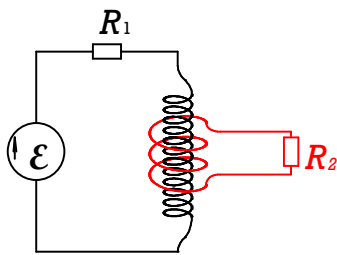


9.5 Indutância mútua e transformadores.

Até agora as aplicações da nova lei das malhas se limitaram essencialmente a circuitos com apenas uma malha. A única exceção foi o circuito da figura 9.3.9. Mas neste circuito o elemento que fornece a única contribuição apreciável para o fluxo magnético era comum para as duas malhas. Agora vamos considerar circuitos de várias malhas de forma mais geral. As malhas nem precisam ter uma conexão condutora que ligue uma malha na outra. Mesmo sem ter contato elétrico, uma malha pode influenciar a outra através do campo magnético. Dependendo da disposição geométrica dos elementos de circuitos das malhas, o campo magnético gerado pela corrente variável de uma malha pode induzir correntes numa outra malha. Esta influência mútua pelo campo magnético tem importantes aplicações. Geralmente um acoplamento magnético forte é desejável nestas aplicações.

Para conseguir um acoplamento magnético forte entre malhas de um circuito pode-se enrolar um solenoide por cima dos arames já enrolados de um outro solenoide. Desta maneira o campo magnético gerado pela corrente de um solenoide contribui para o fluxo magnético da malha à qual o segundo solenoide pertence. A figura 9.5.1 mostra este tipo de solenoide duplo. Evidentemente um desenho deste tipo de circuito com duas



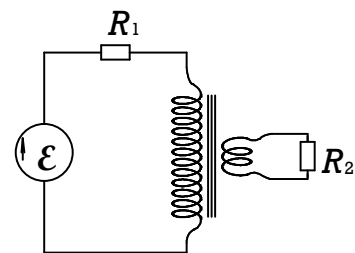
bobinas superpostas fica muito confuso e na figura tive que usar duas cores para poder melhor distinguir os solenoides. Por esta razão usa-se em esquemas de circuitos uma representação simbólica mais simples que mostra um solenoide ao lado do outro. Além disso, a representação das voltinhas é simbólica e o número exato de espiras não precisa corresponder ao número de voltinhas. Desenham-se ainda umas linhas paralelas entre os solenoides.

Fig. 9.5.1 Circuito de duas malhas com acoplamento magnético.

A figura 9.5.2 mostra o mesmo circuito da figura 9.5.1, mas usando a linguagem simbólica que facilita a visibilidade.

Fig. 9.5.2 O mesmo circuito da figura 9.5.1 com uma representação simbólica dos solenoides acoplados.

Qual é o significado do símbolo das linhas paralelas? Como veremos no capítulo 10, há motivos para colocar ferro, ou um material com propriedades magnéticas parecidas, dentro dos solenoides. Estes materiais modificam a indutância dos solenoides. Mas, fora deste efeito desejado, a presença de um bloco de ferro dentro de um solenoide com corrente alternada teria um efeito indesejável. O ferro é um condutor e se este material ficasse numa região com campo magnético variável, apareceriam correntes induzidas no material. Fala-se de *correntes de Foucault*, porque elas têm as mesmas características das correntes que provocam o atrito magnético descoberto por Foucault. Estas correntes dissipariam energia inutilmente. Para reduzir esta perda de energia, coloca-se o ferro em forma de lâminas finas de tal maneira que o caminho destas correntes de Foucault fique interrompido. As linhas paralelas do símbolo usado na figura 9.5.2 têm a sua origem nestas laminas de ferro. A figura 9.5.3 mostra um equipamento com bobinas enroladas e com um núcleo de ferro composto de muitas laminas. Este tipo de equipamento é um *transformador*.



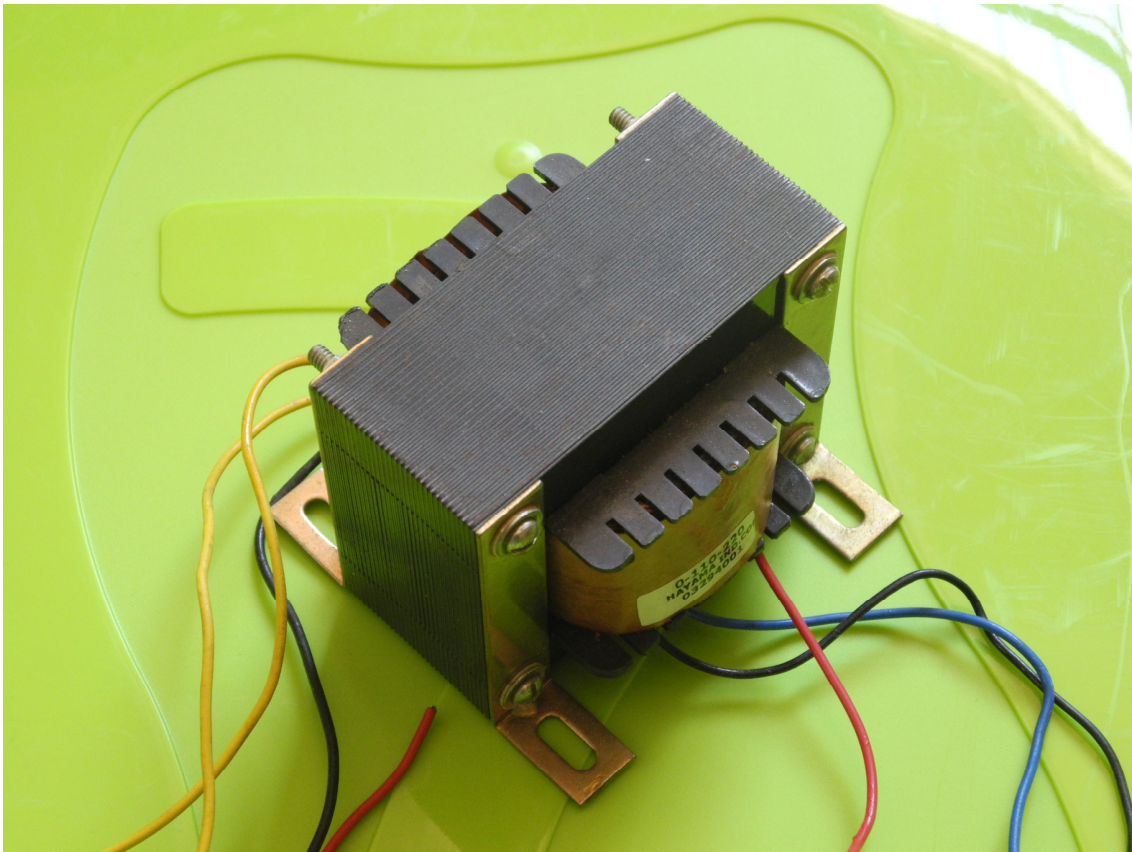
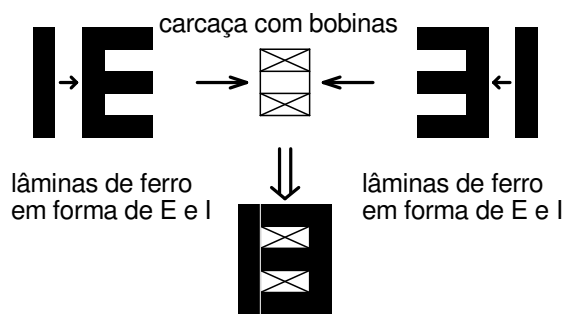


Fig. 9.5.3 Transformador

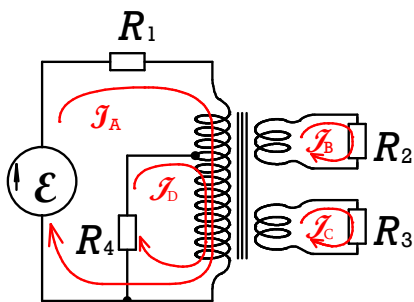
Este tipo de transformador é muito usado em pequenos equipamentos eletrônicos. O núcleo de ferro é composto de lâminas em forma de E e I. A figura 9.5.4 mostra como se monta o núcleo encaixando alternadamente “Es” e “Is” dos dois lados das bobinas.

Fig. 9.5.4

Montagem de um transformador com núcleo tipo E-I.



Pode haver mais de duas bobinas num transformador e nem todas as malhas envolvidas no circuito precisam estar



eletricamente isoladas umas das outras. A figura 9.5.5 mostra um exemplo de um circuito bastante geral. Indiquei com traços vermelhos no esquema uma possível escolha para definir malhas para este circuito. Repare que as malhas A e D não estão mutuamente isoladas.

Fig. 9.5.5 Exemplo de um circuito com diversas malhas magneticamente acopladas.

Para poder escrever as leis de malha para cada uma das malhas escolhidas num dado circuito, precisamos do fluxo magnético através de cada uma das malhas. Estes fluxos

dependem linearmente da matriz coluna formada das correntes de malha¹. Na seção 5.5 introduzimos as correntes de malha como novas incógnitas com o intuito de reduzir o número de incógnitas e equações. Aqui estas variáveis se tornam um ingrediente essencial para poder definir as indutâncias num circuito com várias malhas.

O fluxo magnético através de uma malha número k de um circuito com N malhas independentes pode ser escrito em termos das correntes de malha da seguinte forma linear:

$$\Phi_k = \sum_{l=1}^N L_{kl} \mathcal{J}_l \quad (9.5.1).$$

Podemos escrever estas fórmulas também como uma única fórmula matricial

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdot & \cdot & L_{1N} \\ L_{21} & L_{22} & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ L_{N1} & & & & L_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathcal{J}_N \end{pmatrix} \quad (9.5.2).$$

Os elementos da diagonal, L_{kk} , são chamados de *autoindutâncias* e os elementos fora da diagonal são chamados de *indutâncias mútuas*.

A definição do fluxo Φ_k usa uma orientação da malha número k tal que o vetor normal da superfície forme com a orientação positiva da corrente \mathcal{J}_k um parafuso direito. Com esta orientação das superfícies, as autoindutâncias são todas positivas. Numa disciplina mais avançada se mostra que vale mais do que esta desigualdade. Para quaisquer valores das correntes de malha vale

$$\sum_{l=1}^N \mathcal{J}_k L_{kl} \mathcal{J}_l \geq 0 \quad (9.5.3).$$

Há uma interpretação física desta desigualdade. O leitor lembra-se da fórmula da energia magnética associada a uma malha com indutância L e corrente I ? Na seção 8.4 descobrimos que a energia magnética armazenada numa única malha de indutância L com corrente I vale

$$E_{Mag} = \frac{L}{2} I^2 \quad (9.5.4).$$

Pode-se mostrar que a energia magnética armazenada num circuito com N malhas vale

$$E_{Mag} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \mathcal{J}_k L_{kl} \mathcal{J}_l \quad (9.5.5).$$

Então a desigualdade (9.5.3) significa que a energia magnética armazenada não pode ser negativa. Isto é bastante razoável tendo em vista que a densidade desta energia é $\vec{B} \cdot \vec{B} / \mu_0 2$, o que não pode ser negativo. Num curso de eletromagnetismo mostra-se ainda que a matriz das indutâncias é sempre simétrica, ou seja, as indutâncias mútuas L_{kl} e L_{lk} são sempre iguais.

¹ Como discutimos na seção 9.1, há uma aproximação envolvida nesta afirmação. Na verdade há também contribuições das correntes de deslocamento.

$$L_{kl} = L_{lk} \quad (9.5.6)$$

Depois de ter visto como indutâncias podem ser calculadas de forma aproximada para geometrias simples, é fácil calcular os elementos da matriz de indutâncias. Para o caso de duas bobinas longas com aproximadamente a mesma área transversal A e mesmo comprimento ℓ com N_1 e N_2 espiras, obtemos obviamente os seguintes valores:

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{\mu_0 A}{\ell} N_1 N_1 & L_{12} &= \pm \frac{\mu_0 A}{\ell} N_1 N_2 \\ L_{21} &= \pm \frac{\mu_0 A}{\ell} N_1 N_2 & L_{22} &= \frac{\mu_0 A}{\ell} N_2 N_2 \end{aligned} \quad (9.5.7).$$

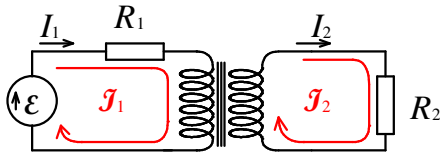
O sinal das indutâncias mútuas depende da orientação das setas de definição das correntes de malha e do sentido dos enrolamentos das bobinas. Para o caso das indutâncias (9.5.7) vale

$$L_{11}L_{22} = L_{12}L_{21} \quad (9.5.8).$$

Enquanto a relação de simetria (9.5.6) é sempre válida, a (9.5.8) não vale para qualquer transformador. Para muitos transformadores a igualdade (9.5.8) vale de forma aproximada; $L_{11}L_{22} \approx L_{12}L_{21}$.

Agora vamos investigar um primeiro exemplo de circuito com duas malhas com acoplamento magnético. No circuito da figura 9.5.6 temos um transformador ligado numa fonte com eletromotância

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega_f t) \quad (9.5.9).$$



$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega_f t)$$

Fig. 9.5.6 Circuito de duas malhas com transformador e fonte oscilatória. Os números de espiras N_1 e N_2 das bobinas da primeira e da segunda malha não correspondem ao número de voltas desenhadas.

As correntes I_1 e I_2 são definidas em pontos que pertencem cada um somente a uma malha. Portanto temos $I_1 = \mathcal{J}_1$ e $I_2 = \mathcal{J}_2$, ou seja, as

correntes que podemos medir com um amperímetro coincidem com as variáveis incógnitas \mathcal{J}_1 e \mathcal{J}_2 .

As duas leis de malha são:

$$\begin{aligned} -\mathcal{E} + R_1 \mathcal{J}_1 &= -L_{11} \frac{d\mathcal{J}_1}{dt} - L_{12} \frac{d\mathcal{J}_2}{dt} \\ R_2 \mathcal{J}_2 &= -L_{21} \frac{d\mathcal{J}_1}{dt} - L_{22} \frac{d\mathcal{J}_2}{dt} \end{aligned} \quad (9.5.10).$$

Isto é um sistema inhomogêneo-linear de equações diferenciais. Sabemos que a solução geral é a soma de uma solução particular e a solução geral do sistema homogêneo. Sabemos também que a solução homogênea desaparecerá exponencialmente com o passar do tempo. Então temos razões para investigar aqui somente a solução particular que deve oscilar de forma estacionária com a frequência da fonte. Transferimos a discussão da solução geral da equação homogênea para o apêndice desta seção. Para encontrar uma solução particular será mais uma vez vantajoso passar tudo para valores

complexos. Então vamos substituir a eletromotância real por uma com exponencial complexa

$$\mathcal{E}_0 \cos(\omega_F t) \rightarrow \mathcal{E}_0 e^{i\omega_F t} \quad (9.5.11)$$

e vamos fazer a tentativa de solução complexa

$$\begin{aligned} I_1(t) &= I_{1o} e^{i\omega_F t} \\ I_2(t) &= I_{2o} e^{i\omega_F t} \end{aligned} \quad (9.5.12).$$

Inserindo esta tentativa no sistema (9.5.10) com a fonte substituída pela fonte complexa, obtemos a seguinte equação algébrica para os fatores de amplitudes complexas:

$$\begin{pmatrix} R_1 + i\omega_F L_{11} & i\omega_F L_{12} \\ i\omega_F L_{21} & R_2 + i\omega_F L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{1o} \\ I_{2o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.5.13).$$

A solução é

$$\begin{aligned} I_{1o} &= \frac{\mathcal{E}_0 (R_2 + i\omega_F L_{22})}{(R_1 + i\omega_F L_{11})(R_2 + i\omega_F L_{22}) + \omega_F^2 L_{12}^2} = \\ &= \frac{\mathcal{E}_0 (R_2 + i\omega_F L_{22})}{R_1 R_2 + i\omega_F (R_1 L_{22} + R_2 L_{11}) + \omega_F^2 (L_{12}^2 - L_{11} L_{22})} \end{aligned} \quad (9.5.14)$$

e

$$I_{2o} = \frac{-\mathcal{E}_0 i\omega_F L_{21}}{R_1 R_2 + i\omega_F (R_1 L_{22} + R_2 L_{11}) + \omega_F^2 (L_{12}^2 - L_{11} L_{22})} \quad (9.5.15).$$

Somente para tornar nosso trabalho mais simples, vamos supor o caso das bobinas com a mesma área e mesmo comprimento enroladas juntas de tal forma que valem as fórmulas (9.5.7) e (9.5.8). Esta hipótese simplifica os resultados:

$$I_{1o} = \frac{\mathcal{E}_0 (R_2 + i\omega_F L_{22})}{R_1 R_2 + i\omega_F (R_1 L_{22} + R_2 L_{11})} \quad (9.5.16)$$

$$I_{2o} = \frac{-\mathcal{E}_0 i\omega_F L_{21}}{R_1 R_2 + i\omega_F (R_1 L_{22} + R_2 L_{11})} \quad (9.5.17)$$

Vamos investigar o que acontece na malha 2 em duas situações extremas: primeiramente vamos investigar o limite $R_2 \rightarrow \infty$ e depois o caso contrário $R_2 \rightarrow 0$. O primeiro limite não parece ser interessante, pois obviamente ele corresponde ao valor trivial zero da corrente I_{2o} . Mas este limite se torna interessante quando avaliarmos não a corrente, mas o produto $\mathcal{V}_2 = R_2 I_{2o}$. Neste caso, o limite $R_2 \rightarrow \infty$ significa que o resistor R_2 empenha o papel de um voltímetro ideal. A voltagem medida oscila com a amplitude $\lim_{R_2 \rightarrow \infty} |\mathcal{V}_2|$. É esta amplitude que nos interessa:

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} |\mathcal{V}_2| = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \left| \frac{-\mathcal{E}_0 i\omega_F L_{21} R_2}{R_1 R_2 + i\omega_F (R_1 L_{22} + R_2 L_{11})} \right| = \left| \frac{\mathcal{E}_0 \omega_F L_{21}}{R_1 + i\omega_F L_{11}} \right| \quad (9.5.18).$$

Nas aplicações, a resistência R_1 não costuma ser um resistor propriamente dito, mas este valor representa a resistência interna da fonte e a resistência da bobina do indutor da malha 1. No uso comum de um transformador, o valor R_1 deve ser muito menor que $\omega_F L_{11}$; $R_1 \ll \omega_F L_{11}$. Supondo esta situação, podemos fazer a seguinte aproximação:

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} |V_2| \approx \left| \frac{L_{21}}{L_{11}} \right| \mathcal{E}_0 \quad (9.5.19).$$

Com as fórmulas das indutâncias (9.5.7) podemos escrever este resultado em termos dos números das espiras das bobinas:

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} |V_2| \approx \frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_0 \quad (9.5.20)$$

A mesma proporcionalidade vale para os valores eficazes:

$$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} |V_2|_{ef} \approx \frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_{ef} \quad (9.5.21)$$

Então o que está na caixa pontilhada da figura 9.5.7 comporta-se como uma fonte com eletromotância alternada de

$$\mathcal{E}_{ef}^{secundário} \approx \frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_{ef} \quad (9.5.22)$$

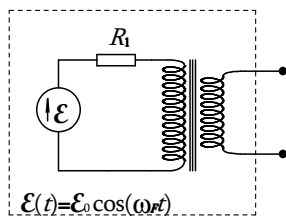


Fig. 9.5.7 Transformador visto como uma fonte secundária.

Chamei esta eletromotância de secundária, pois a malha B é geralmente chamada de secundária enquanto a malha com fonte é chamada de primária.

Então o transformador permite gerar um novo valor de eletromotância $\mathcal{E}_{ef}^{secundário}$ a partir da eletromotância original

\mathcal{E}_{ef} . O novo valor $\mathcal{E}_{ef}^{secundário}$ pode ser menor ou maior que \mathcal{E}_{ef} .

Com o divisor de voltagem percebemos que não é apenas o valor da eletromotância que interessa quando analisamos uma fonte. A resistência interna da fonte é também um item importante. Então vamos olhar para este aspecto. Podemos descobrir a resistência interna medindo a corrente de curto-circuito. Então agora vamos investigar o caso $R_2 \rightarrow 0$. Temos

$$I_{2 \text{ o curto circuito}} = \lim_{R_2 \rightarrow 0} I_{2 \text{ o}} = \frac{-\mathcal{E}_0 L_{21}}{R_1 L_{22}} = \frac{-\mathcal{E}_0}{R_1} \frac{N_1}{N_2} \quad (9.5.23)$$

Ou em termos de valor eficaz

$$I_{2 \text{ ef}} = \frac{\mathcal{E}_{ef}}{R_1} \frac{N_1}{N_2} \quad (9.5.24)$$

Então a resistência interna é

$$R_{int}^{secundário} = \frac{\mathcal{E}_{ef}^{secundário}}{I_{Bef}} = \frac{\frac{N_2}{N_1} \mathcal{E}_{ef}}{\frac{\mathcal{E}_{ef}}{R_1} \frac{N_1}{N_2}} = R_1 \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \quad (9.5.25)$$

Caso o transformador fosse ideal, o fio enrolado na bobina não teria resistência alguma e o valor R_1 representaria apenas a resistência interna da fonte primária. Então, neste caso, o transformador transforma não apenas a voltagem, mas também a resistência interna é transformada, e esta transformação ocorre com o quadrado do fator que incide sobre a voltagem. Então, se reduzirmos a voltagem por um fator f , a resistência interna diminui logo por f^2 .

Na seção 5.5 vimos que se consegue tirar a potência máxima de uma fonte ligando um resistor cujo valor é igual à resistência interna da fonte. O valor desta potência máxima é

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}_{\text{fonte}}^2}{4R_{\text{int. fonte}}} \quad (9.5.26).$$

Nesta fórmula $\mathcal{E}_{\text{fonte}}$ e $R_{\text{int. fonte}}$ são a eletromotância e a resistência interna da fonte respectivamente. Agora vamos imaginar que o transformador seja ideal e a resistência R_1 seja simplesmente a resistência interna da fonte primária. Então a potência máxima que pode ser tirada da fonte primária vale

$$P_{\max \text{ primária}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}^2}{4R_1} \quad (9.5.27)$$

A potência máxima que se pode tirar da fonte secundária é

$$P_{\max \text{ secundária}} = \frac{(\mathcal{E}_{\text{ef}}^{\text{secundário}})^2}{4R_{\text{int}}^{\text{secundário}}} = \frac{\left(\mathcal{E}_{\text{ef}} \frac{N_2}{N_1}\right)^2}{4R_1 \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}^2}{4R_1} \quad (9.5.28),$$

ou seja, ela tem o mesmo valor da potência máxima da fonte original. Mas esta potência máxima é tirada da fonte secundária com um resistor diferente daquele que tiraria a potência máxima da fonte original. O transformador ideal conserva potência, mas ele altera o formato desta potência; um produto de alta voltagem e baixa corrente pode ser transformado num produto de baixa voltagem e alta corrente. Uma transformação inversa é igualmente possível.

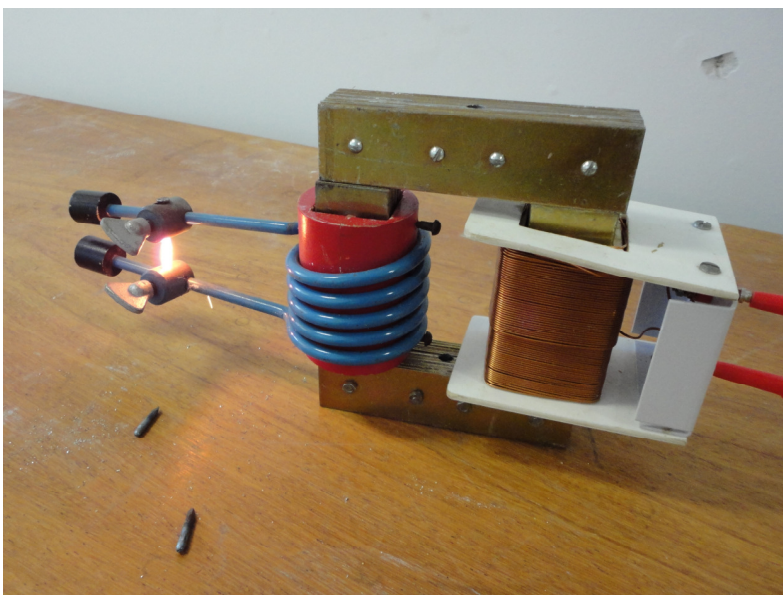
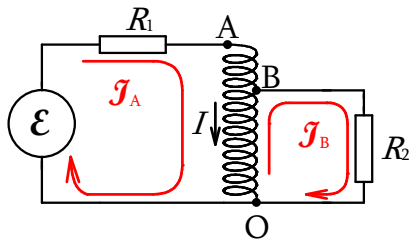


Fig.9.5.8 Um prego de ferro é aquecido com alta corrente fornecida por um transformador cuja bobina primária é alimentada com 127 V.

Vejamus um exemplo de aplicação. Imaginem que queiramos derreter um prego passando um valor de corrente por este prego com um valor tão elevado que a energia depositada nele aqueça o mesmo ao ponto de liquefazer esse metal. A

resistência elétrica do prego é muito pequena e não precisamos dos 127 V da tomada para alcançar a corrente necessária. Se ligássemos o prego diretamente na tomada puxaríamos uma corrente tão alta que os disjuntores de proteção da instalação do prédio iriam desligar imediatamente. Mas com a ajuda de um transformador podemos converter um produto de 127 V e uma corrente moderada num produto de poucos volts e uma corrente gigante. A figura 9.5.8 mostra esta experiência. Neste caso, a bobina secundária com apenas 5 espiras não está enrolada em cima da bobina primária. Neste transformador, o núcleo de ferro serve não apenas para modificar as indutâncias das bobinas, mas ele guia também as linhas do campo magnético de uma bobina para dentro da outra. Desta forma as bobinas podem ficar uma ao lado da outra. A bobina primária tem 250 espiras e ela é ligada diretamente na rede de 127 V. O circuito secundário é fechado através do prego que aparece na foto ardendo. Na mesa percebemos pedaços de um prego que se partiu numa experiência anterior.

Há um tipo de transformador muito interessante que pode ser chamado de *transformador econômico*. Ele possui apenas uma única bobina com um acesso intermediário às espiras como mostra a figura 9.5.9.



Nesta figura não coloquei resistores que representam as resistências do fio da bobina nos trechos OB e BA. Aqui tratarei somente o caso idealizado de bobina sem resistividade, e o caso mais realista é deixado como exercício.

Fig. 9.5.9 Circuito com transformador econômico.

Defini duas malhas A e B na figura com as correspondentes correntes de malha \mathcal{J}_A e \mathcal{J}_B . Seja N o número total de espiras da bobina e N_B o número das espiras entre os pontos O e B. Se a bobina estiver enrolada num núcleo de ferro vale para a matriz de indutâncias

$$\begin{aligned} L_{AA} &= K N^2 & L_{AB} &= -K N N_B \\ L_{BA} &= -K N N_B & L_{BB} &= K N_B^2 \end{aligned} \quad (9.5.29)$$

Nestas fórmulas, K é uma constante que depende do núcleo de ferro. No próximo capítulo aprenderemos como se calcula o valor desta constante. Repare que as indutâncias mútuas são negativas. Isto é causado pela escolha de orientação das correntes \mathcal{J}_A e \mathcal{J}_B . Uma corrente $\mathcal{J}_B > 0$ provoca na malha A um fluxo magnético negativo.

O leitor verifica facilmente que as equações de malha do circuito da figura 9.5.9 são idênticas às equações de malha do circuito da figura 9.5.6. A relação (9.5.8) vale também. Podemos copiar logo os resultados (9.5.16) e (9.5.17). Então se consegue a mesma transformação do formato de potência <alta tensão \times baixa corrente> para o formato <baixa tensão \times alta corrente> com apenas uma bobina. Mas a economia não se limita à eliminação de uma bobina. Vamos dar uma olhada na corrente I que flui no trecho OB. A amplitude complexa desta corrente vale

$$\begin{aligned} I_0 &= I_{A0} - I_{B0} = \frac{\mathcal{E}_0 (R_2 + i\omega_F L_{BB}) + \mathcal{E}_0 i\omega_F L_{BA}}{R_1 R_2 + i\omega_F (R_1 L_{BB} + R_2 L_{AA})} = \\ &= \mathcal{E}_0 \frac{R_2 + i\omega_F (L_{BB} + L_{BA})}{R_1 R_2 + i\omega_F (R_1 L_{BB} + R_2 L_{AA})} \end{aligned} \quad (9.5.30).$$

R_1 representa a resistência interna da fonte primária. Esta é geralmente pequena, ou podemos logo supor uma fonte de voltagem ideal com $R_1 = 0$. Com isto obtemos uma expressão mais simples para a amplitude complexa da corrente no trecho OB:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \mathcal{E}_0 \left\{ \frac{1}{i\omega_F L_{AA}} + \frac{L_{BB} + L_{BA}}{R_2 L_{AA}} \right\} = \\
 &= \frac{\mathcal{E}_0}{i\omega_F L_{AA}} + \frac{\mathcal{E}_0 \frac{N_B}{N_A}}{R_2} \left(\frac{(N_B - N_A)}{N_A} \right)
 \end{aligned}
 \tag{9.5.31}$$

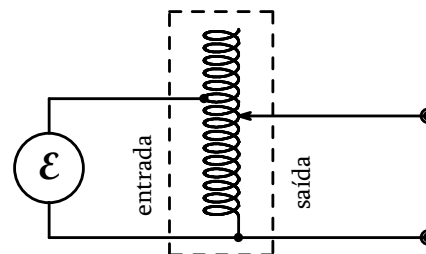
Como veremos no próximo capítulo, a primeira parcela $\mathcal{E}_0 / i\omega_F L_{AA}$ deve ser muito pequena para um bom transformador. A segunda parcela tem uma amplitude da corrente que flui ligando o resistor R_2 na eletromotância secundária, e este valor é reduzido pelo fator $(N_A - N_B) / N_A$. Então, especialmente se N_B não for muito menor do que N_A , a corrente que flui no trecho OB é bem menor que a corrente que passa no resistor R_2 . Conseqüentemente pode-se usar um fio mais fino no trecho OB. Isto é uma valiosa economia de espaço, pois espaço é geralmente muito escasso num transformador.



Apesar destas vantagens, transformadores econômicos nem sempre são usados. Há uma desvantagem no uso deste tipo de transformador: o circuito secundário não é eletricamente isolado do circuito primário. Se, por exemplo, caísse um raio no circuito primário, a alta tensão estaria também presente no circuito secundário.

9.5.10 Variac. O botão preto no topo do equipamento permite a escolha do ponto de acesso variável no solenoide toroidal.

Há uma variante do transformador econômico muito útil². De forma parecida com o uso de um contato móvel num potenciômetro, podem-se acessar as espiras da bobina com um contato móvel para obter uma eletromotância secundária variável. Este tipo de transformador é chamado de *variac*. A figura 9.5.10 mostra um variac com bobina enrolada num núcleo toroidal. A figura 9.5.11 mostra o esquema elétrico. Nesta última figura mostro a configuração mais frequentemente usada, na qual o circuito primário não é ligado nos dois extremos da bobina. Desta forma, a voltagem secundária pode ser tanto maior ou menor que a primária.



9.5.11 Esquema de uso de um variac.

² Equipamentos com peças mecânicas móveis estão saindo de moda. Se você, jovem pesquisador, encontrar um variac na sucata ou no laboratório que você herdou, não seja bobó de jogar este “trambolho” no lixo. Variacs são extremamente úteis e, além disso, eles são muito caros!

Exercícios

E 9.5.1: Duas bobinas com N_1 e N_2 espiras estão enroladas densa e uniformemente num toroide de altura h , raio interno a e raio externo b como mostra a figura 9.5.12 (embora na figura as espiras desenhadas não estejam muito densas). Supondo que as espiras estão tão densas que se pode usar simetria especular, calcule as autoindutâncias L_{11} , L_{22} e as indutâncias mútuas L_{12} e L_{21} .

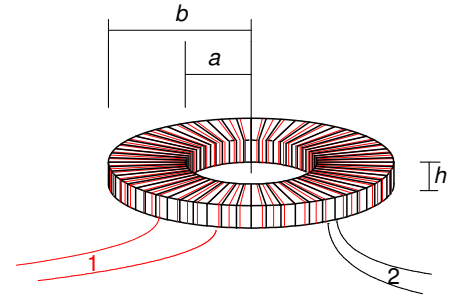


Fig. 9.5.12 Toroide com duas bobinas enroladas.

E 9.5.2: No circuito da figura 9.5.9 não foram previstas as resistências dos fios enrolados. Desenhe um esquema de circuito com transformador econômico mostrando as resistências dos trechos OB e OA como resistores e escreva as leis de malha para este circuito.

E 9.5.3: Escreva os pontos essenciais desta seção.

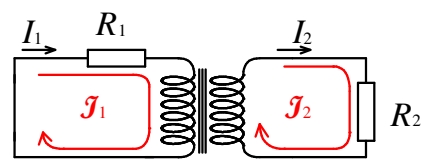
9.5 Apêndice

A solução geral do sistema homogêneo associado ao sistema de equações (9.5.10) é a solução geral para as correntes de malha do circuito da figura 9.5.6 sem a fonte. A figura 9.5.13 mostra o circuito correspondente.

As equações de malha deste circuito são

$$R_m \mathcal{J}_m = - \sum_{n=1}^2 L_{mn} \frac{d\mathcal{J}_n}{dt} \quad (9.5.32).$$

Fig. 9.5.13 Circuito descrito pelas leis de malha da fórmula (9.5.32).



Podemos encontrar a solução deste sistema de equações com uma técnica que se emprega também no cálculo dos modos normais de oscilação de sistemas mecânicos. O primeiro passo remove os fatores R_m do lado esquerdo das equações sem destruição da simetria da matriz do lado direito. Isto se consegue com a introdução de novas incógnitas

$$X_m \stackrel{def.}{=} \mathcal{J}_m \sqrt{R_m} \quad (9.5.33).$$

Com estas variáveis a (9.5.32) fica na seguinte forma:

$$X_m = - \sum_{n=1}^2 \frac{L_{mn}}{\sqrt{R_m R_n}} \frac{dX_n}{dt} \quad (9.5.34).$$

Somente para tornar as fórmulas mais compactas, vamos abreviar o quociente das indutâncias e da raiz quadrada:

$$T_{mn} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{L_{mn}}{\sqrt{R_m R_n}} \quad (9.5.35)$$

Não é por acaso que escolhi a letra T para esta nova matriz. Dimensionalmente os elementos desta matriz são tempos e podemos chamar esta matriz de *matriz de constantes de tempo*. Com esta matriz, o sistema de equações fica com o seguinte aspecto:

$$X_m = -\sum_{n=1}^2 T_{mn} \frac{dX_n}{dt} \quad (9.5.36).$$

O segundo passo para a obtenção da solução é a solução do problema de autovalor da matriz (T_{mn}) . Procuramos uma matriz coluna (C_n) tal que a multiplicação desta coluna pela matriz (T_{mn}) tenha o mesmo efeito da multiplicação por um único valor. Ou seja, procuramos (C_n) tal que se tenha

$$\sum_{n=1}^2 T_{mn} C_n = \tau C_n \quad (9.5.37),$$

com algum valor apropriado τ . Este valor especial τ é chamado de *autovalor da matriz*, e a correspondente matriz coluna (C_n) é chamada de *autovetor da matriz*. A condição para poder encontrar soluções não triviais da equação (9.5.37) é a singularidade da matriz $(T_{mn} - \tau \delta_{mn})$, ou seja, a determinante desta matriz tem que ser nula:

$$(T_{11} - \tau)(T_{22} - \tau) - T_{12}T_{21} = 0 \quad (9.5.38)$$

As soluções desta equação quadrática são

$$\tau_a = \frac{T_{11} + T_{22}}{2} + \sqrt{T_{12}^2 - T_{11}T_{22} + (T_{11} + T_{22})^2 / 4} \quad (9.5.39),$$

$$\tau_b = \frac{T_{11} + T_{22}}{2} - \sqrt{T_{12}^2 - T_{11}T_{22} + (T_{11} + T_{22})^2 / 4} \quad (9.5.40).$$

Para cada um destes autovalores temos um autovetor correspondente:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\tau_a - T_{11}}{T_{12}} \end{pmatrix} \quad (9.5.41),$$

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\tau_b - T_{11}}{T_{12}} \end{pmatrix} \quad (9.5.42).$$

Com estas matrizes coluna obtemos a solução geral da (9.5.36):

$$\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \alpha \exp\left\{-\frac{t}{\tau_a}\right\} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\tau_a - T_{11}}{T_{12}} \end{pmatrix} + \beta \exp\left\{-\frac{t}{\tau_b}\right\} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\tau_b - T_{11}}{T_{12}} \end{pmatrix} \quad (9.5.43)$$

Nesta fórmula, α e β são os parâmetros ajustáveis que deve haver na solução geral. Tendo esta solução, podemos voltar para as antigas incógnitas \mathcal{J}_1 e \mathcal{J}_2 :

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1(t) &= \frac{\alpha}{\sqrt{R_1}} \exp\left\{-\frac{t}{\tau_a}\right\} + \frac{\beta}{\sqrt{R_1}} \exp\left\{-\frac{t}{\tau_b}\right\} \\ \mathcal{J}_2(t) &= \frac{\alpha}{\sqrt{R_2}} \frac{\tau_a - T_{11}}{T_{12}} \exp\left\{-\frac{t}{\tau_a}\right\} + \frac{\beta}{\sqrt{R_2}} \frac{\tau_b - T_{11}}{T_{12}} \exp\left\{-\frac{t}{\tau_b}\right\}\end{aligned}\quad (9.5.44).$$

É interessante investigar o caso de um transformador para o qual vale a condição (9.5.8) aproximadamente. Se $L_{11}L_{22} \approx L_{12}L_{21}$, então o número

$$\varepsilon \stackrel{def.}{=} \frac{T_{11}T_{22} - T_{12}^2}{(T_{11} + T_{22})^2 / 4} \quad (9.5.45)$$

é muito menor que 1. Podemos usar nossa famosa aproximação $(1+\varepsilon)^n \approx 1+n\varepsilon$ e podemos calcular os autovalores de forma aproximada:

$$\begin{aligned}\tau_a &= \frac{T_{11} + T_{22}}{2} (1 + \sqrt{1-\varepsilon}) \approx \\ &\approx \frac{T_{11} + T_{22}}{2} \left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = (T_{11} + T_{22}) \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)\end{aligned}\quad (9.5.46)$$

$$\tau_b = \frac{T_{11} + T_{22}}{2} (1 - \sqrt{1-\varepsilon}) \approx (T_{11} + T_{22}) \frac{\varepsilon}{4} \quad (9.5.47)$$

Na expressão para τ_a aparece ε junto com o número 1 e, neste caso, vamos desprezar ε completamente. Faremos o mesmo na fórmula (9.5.44) com os fatores $\tau_a - T_{11}$ e $\tau_b - T_{11}$, nos quais aparece o ε junto com termos da ordem ε^0 . Vamos manter o ε somente na fórmula para τ_b , já que não há um termo de ordem ε^0 . Com esta aproximação obtemos para as correntes o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1(t) &\approx \frac{\alpha}{\sqrt{R_1}} \exp\left\{-\frac{t}{T_{11} + T_{22}}\right\} + \frac{\beta}{\sqrt{R_1}} \exp\left\{-\frac{4t}{(T_{11} + T_{22})\varepsilon}\right\} \\ \mathcal{J}_2(t) &\approx \frac{\alpha}{\sqrt{R_2}} \frac{T_{22}}{T_{12}} \exp\left\{-\frac{t}{T_{11} + T_{22}}\right\} - \frac{\beta}{\sqrt{R_2}} \frac{T_{11}}{T_{12}} \exp\left\{-\frac{4t}{(T_{11} + T_{22})\varepsilon}\right\}\end{aligned}\quad (9.5.48)$$

Percebemos que há duas parcelas. A primeira decai exponencialmente com uma constante de tempo $T_{11} + T_{22} = L_{11}/R_1 + L_{22}/R_2$ enquanto a segunda parcela decai muito mais rapidamente com uma constante de tempo $(T_{11} + T_{22})\varepsilon/4$. No caso idealizado com $L_{11}L_{22} = L_{12}L_{21}$, a segunda parcela desapareceria imediatamente.

Em termos das indutâncias e resistências, o resultado (9.5.48) toma a seguinte forma:

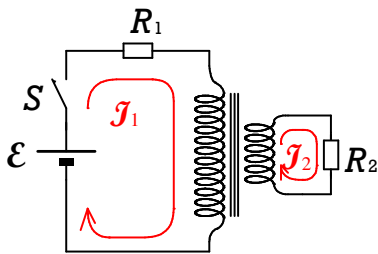
$$\mathcal{J}_1(t) \approx \frac{\alpha}{\sqrt{R_1}} \exp\left\{-\frac{t}{T_{11}+T_{22}}\right\} + \frac{\beta}{\sqrt{R_1}} \exp\left\{-\frac{4t}{(T_{11}+T_{22})\epsilon}\right\}$$

$$\mathcal{J}_2(t) \approx \alpha \frac{\sqrt{R_2} L_{22}}{\sqrt{R_1} L_{12}} \exp\left\{-\frac{t}{T_{11}+T_{22}}\right\} - \frac{\beta \sqrt{R_1} T_{11}}{R_2 T_{12}} \exp\left\{-\frac{4t}{(T_{11}+T_{22})\epsilon}\right\}$$

(9.5.49)

Exercício adicional:

E 9.5.4: Considere o circuito da figura 9.5.14. No lugar de uma fonte alternada, temos uma fonte de voltagem constante. Mas esta fonte não está sempre conectada ao circuito.



fonte de voltagem constante.

Para \$t < 0\$, a chave \$S\$ estava aberta e as duas correntes \$\mathcal{J}_A\$ e \$\mathcal{J}_B\$ tinham o valor zero.

Em \$t = 0\$ a chave é fechada. Calcule as correntes \$\mathcal{J}_1\$ e \$\mathcal{J}_2\$ para \$t \ge 0\$. Calcule também a voltagem indicada por um voltímetro ideal no lugar da resistência \$R_2\$, ou seja, calcule \$\lim_{R_2 \rightarrow \infty} R_2 \mathcal{J}_2\$.

Você pode supor o caso \$L_{11}L_{22} \approx L_{12}L_{21}\$.

Fig. 9.5.14 Transformador que pode ser ligado numa