8.7 Novas simetrias
(para estudo complementar)

Imaginem um solenoide infinitamente comprido de raio R com uma densidade de espiras n e uma corrente I que cresce de maneira uniforme com o tempo: $I(t)=\alpha t$, com $\alpha = const.$. Teremos o campo magnético

$$\vec{B}(t) \quad = \quad \begin{cases} \hat{z}\mu_0\, n\alpha t & \text{para } \mathscr{r} \leq R \\ 0 & \text{para } \mathscr{r} > R \end{cases} \tag{8.7.1}$$

Nesta fórmula, $\mathscr{r}$ é a coordenada radial de um sistema de coordenadas cilíndricas com o eixo z no centro do solenoide. A tarefa de calcular o campo elétrico gerado por este campo magnético variável no tempo parece ser idêntica à tarefa de calcular o campo magnético gerado por uma densidade de corrente que é constante dentro de um cilindro infinitamente comprido de raio R. Podemos fazer a troca

$$\begin{array}{lclcllcl} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & = & \begin{cases} \hat{z}\mu_0\, n\alpha & \text{para } \mathscr{r} \leq R \\ 0 & \text{para } \mathscr{r} > R \end{cases} & \leftrightarrow & \vec{j} & = & \begin{cases} \hat{z}\, j_0 & \text{para } \mathscr{r} \leq R \\ 0 & \text{para } \mathscr{r} > R \end{cases} \\ \displaystyle\oint\limits_{\partial\mathbb{S}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} & = & -\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} & \leftrightarrow & \displaystyle\oint\limits_{\partial\mathbb{S}} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} & = & \mu_0 \displaystyle\iint\limits_{\mathbb{S}} \vec{j}\cdot d\vec{S} \end{array} \tag{8.7.2}$$

Mas esta analogia tem um defeito. Na hora de aplicar a lei de Ampère para determinar o campo magnético gerado pela densidade de corrente no condutor cilíndrico, usamos a simetria especular com espelhos que contêm o eixo z. Por outro lado, o campo $\partial\vec{B}/\partial t$ não possui esta simetria! Numa reflexão neste tipo de espelho, o campo $\partial\vec{B}/\partial t$ sofre uma mudança de sinal, pois $\vec{B}$ é pseudovetor. Podemos entender isto também olhando o que acontece com a corrente que circula em volta do cilindro e gera este campo. Quando refletimos tudo num espelho que contém o eixo z, esta corrente circulará no sentido contrário.

Como podemos salvar a analogia (8.7.2) ? Há uma maneira de fazer isto: temos que generalizar nosso conceito de simetria. Por enquanto consideramos apenas operações espaciais que conservam distâncias e mantêm uma dada configuração física inalterada. Mas poderíamos também permitir outras alterações num sistema físico que não correspondam a uma troca de lugares no espaço.

Mas, para podermos generalizar o conceito de simetria de um determinado arranjo, precisamos introduzir primeiramente um outro conceito: o conceito de *simetria da teoria*, ou no caso, *simetria do eletromagnetismo*. Uma *simetria da teoria* é alguma prescrição que substitui <u>todos os objetos</u> por outros inclusive os instrumentos de medida (incluindo o próprio experimentador) de tal forma que todos os resultados experimentais permanecem iguais, ou seja, tal que o experimentador não notará nenhuma diferença.

Vejamos um exemplo. Imagine uma experiência qualquer. Se transladarmos absolutamente tudo um metro para o lado inclusive os instrumentos de medida e o próprio observador, este não notaria nenhuma diferença. Então se trata de uma simetria da teoria. Mas a translação não é necessariamente um elemento de simetria de um dado objeto. Isto seria somente o caso, se a translação do objeto sem a translação dos medidores e do experimentador não resultar em alterações das observações. Para definir um elemento de simetria de um objeto vamos sempre partir de uma simetria da teoria. Então um objeto possui uma dada simetria se todos os resultados ficarem inalterados se submetermos somente o objeto a esta substituição sem submeter os instrumentos de medida a esta substituição. Por exemplo, vimos que translações são simetrias da teoria. Mas uma translação não é elemento de simetria de uma esfera. Se transladarmos a esfera sem transladar os instrumentos de medida, o experimentador notará a alteração. Por outro lado, se transladarmos uma barra uniforme e infinitamente comprida na direção do eixo, o experimentador não notará esta alteração, mesmo com os medidores no antigo lugar. Então esta translação é elemento de simetria da barra.

Com este novo conceito de *simetria da teoria* podemos agora pensar em outras operações que não são de caráter geométrico.

Poderíamos trocar, por exemplo, todas as cargas positivas por cargas negativas e todas as negativas por cargas positivas. Isto inclui também as cargas que um observador usaria para medir os campos. Imagine algum arranjo material na sua frente. Se pudéssemos substituir todos os átomos deste arranjo por outros cujos prótons tivessem carga negativa e cujos elétrons tivessem carga positiva e se fizéssemos a mesma troca com todos os instrumentos de medida, o experimentador nunca notaria uma alteração dos resultados experimentais. Todas as acelerações provocadas pelas forças elétricas seriam as mesmas. Isto vale para qualquer arranjo experimental e podemos dizer que esta troca é uma operação de simetria do eletromagnetismo. Esta operação é chamada de conjugação de carga e é abreviada com a letra C. Quando se aplica esta operação, os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sofrem alterações, mas as acelerações medidas com cargas testes que também foram submetidos à operação C não sofrem nada. As alterações sofridas na operação C são as seguintes:

$$\begin{array}{lclcl} \rho(\vec{r},t) & \rightarrow & \rho_{\mathrm{C}}(\vec{r},t) & = & -\rho(\vec{r},t) \\ \vec{j}(\vec{r},t) & \rightarrow & \vec{j}_{\mathrm{C}}(\vec{r},t) & = & -\vec{j}(\vec{r},t) \\ \vec{E}(\vec{r},t) & \rightarrow & \vec{E}_{\mathrm{C}}(\vec{r},t) & = & -\vec{E}(\vec{r},t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) & \rightarrow & \vec{B}_{\mathrm{C}}(\vec{r},t) & = & -\vec{B}(\vec{r},t) \end{array} \tag{8.7.3}$$

Se os campos ρ, $\vec{j}$, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ obedecem às equações de Maxwell, os novos campos ρ_{C}, $\vec{j}_{\mathrm{C}}$, $\vec{E}_{\mathrm{C}}$ e $\vec{B}_{\mathrm{C}}$ também satisfazem estas equações. A densidade de força

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} \tag{8.7.4}$$

obviamente não sofre nenhuma alteração quando substituímos os antigos campos pelos campos conjugados. A operação C é uma simetria do eletromagnetismo.

Substituir prótons por "prótons negativos" e elétrons por "elétrons positivos" parece ser uma pura fantasia. Mas hoje sabemos que estas partículas com o sinal de carga trocado realmente existem. Estas partículas são chamadas de antipartículas e matéria composta destas antipartículas é chamada de antimatéria. Em princípio poder-se-ia substituir algum arranjo experimental por um montado com antimatéria. Na prática isto não é tecnicamente viável para objetos macroscópicos. Mas para um átomo ou para uma pequena molécula e para uma partícula teste usada como instrumento de medida, isto é de fato possível.

Se combinamos a tomada de imagem especular com eixo z no plano de espelho com a operação de conjugação de carga, obtemos uma simetria do problema posto com a fórmula (8.7.1)[1]. A reflexão no espelho troca o sinal do campo $\partial\vec{B}/\partial t$ e a conjugação de carga conserta este defeito. Com esta combinação de operações podemos prosseguir da maneira usual para determinar o campo elétrico gerado. O leitor pode elaborar estes detalhes (exercício E 8.7.1).

O exemplo do solenoide com corrente variável motivou a definição do conceito de *simetria da teoria.* Translações, giros, reflexões em espelhos e a conjugação de carga são simetrias do eletromagnetismo. Veremos quais são as outras simetrias do eletromagnetismo. A *inversão temporal* T é uma simetria do eletromagnetismo. Esta operação inverte todos os acontecimentos como se tivéssemos olhando tudo num cinema com a fita do filme posta no projetor com a ordem inversa dos quadros. Neste tipo de troca, as velocidades das partículas mudam de sinal. Consequentemente densidades de corrente mudarão de sinal e o campo magnético gerado por estas correntes deverão mudar de sinal também. As alterações sofridas nesta operação T são as seguintes:

$$\begin{array}{lcl} \rho(\vec{r},t) & \to & \rho_{\mathrm{T}}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},-t) \\ \vec{j}(\vec{r},t) & \to & \vec{j}_{\mathrm{T}}(\vec{r},t) = -\vec{j}(\vec{r},-t) \\ \vec{E}(\vec{r},t) & \to & \vec{E}_{\mathrm{T}}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},-t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) & \to & \vec{B}_{\mathrm{T}}(\vec{r},t) = -\vec{B}(\vec{r},-t) \end{array} \qquad (8.7.5).$$

Para a densidade de força vale

$$\vec{f}(\vec{r},t) \quad \to \quad \vec{f}_{\mathrm{T}}(\vec{r},t) = \vec{f}(\vec{r},-t) \qquad (8.7.6).$$

O leitor pode verificar que os campos ρ_{T}, $\vec{j}_{\mathrm{T}}$, $\vec{E}_{\mathrm{T}}$ e $\vec{B}_{\mathrm{T}}$ satisfazem as equações de Maxwell se os campos ρ, $\vec{j}$, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ satisfizerem estas equações (exercício E 8.7.2).

Há uma terceira simetria muito famosa do eletromagnetismo chamada de paridade, P. Mas na verdade ela não é nova. Já a usamos diversas vezes sem reparar no fato. Esta operação é do tipo puramente espacial e consiste na inversão na origem de coordenadas:

$$\begin{array}{lcl} \rho(\vec{r},t) & \to & \rho_{\mathrm{P}}(\vec{r},t) = \rho(-\vec{r},t) \\ \vec{j}(\vec{r},t) & \to & \vec{j}_{\mathrm{P}}(\vec{r},t) = -\vec{j}(-\vec{r},t) \\ \vec{E}(\vec{r},t) & \to & \vec{E}_{\mathrm{P}}(\vec{r},t) = -\vec{E}(-\vec{r},t) \\ \vec{B}(\vec{r},t) & \to & \vec{B}_{\mathrm{P}}(\vec{r},t) = +\vec{B}(-\vec{r},t) \end{array} \qquad (8.7.7)$$

Nesta operação a densidade de força sofre uma alteração correspondente

$$\vec{f}(\vec{r},t) \quad \to \quad \vec{f}_{P}(\vec{r},t) = -\vec{f}(-\vec{r},t) \qquad (8.7.8)$$

[1] A questão se uma operação é simetria de um objeto depende naturalmente do conjunto de possíveis experiências que admitimos. No caso do solenoide a combinação da reflexão com a operação C é uma simetria do solenoide enquanto faremos somente medidas de campo com a carga teste. Mas existe um efeito quântico que mostra que esta combinação não é simetria. Imagine o solenoide espelhado e feito de antimatéria e a carga teste continua um elétron comum. Enquanto medimos somente as forças exercidas sobre a partícula teste não notamos nenhuma diferença, ou seja, as forças são os do arranho original. Mas se permitirmos que o elétron entre no material do solenoide notaríamos uma diferença: ao encontrar os antieletrons no solenoide, o elétron seria aniquilado gerando duas partículas γ. Como aqui queremos somente informação sobre os campos este efeito não perturba nossa argumentação.

Mas todos os movimentos dos corpos testes seriam igualmente invertidos na origem e se "invertemos o próprio observador", ele nunca notaria uma alteração. O leitor pode mostrar que os campos ρ_{P}, $\vec{j}_{\mathrm{P}}$, $\vec{E}_{\mathrm{P}}$ e $\vec{B}_{\mathrm{P}}$ satisfazem as equações de Maxwell se os campos ρ, $\vec{j}$, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ satisfizerem estas equações (exercício E 8.7.3). Usamos esta simetria diversas vezes? Sim. O leitor pode mostrar que uma reflexão num espelho pode ser obtida combinando a operação P com um giro de 180°. (exercício E 8.7.4).

Falei que a simetria P é famosa. No início do século vinte certamente todos os físicos teriam jurado que qualquer lei fundamental da natureza necessariamente teria que ter a operação P como um elemento de simetria. No entanto em 1956 os teóricos Tsung Dao Lee[2] e C.N. Yang argumentaram que não havia comprovação experimental desta simetria para a interação que provoca certas reações nucleares que resultam na emissão de elétrons do núcleo. Esta interação é chamada de *interação fraca*. Os dois convenceram a física experimental Chien-Shiung Wu[3] a testar esta questão experimentalmente. Madame Wu usou núcleos de Cobalto 60 para fazer este teste. Estes núcleos são instáveis e decaem em Níquel com a emissão de um elétron, de uma outra partícula neutra chamada de antineutrino e de dois raios γ. A reação é a seguinte:

$$ {}^{60}_{27}\mathrm{Co} \rightarrow {}^{60}_{28}\mathrm{Ni} \quad + \quad e^{-} \quad + \quad \bar{\nu}_e \quad + \quad 2\gamma \tag{8.7.9}$$

Acontece que estes núcleos de Cobalto são pequenos ímãs que num ambiente de muito baixa temperatura (para minimizar a perturbação por agitação térmica) podem ser orientados num forte campo magnético.

Vamos tentar entender a ideia desta experiência. Imagine um núcleo de Cobalto na origem de coordenadas orientado por um forte campo magnético que aponta na direção z; $\vec{B} = \hat{z} B$ com $B > 0$. Isto significa que o polo norte deste mini-ímã aponta para o lado $+\hat{z}$ e o polo sul para o lado $-\hat{z}$. O que estaria no lugar deste núcleo numa experiência que se obtém desta pela aplicação da operação P ? Exatamente o mesmo núcleo, porque o campo magnético $\vec{B}(0)$ que orientou o núcleo foi substituído pelo $\vec{B}_{\mathrm{P}}(0)$ que tem o mesmo valor; $\vec{B}_{\mathrm{P}}(0) = \vec{B}(0)$. Mas um elétron que sai no decaimento deste núcleo numa direção $\hat{u}$ deveria sair na experiência que foi submetida à operação P na direção $-\hat{u}$, pois o momento linear de uma partícula é vetor e não um pseudovetor. Nestes processos quânticos não contam os resultados de um único decaimento, mas tem-se que avaliar a probabilidade das ocorrências. A simetria P neste caso significa que as direções $\hat{u}$ e $-\hat{u}$ deveriam ter a mesma probabilidade. Mas na experiência se constata que os elétrons são emitidos somente na direção contrária ao dipolo magnético do núcleo. Posteriormente muitas outras experiências mostraram que a interação fraca realmente não possui a operação P como elemento de simetria; de fato ela não tem nem a simetria C e nem a T. Mas a combinação destas três operações é de fato uma simetria, a simetria PCT.

Depois deste passeio pela física de partículas elementares voltamos ao eletromagnetismo. Já que consideramos mudanças temporais com a operação T, podemos também admitir operações que transladam uma experiência no tempo. O eletromagnetismo possui estas translações como elemento de simetria.

---

[2] Tsung Dao Lee nasceu em 1926. Em 1957 ele recebeu o premio Nobel junto com Franklin C.N. Yang pela descoberta da violação da paridade. C.N. Yang nasceu em 1922.

[3] Injustamente Chien-Shiung Wu (1912 – 1997) não recebeu o premio Nobel junto com Lee e Yang. Ela estava entre os pesquisadores mais importantes na física nuclear experimental. Ela recebeu o apelido de Queen of Nuclear Research.

Há ainda um outro tipo de simetria sumamente importante. Formulamos todas as leis e definimos todos os campos no espaço que foi construído a partir de pontos marcados nas paredes do laboratório. Mas poder-se-ia usar o espaço físico construído a partir de pontos marcados em algum bloco rígido que se move em relação ao nosso laboratório sem rotação com velocidade constante. Qualquer experiência que montamos no laboratório poder-se-ia remontar analogamente neste outro referencial. Um observador que se encontra em repouso em relação a este outro referencial iria obter exatamente os mesmos resultados da experiência original. Esta simetria, chamada de simetria de Lorentz, tem consequências extraordinárias que serão exploradas mais tarde no estudo da teoria da relatividade. Esta teoria mostrou que os conceitos a respeito de espaço e tempo que a humanidade elaborou durante séculos tinham graves equívocos. Então mais uma vez a teoria do eletromagnetismo contribuiu para uma descoberta fundamental do nosso mundo.

Exercícios:

E 8.7.1: Calcule o campo elétrico gerado pelo campo magnético variável da fórmula (8.7.1).

E 8.7.2: Mostre que os campos ρ_T, $\vec{j}_T$, $\vec{E}_T$ e $\vec{B}_T$ satisfazem as equações de Maxwell se os campos ρ, $\vec{j}$, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ satisfizerem estas equações.

E 8.7.3: Mostre que os campos ρ_P, $\vec{j}_P$, $\vec{E}_P$ e $\vec{B}_P$ satisfazem as equações de Maxwell se os campos ρ, $\vec{j}$, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ satisfizerem estas equações.

E 8.7.4: Mostre que uma reflexão num espelho pode ser obtida combinando a operação P com um giro de 180°.