delta$:

$$-\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{E}\right)+\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{8.6.26}$$

Na ausência de carga temos com a lei de Gauss que $\operatorname{div}\vec{E} = 0$. Então chegamos a uma equação diferencial exatamente da forma da equação vista na Física II:

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{8.6.27}$$

Podemos concluir que os campos elétrico e magnético podem propagar alterações localizadas dos seus valores de forma parecida a como alterações locais da pressão são propagadas numa onda sonora. A velocidade escalar c destas ondas eletromagnéticas pode ser lida da equação (8.6.27):

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}} \tag{8.6.28}$$

Maxwell chegou a este resultado[1] e substituiu os valores conhecidos das constantes e chegou a um resultado extraordinário:

[1] Maxwell, James Clerk (1865). "A dynamical theory of the electromagnetic field". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 155: 459 – 512. Bibcode: 1865RSPT.155.459C. doi:10.1098/rstl.1865.0008

$$c \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{VsA^{-1}m^{-1}}\,8{,}85\times10^{-12}\,\mathrm{AsV^{-1}m^{-1}}}} \approx 3{,}00\times10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad (8.6.29)$$

Na época de Maxwell já havia diversas medidas da velocidade da luz. O valor que Maxwell encontrou para a velocidade escalar das ondas eletromagnéticas coincidia dentro da incerteza experimental com os valores experimentais da velocidade da luz. Isto levou à hipótese de que a luz seria uma onda eletromagnética. Hoje esta interpretação da luz como onda eletromagnética está perfeitamente comprovada, embora o próprio conceito de campo eletromagnético tenha sofrido profundas modificações pela descoberta da física quântica. Então a elaboração da teoria eletromagnética resolveu um enigma que ocupava os pensadores durante séculos; a pergunta o que é luz finalmente recebeu uma resposta.

Na época desta descoberta as ondas eletromagnéticas eram apenas uma hipótese e faltava uma demonstração experimental destas ondas. Em 1886 Heinrich Hertz conseguiu gerar ondas eletromagnéticas a partir de oscilações elétricas. Oscilações elétricas serão o assunto do nosso próximo capítulo. Nos anos 1886 até 1889 Hertz investigou as propriedades das ondas eletromagnéticas detalhadamente e mostrou que elas tinham todas as propriedades previstas pelas equações de Maxwell[2]. Estas ondas Hertzianas são a base de muitos sistemas modernos de telecomunicação. O seu telefone celular se comunica com uma estação base com a ajuda deste tipo de onda.

Exercícios:

E 8.6.1: Um capacitor de placas paralelas é feito de dois discos circulares com raio R e distancia $d << R$. Os fios, que servem para carregar o capacitor, são barras metálicas retas muito longas saindo dos centros dos discos. Se carregarmos este tipo de capacitor com uma corrente constante, aparece, durante o processo de carregamento, um campo magnético entre as placas. Calcule este campo.

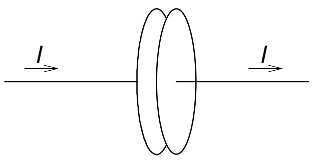

Fig. 8.6.1 Capacitor de placas paralelas sendo carregado.

E 8.6.2: Usamos a conservação de carga e a lei de Gauss para redescobrir a lei de Ampère-Maxwell. Use inversamente as equações de Maxwell para mostrar que carga elétrica é conservada.

E 8.6.3: Deduzimos uma equação de onda para o campo elétrico. Deduza uma equação de onda para o campo magnético a partir das equações de Maxwell.

E 8.6.4: Escreva os pontos de destaque desta seção.

[2] H. Hertz: *Über sehr schnelle elektrische Schwingungen* Annalen der Physik (1887) 31 p.421-448
H. Hertz: *Über die Einwirkung einer geradlinigen elektrischen Schwingung auf eine benachbarte Strombahn*. In: *Annalen der Physik und Chemie*. Band 270, Joh. Ambr. Barth, Leipzig 1888, S. 155–170
H. Hertz: *Über die Ausbreitungsgeschwindigkeit der electrodynamischen Wirkungen*. In: *Annalen der Physik und Chemie*. Band 270, Joh. Ambr. Barth, Leipzig 1888, S. 551–569
H. Hertz: *Über electrodynamische Wellen im Luftraume und deren Reflexion*. In: *Annalen der Physik und Chemie*. Band 270, Joh. Ambr. Barth, Leipzig 1888, S. 609–623