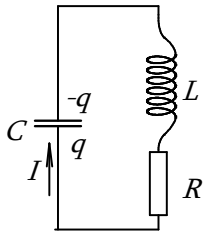


9.2 O circuito RLC



O fio do solenoide de um circuito LC tem naturalmente alguma resistência diferente de zero. Agora vamos tornar a descrição deste tipo de circuito um pouco mais realista considerando esta resistência. Pode haver também um resistor explicitamente no circuito. Então vamos analisar o circuito representado pela figura 9.2.1. A resistência do fio pode ser considerada como incluída no resistor que aparece no esquema explicitamente.

Fig. 9.2.1 Circuito RLC

A lei das malhas deste circuito difere daquela do circuito sem resistor apenas pelo termo RI .

$$RI + \frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt} \quad (9.2.1)$$

Com a relação entre corrente e carga q na placa na qual a corrente entra

$$I = \frac{dq}{dt} \quad (9.2.2),$$

obtemos a equação diferencial

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = -L \frac{d^2q}{dt^2} \quad (9.2.3).$$

Da Física II reconhecemos que esta equação é do tipo de um oscilador amortecido. Mesmo sem ter visto este tipo de equação antes, podemos desconfiar que um circuito como este da figura 9.2.1 deva executar uma oscilação amortecida. Pois o resistor vai transformar irreversivelmente energia elétrica em energia térmica. A perda de energia elétrica será proporcional à energia eletromagnética armazenada no capacitor e no indutor. Isto indica um comportamento exponencial.



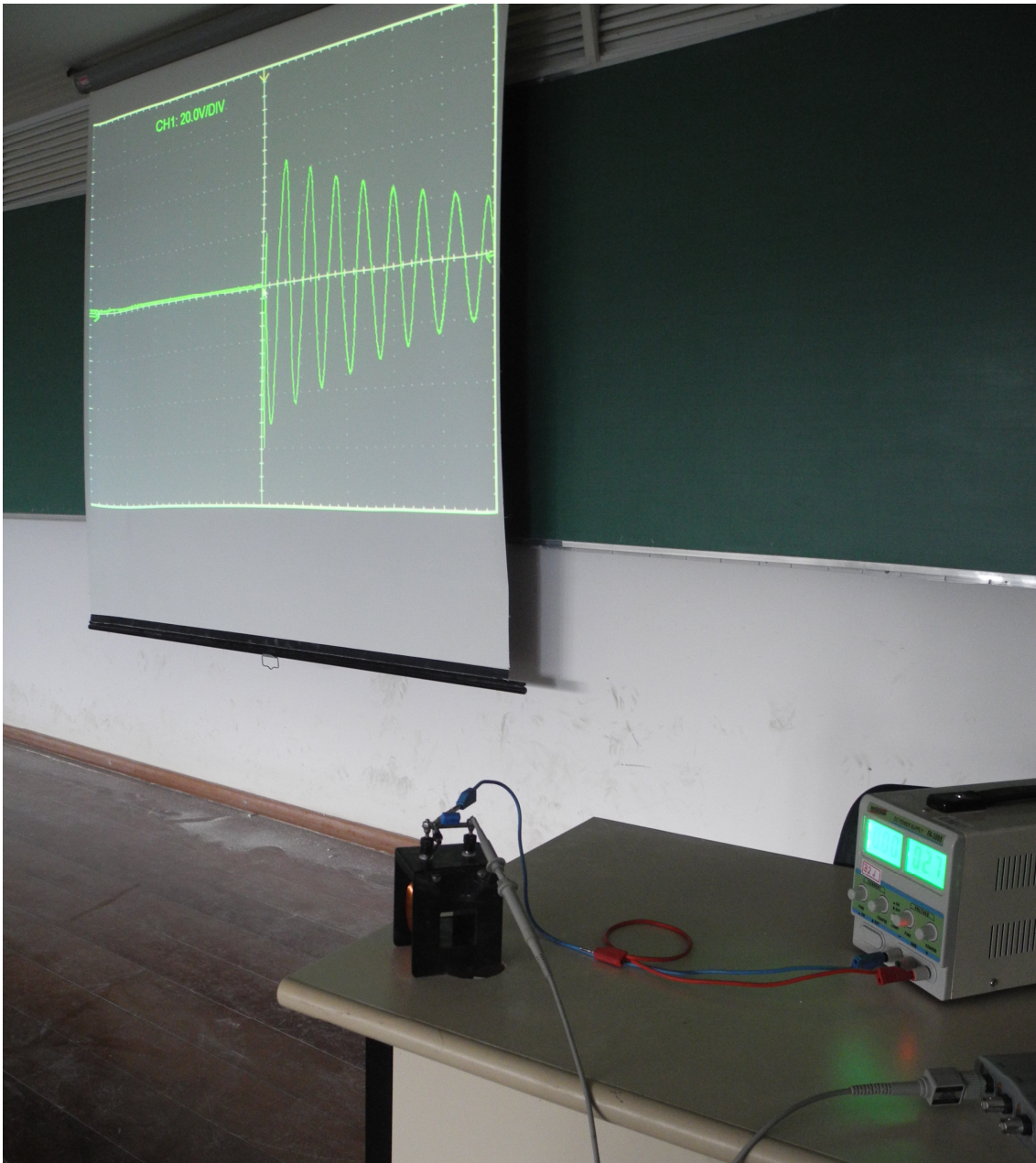
Fig. 9.2.2 Circuito RLC. O elemento R é apenas a resistência do fio da bobina. O capacitor é o bloquinho azul montado numa fita de placa de circuito com dois pinos banana. Esta fita de placa foi espetada nos borns dos terminais da bobina. Uma ponta de prova de um osciloscópio está grampeada nas pernas do capacitor.

Veremos com uma experiência se esta suspeita corresponde à verdade. A figura 9.2.2 mostra uma fotografia de um circuito RLC. No caso a resistência do circuito é somente a resistência do fio do solenoide. A voltagem no capacitor foi monitorada por um osciloscópio. A figura 9.2.3 mostra este circuito junto com uma fonte que serve para criar uma condição inicial não trivial. Aparece na imagem a projeção do gráfico das voltagens captadas pelo osciloscópio. Percebemos uma linda oscilação

amortecida.

Fig. 9.2.3 Oscilação amortecida da voltagem no capacitor de um circuito RLC.

Com as considerações sobre perda de energia e com estes dados experimentais, temos



todo motivo de querer resolver a equação (9.2.3) com uma tentativa que combine uma oscilação com um decaimento exponencial.

$$q(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0) \quad (9.2.4)$$

Mas há duas razões para não andar por este caminho. Primeiramente lembramos da Física II que às vezes o amortecimento de um oscilador pode ser tão forte que não há mais nenhum comportamento oscilatório. Neste caso, a tentativa (9.2.4) iria falhar. A segunda razão para evitar a aplicação da tentativa (9.2.4) é nossa preguiça de escrever longas fórmulas. Veja: a expressão do lado direito da fórmula (9.2.4) é um produto de duas funções. A derivada primeira deste produto gera dois termos. Na hora de derivar mais uma vez, cada um destes termos dá origem a dois termos. Muito trabalho! Toda

esta complicação pode ser evitada com o uso de variáveis complexas. As propriedades algébricas dos números complexos permitem uma considerável redução da complexidade de certos cálculos. No caso das oscilações, esta simplificação é tão valiosa que os números complexos se tornaram uma ferramenta corriqueira dos engenheiros que lidam com circuitos eletrônicos. No nosso estudo das oscilações elétricas, eles serão também muito valiosos, não apenas no estudo do circuito RLC. Na mecânica quântica, números complexos são indispensáveis.

Provavelmente todo leitor já aprendeu a calcular com números complexos. Mas é comum que as pessoas mesmo conhecendo estes números tenham uma sensação desagradável de fazer algo irreal, calculando com “*números que não existem de verdade*”. Estas pessoas já esqueceram que passaram por sensações parecidas na infância quando lhes foram apresentados os números negativos na escola. - Que loucura! O número -3 ! Eu entendo o que significa que um bloco de metal tenha a massa de 3 kg. Isto significa que uma balança simétrica com este bloco de metal num dos pratos da balança fica equilibrada se colocarmos três blocos de um quilo no outro prato. Mas o que significaria uma massa de -3 kg ? A introdução de números negativos foi motivada pelo desejo de poder sempre contar com a existência de soluções de equações do tipo $a + x = b$. Isto leva a uma estrutura matemática simples. Formalmente podemos acrescentar ao conjunto de valores de massa estes valores negativos de massa sem nos preocupar se eles têm um significado ou não. Depois resulta que no caso das massas estes novos valores realmente têm um significado. Lembrem-se do medidor de fluxo de água que introduzimos para entender o conceito de densidade de fluxo? Uma massa de água que passa através do anel no sentido de orientação conta positivamente e uma massa que passa no sentido contrário conta negativamente.

No caso dos números complexos o acréscimo de novos números é motivado pelo desejo de poder contar com soluções de equações do tipo $x^2 = -1$. Acrescentar formalmente ao conjunto de possíveis valores de uma corrente I novos valores da forma $(a + ib)A$ ou aos possíveis valores de uma tensão V novos valores do tipo $(a + ib)V$ pode trazer enormes simplificações mesmo que estes valores, talvez, não tenham uma interpretação concreta como aquela das massas negativas. Uma das vantagens de valores complexos é uma estranha relação entre a função exponencial e as funções trigonométricas seno e cosseno que se revela na álgebra complexa.

Os números complexos podem ser definidos como pares ordenados de números reais com as seguintes regras de soma e multiplicação:

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle &= \langle a + c, b + d \rangle \\ \langle a, b \rangle \langle c, d \rangle &= \langle ac - bd, ad + bc \rangle \end{aligned} \tag{9.2.5}$$

Mas geralmente estes números são escritos na forma de

$$\langle a, b \rangle \rightarrow a + ib \tag{9.2.6}$$

com a unidade imaginária i cujo quadrado vale -1 . Esta maneira de escrever os números complexos tem a vantagem de que o conjunto de números reais \mathbb{R} pode formalmente ser considerado um subconjunto do conjunto \mathbb{C} dos números complexos. Define-se o módulo de um número complexo

$$|a + ib| \stackrel{\text{def.}}{=} \sqrt{a^2 + b^2} \tag{9.2.7}$$

e o complexo conjugado

$$(a + ib)^* = a - ib \quad (9.2.8).$$

Com o complexo conjugado pode-se escrever o módulo de um número na seguinte forma:

$$|z| = \sqrt{z^* z} \quad (9.2.9).$$

O número real a é chamado de *parte real* do número $a + ib$ e o número b é chamado de *parte imaginária* de $a + ib$. Então a parte imaginária de um número complexo é um número real!

A divisão de um número complexo por um número real é definida como

$$\frac{a + ib}{c} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{a}{c} + i \frac{b}{c} \quad (9.2.10)$$

e a divisão de dois números complexos z , y é definida da seguinte forma

$$\frac{z}{y} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{z y^*}{y y^*} \quad (9.2.11).$$

O maior poder analítico que os números complexos fornecem se revela no estudo de funções diferenciáveis e complexas que dependem de variáveis complexas. Mas aqui vamos usar apenas funções complexas diferenciáveis que dependem de uma variável real. A derivada é calculada simplesmente derivando tanto a parte real como a parte imaginária:

$$\frac{d(a(\alpha) + ib(\alpha))}{d\alpha} = \frac{da(\alpha)}{d\alpha} + i \frac{db(\alpha)}{d\alpha} \quad (9.2.12)$$

Para nossa investigação das oscilações, a função exponencial será de especial interesse. Na seção 5.8 definimos a função exponencial com a motivação da conta bancária:

A função e^x é aquela função que cumpre a equação diferencial $d(e^x)/dx = e^x$ e a condição inicial $e^0 = 1$.

Podemos incluir a regra da cadeia e definir logo uma função exponencial com alguma constante de proporcionalidade no expoente $x = a\alpha$ com $a = \text{const.}$:

A função $e^{a\alpha}$ é aquela função que cumpre a equação diferencial $d(e^{a\alpha})/d\alpha = a e^{a\alpha}$ e a condição inicial $e^{a \cdot 0} = 1$.

Agora vejam a seguinte função:

$$f(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=} \cos(\alpha) + i \sin(\alpha) \quad (9.2.13)$$

Calculando a derivada obtemos:

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = -\sin(\alpha) + i \cos(\alpha) \quad (9.2.14)$$

Se escrevermos o fator -1 que multiplica o seno na forma de i^2 e colocarmos um fator i em evidência, perceberemos que esta função obedecerá a uma equação diferencial muito simples:

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = i(i \operatorname{sen}(\alpha) + \cos(\alpha)) = i f(\alpha) \quad (9.2.15).$$

Veremos qual é o valor desta função no ponto $\alpha = 0$:

$$f(0) = \cos(0) + i \operatorname{sen}(0) = 1 \quad (9.2.16)$$

Então pela nossa definição na caixinha com margem dupla, devemos chamar esta função de $e^{i\alpha}$.

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha) \quad (9.2.17)$$

Esta fórmula é a famosa fórmula de Euler¹.



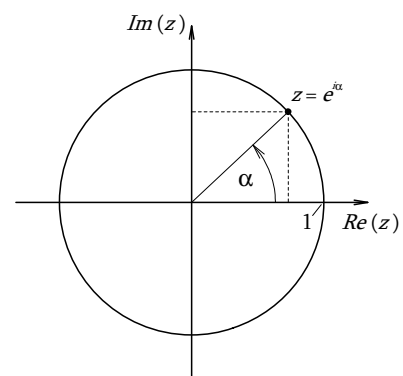
Fig. 9.2.4 Leonhard Euler Pintado por Jakob Emanuel Handmann - Kunstmuseum Basel A imagem foi transferida de en.wiki (en:Image:Leonhard Euler.jpg) under the {{PD-old}} license tag. Wars 16:56, 25 June 2006 (UTC), Public Domain, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=893656>.

A expressão no lado direito desta fórmula fornece uma interpretação geométrica simples do número $e^{i\alpha}$. Podemos representar os números complexos por pontos num plano euclidiano de duas dimensões usando a parte real e a parte imaginária do número como coordenadas cartesianas neste plano. A distância entre dois pontos P_z , P_w que representam dois números complexos z e w é dada pelo módulo do número $z - w$.

Com $[\cos(\alpha)]^2 + [\operatorname{sen}(\alpha)]^2 = 1$, percebemos que os pontos imagem da função $e^{i\alpha}$ ficam todos com a distância 1 do número zero. A definição geométrica das funções cosseno e seno revela logo o significado do número α : este é o ângulo que o segmento de reta entre zero e o número $e^{i\alpha}$ faz com o eixo real. A figura 9.2.5 mostra esta interpretação geométrica.

Fig. 9.2.5 Representação do número $e^{i\alpha}$ no plano complexo.

Se considerarmos ângulos α que aumentam com o tempo da forma $\alpha = \omega t + \alpha_0$, teremos meios de descrever uma oscilação como parte real de uma função exponencial. Falta somente um jeito de combinar isto com o fator $e^{-\beta t}$. O leitor pode mostrar o seguinte teorema (Exercício E 9.2.X):



¹ Leonhard Euler 15/04/1707 – 18/09/1783 foi o matemático mais produtivo de todos os tempos. Pierre-Simon Laplace dizia: “Leiam Euler, leiam Euler! ele é o nosso mestre!”

Teorema 9.2.1: A função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfaz a equação diferencial $f' = f$ e a condição inicial $f(0) = 1$ tem a seguinte propriedade: para quaisquer números complexos z_1 e z_2 vale $f(z_1)f(z_2) = f(z_1 + z_2)$.

Com este teorema pode-se esperar que aquela tentativa (9.2.4) possa sair de uma única função exponencial. Então podemos resolver tudo sem gerar muitos termos com a regra de produto. Gastamos muito esforço com os números complexos, e isto somente por causa da nossa preguiça de manipular alguns poucos termos gerados pela regra de produto! Será que isto valeu a pena? Sim, valeu a pena! A utilidade dos números complexos vai muito além da tarefa de resolver a equação (9.2.3). Na análise de circuitos com fontes cujas eletromotâncias oscilam, o uso de variáveis complexas pode reduzir cálculos de páginas a uma única linha.

Estamos prontos para resolver a equação diferencial (9.2.3). Usaremos simplesmente uma tentativa de função exponencial:

$$q(t) = q_0 \exp\{wt\} \quad (9.2.18).$$

Inserindo esta tentativa na equação diferencial obtemos

$$Rwq_0 \exp\{wt\} + \frac{1}{C}q_0 \exp\{wt\} = -Lw^2q_0 \exp\{wt\} \quad (9.2.19).$$

Esta fórmula é uma igualdade válida se e somente se o parâmetro w satisfizer a seguinte equação algébrica:

$$w^2 + \frac{R}{L}w + \frac{1}{LC} = 0 \quad (9.2.20).$$

Completando o quadrado, obtemos as seguintes soluções:

$$\begin{aligned} w_+ &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{-\frac{1}{LC} + \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \\ w_- &= -\frac{R}{2L} - \sqrt{-\frac{1}{LC} + \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \end{aligned} \quad (9.2.21)$$

Uma raiz quadrada de uma diferença de dois termos positivos deve sempre acender um sinal de alerta. O que acontece se $1/LC$ for maior que $R^2/4L^2$? Um desastre! Não! Calma! No mundo dos números complexos isto deixou de ser um desastre. Justamente o caso $1/LC > R^2/4L^2$ leva ao comportamento oscilatório. Isto é o caso de amortecimento *subcrítico*. Neste caso, a raiz é imaginária e podemos escrever a solução w_+ na forma

$$w_+ = -\frac{R}{2L} + i\omega \quad \text{com} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (9.2.22).$$

Inserindo esta expressão na fórmula da nossa tentativa (9.2.18), obtemos uma solução da equação diferencial:

$$q(t) = q_0 \exp\left\{-\frac{R}{2L}t + i\omega t\right\} \quad (9.2.23)$$

A constante ajustável q_0 também pode ser complexa. Com a fórmula de Euler, podemos escrever esta constante na forma $q_0 = |q_0|e^{i\alpha_0}$. Esta maneira de escrever um valor complexo q_0 é chamada de *forma polar do valor* q_0 , e o ângulo α_0 é chamado de *argumento do valor* q_0 . Com o teorema, cuja demonstração ficou como exercício e que estabelece a propriedade $e^a e^b = e^{(a+b)}$ da função exponencial, podemos arrumar o aspecto da solução de tal forma que o decaimento exponencial apareça separado de um movimento circular no círculo unitário:

$$q(t) = |q_0| e^{-\frac{R}{2L}t} e^{i(\omega t + \alpha_0)} \quad (9.2.24)$$

Na figura 9.2.6 mostro a trajetória que o número complexo $q(t)/q_0$ percorre quando o tempo avança.

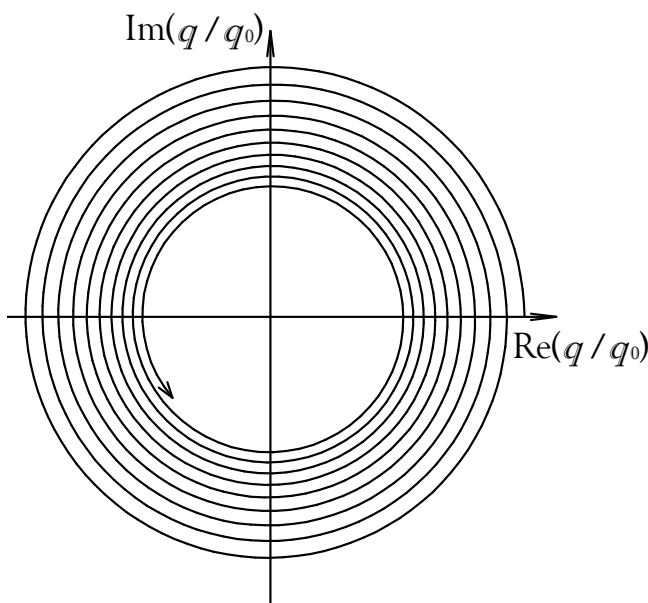


Fig. 9.2.6 Trajetória do número $\exp\{-\beta t + i(\omega t + \alpha_0)\}$.

O que falta é sair do mundo fictício das grandezas complexas e voltar para o nosso mundo real com cargas elétricas verdadeiras que não possuem nenhuma parte imaginária. Para esta volta é essencial que a multiplicação de um valor complexo por um valor real não misture a parte real e a imaginária. Isto significa que vale para qualquer valor real r e para qualquer valor q a seguinte relação:

$$\text{Re}(rq) = r \text{Re}(q) \quad \text{com } r \text{ real} \quad (9.2.25)$$

Como o tempo t é real, podemos também comutar a tomada da parte real e a derivação de uma função temporal:

$$\text{Re}\left(\frac{dq}{dt}\right) = \frac{d \text{Re}(q)}{dt} \quad (9.2.26).$$

Como os fatores R , $1/C$ e $-L$ são reais, podemos gerar da solução complexa uma solução real tomando a parte real da equação diferencial e aplicando as fórmulas (9.2.25) e (9.2.26):

$$\begin{aligned} \text{Re}\left[R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}\right] &= \text{Re}\left[-L \frac{d^2q}{dt^2}\right] \\ \Downarrow & \\ R \frac{d \text{Re } q}{dt} + \frac{\text{Re } q}{C} &= -L \frac{d^2 \text{Re } q}{dt^2} \end{aligned} \quad (9.2.27)$$

Isto significa que a função

$$q(t) = \operatorname{Re}[q(t)] \quad (9.2.28)$$

é também uma solução da equação diferencial, e esta “vive” no nosso mundo real. Com a fórmula de Euler obtemos da solução complexa (9.2.24) imediatamente a desejada solução real:

$$q(t) = |q_0| e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(\omega t + \alpha_0) \quad (9.2.29).$$

Isto é exatamente a nossa tentativa (9.2.4) que abandonamos por causa da preguiça de manusear os termos gerados pela regra de produto. Os parâmetros desta tentativa têm agora valores bem determinados:

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (9.2.30).$$

O leitor provavelmente pergunta: por que abandonamos a outra solução w_- da equação quadrática (9.2.20)? Esta solução descreve um movimento no plano complexo que gira no sentido contrário, dando a mesma solução real. Então para a nossa finalidade esta segunda solução não traz nada de novo. A situação é diferente se os parâmetros do circuito são tais que $1/LC < R^2/4L^2$. Neste caso, as duas soluções da equação quadrática dão origem a duas soluções reais que descrevem decaimentos exponenciais sem comportamento oscilatório. Este é o caso de um oscilador *superamortecido*. Há ainda a possibilidade de *amortecimento crítico* quando $1/LC = R^2/4L^2$. Neste caso a tentativa (9.2.18) fornece somente uma solução, e uma segunda solução linearmente independente tem que ser construída com um outro método. O leitor que não aprendeu estes detalhes na Física II pode consultar o livro de Física II de H. M. Nussenzveig.

Exercícios:

E 9.2.1: No exercício E 9.1.1 consideramos um circuito LC com um capacitor de 10,0 nF e uma bobina de 10,0 cm de comprimento enrolada com 200 espiras formando um cilindro de 10,0 mm de raio. Vamos supor que cada espira encoste na sua espira vizinha. Então temos como calcular o diâmetro do arame. Mas temos que considerar ainda que este arame possui uma camada de verniz. Vamos supor que este verniz tenha uma espessura de 0,05 mm. O cobre tem uma resistividade de $0,0172 \Omega(\text{mm})^2 \text{m}^{-1}$. Como esta resistividade é diferente de zero, temos na verdade um circuito RLC.

(a) Determine se este circuito pode oscilar, ou seja, se o amortecimento é subcrítico.

(b) Caso ele for subcrítico, calcule em quantas oscilações a amplitude de oscilação decai por um fator $1/e$.

E 9.2.2: Demonstre o Teorema 9.2.1.

E 9.2.3: Use a fórmula de Euler e a propriedade $e^a e^b = e^{(a+b)}$ da função exponencial para deduzir as fórmulas trigonométricas $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$ e $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)$. Faça esta dedução sem papel e lápis com os olhos fechados!

E 9.2.4: Escreva os pontos de destaque desta seção.