1 Cinemática

1.1 Grandezas Físicas

As *Ciências Quantitativas* contribuíram significativamente para o entender da nossa existência e eles são a base do desenvolvimento técnico. O espetacular desenvolvimento da engenharia é devido à capacidade de fazer *previsões* e *planejamentos quantitativos*. Quando se constrói um artefato complicado não se fazem dezenas de tentativas aleatórias até obter um exemplar que funciona, mas se calculam os valores adequados de certos parâmetros e se constrói diretamente um objeto funcional. Imaginem somente o gasto de tempo, material e vidas humanas se quiséssemos construir um prédio de 20 andares com o método de tentativa e erro! O que permite fazer estas valiosas previsões e planejamentos é experiência acumulada de forma sistemática. As Ciências Quantitativas se ocupam com esta acumulação sistemática de experiência e com formulações matemáticas das regularidades encontradas. A Física é a mais fundamental das Ciências Quantitativas e dentro dela a *Mecânica Clássica* é um ponto de partida importante que fornece a base de muitas outras áreas. A Mecânica Clássica trata de movimentos de corpos no espaço. Ela começa com a cinemática que se dedica a descrição dos movimentos e culmina com a dinâmica cujo objetivo é prever movimentos. Essencialmente, a cinemática fornece as ferramentas da linguagem formal para o estudo dos movimento.

Planejamentos quantitativos dizem respeito a *valores de grandezas física*. Temos que explicar o que é uma grandeza física e o que são valores de uma grandeza. O valor de uma grandeza envolve um processo de *abstração* e esta abstração é associada a uma *relação de equivalência*. Quando falamos de uma massa de 2 kg abstraímos que este valor de massa pertence a um determinado corpo com suas características específicas de dureza, cor, cheiro tamanho etc. . Pode-se tratar de um corpo metálico ou um saco de farinha ou um pequeno animal. Todos estes atributos abstraímos, ou seja, desconsideramos. Do ponto de vista de massa todos estes corpos podem ser equivalentes desde que, postos em pares nos pratos de uma balança simétrica, deixam a balança num equilíbrio horizontal.

Relações de equivalência são *relações binárias*. Uma relação binária R num conjunto C é uma regra que seleciona certos pares de elementos de C . Se um para de elementos $\langle a,b \rangle$ for um dos pares selecionados, diz-se que a e b cumprem a relação R e isto é escrito com a fórmula $a \,\mathrm{R}\, b$. O símbolo R é genérico e pode adquirir as mais diversas formas. Por exemplo, todos conhecemos a relação definida nos números que tem o nome “ser maior que”. Para esta relação o símbolo R teria a foram $>$. Para esta relação o par de números $\langle 5,3 \rangle$ seria um dos selecionados e o par $\langle 3,5 \rangle$ não seria um dos selecionados. Existem certos tipos de relações binárias que aparecem com maior freqüência. Um tipo de fundamental importância corresponde às relações de equivalência.

Uma relação de equivalência “ $\sim$ ” num conjunto C é uma relação binária que satisfaz as seguintes condições:

$$\forall (x \in C): \quad x \sim x \tag{1.1.1}$$

$$\forall(x, y \in C): \quad x \sim y \Rightarrow y \sim x \tag{1.1.2}$$

$$\forall(x, y, z \in C): \quad \left[(x \sim y \wedge y \sim z) \Rightarrow x \sim z\right] \tag{1.1.3}$$

Em palavras: todo objeto é equivalente a si mesmo, a relação é simétrica e transitiva. Podemos definir muitas relações de equivalência diferentes num dado conjunto. Por exemplo no conjunto de números naturais podemos definir a seguinte relação

$$n \,\mathrm{P}\, m \quad \underset{def.}{\Leftrightarrow} \quad |n-m| \text{ é um número par.} \tag{1.1.4}$$

Você pode verificar facilmente que esta relação obedece as condições (1.1.1), (1.1.2) e (1.1.3). Vejamos outro exemplo. Vamos escrever a parte inteira de uma divisão n/m como $n \underset{\text{int}}{/} m$. Por exemplo $9 \underset{\text{int}}{/} 2 = 4$. Então podemos definir a seguinte relação de equivalência

$$n \,\mathrm{D}\, \mathrm{m} \quad \underset{def.}{\Leftrightarrow} \quad n \underset{\text{int}}{/} 10 = m \underset{\text{int}}{/} 10 \tag{1.1.5}$$

De novo, você pode comprovar que esta relação é de fato uma relação de equivalência.

Então o que significa ser equivalente? - Isto depende do critério. O critério P considera os numero 5 e 31 equivalentes, mas o critério D não considera estes números equivalentes. Por outro lado 31 e 32 são equivalentes pelo critério D, mas não são equivalentes pelo critério P.

O mesmo acontece com os valores de grandezas físicas. 1kg de algodão é considerado equivalente a 1 kg de chumbo do ponto de vista da grandeza massa, mas eles não são considerados equivalentes do ponto de vista da grandeza volume. Cada grandeza tem a sua relação de equivalência. No caso de grandezas físicas esta relação é definida por algum procedimento experimental que testa se os objetos são ou não equivalentes. Por exemplo, no caso da massa podemos testar se dois objetos são equivalentes colocando-as nos pratos de uma balança simétrica e ver se a balança permanece em equilíbrio horizontal. Caso ela permaneça em equilíbrio vamos dizer que os dois objetos são equivalentes do ponto de vista massa ou que eles tem o *mesmo valor de massa*[1].

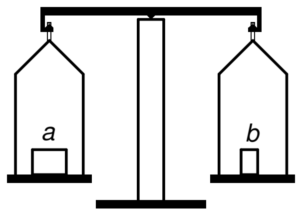


Fig. 1.1 Balança simétrica com corpos de massas iguais.

Uma relação de equivalência é definida num determinado conjunto. Correspondentemente a definição de uma grandeza física precisa ter uma definição do conjunto de objetos para os quais a grandeza faz sentido. Vamos chamar este conjunto o *domínio* da grandeza G e escreve-lo como D_G. As grandezas físicas servem para descrever o mundo real, e como este é complexo, em geral é difícil de fornecer uma definição completa do domínio de uma grandeza física. Mas, pode-se começar com um conjunto bem restrito que pode ser aumentado posteriormente se for conveniente. No exemplo da grandeza massa, podemos começar com pequenos objetos materiais no

[1] No caso da massa a condição (1.1.1) é imposta sem procedimento experimental. Não podemos colocar o mesmo objeto simultaneamente nos dois pratos de uma balança;

nosso ao redor e posteriormente podemos incluir objetos como a Terra o Sol, átomos elétrons etc. .

Uma outra grandeza que será de muita importância na mecânica é a *distância* ou mais precisamente a *distância espacial*. O domínio inicial da grandeza distância seriam pares de pontos marcados num corpo. Podemos definir a equivalência, que define igualdade de distância, da seguinte maneira: Um par de pontos $\langle \mathrm{A,B} \rangle$ é equivalente a um par $\langle \mathrm{A',B'} \rangle$ se e somente se conseguirmos encaixar as pontas das pernas de um compasso tanto no par $\langle \mathrm{A,B} \rangle$ como no par $\langle \mathrm{A',B'} \rangle$ sem alterar a forma do compasso entre os atos de encaixar. Neste caso vamos dizer que os pontos A e B têm a mesma distância que os pontos A′ e B′ e vamos escrever isto na forma $d_{\langle \mathrm{A,B} \rangle} = d_{\langle \mathrm{A',B'} \rangle}$.

Uma relação de equivalência decompõe o conjunto C no qual ela é definida naturalmente em subconjuntos de elementos equivalentes. Estes subconjuntos são chamados de *classes de equivalência*. A transitividade, isto é, a exigência (1.1.3), implica que estas classes são mutuamente disjuntas. Se duas classes $A \subset C$ e $B \subset C$ tivessem um elemento em comum $x \in A$ e $x \in B$ então A e B seriam automaticamente a mesma classe. Pois para cada elemento a de A teríamos $a \sim x$, porque a e x são da mesma classe e para cada elemento b de B teríamos $x \sim b$ porque x e b são da mesma classe. Mas com a transitividade segue que $a \sim b$. Então todos os elementos de A seriam equivalentes a todos os elementos de B e estas classes seriam na verdade uma só. No caso de grandezas físicas os valores correspondem às classes. Podemos procurar alguma característica de classe e definir os valores como estas características. Para as grandezas mais fundamentais vamos usar as próprias classes como valores da grandeza. Por exemplo, no caso da distância espacial vamos definir os valores desta grandeza como classes de pares de pontos equivalentes no sentido do critério de encaixe de compassos.

Uma grandeza física G tem então um conjunto D_G de objetos associados que consiste dos objetos para os quais a grandeza faz sentido e este conjunto é chamados de domínio de G. E temos um segundo conjunto V_G associado que consiste dos valores da grandeza. A definição dos valores requer alguma relação de equivalência no domínio.

A noção de grandeza envolve mais um elemento estrutural importante: uma operação binária simétrica e associativa deve ser definida no conjunto de valores V_G. Na física chamamos esta operação de soma. Então para cada dois valores $v \in V_G$ e $w \in V_G$ deve ser definido um valor bem determinado $v + w$ e esta associação de pares de valores e valores deve cumprir as seguintes condições:

$$\forall \left(v, w \in V_G \right): \quad v + w = w + v \tag{1.1.6}$$

$$\forall \left(v, w, x \in V_G \right): \quad \left(v + w \right) + x = v + \left(w + x \right) \tag{1.1.7}$$

No caso das grandezas físicas básicas esta operação é definida por algum procedimento experimental. Para grandezas secundárias a soma pode ser definida matematicamente baseando-se nas somas de outras grandezas previamente definidas.

Por exemplo no caso da massa podemos definir: um corpo c tem a massa igual à soma das massas de dois corpos a e b se uma balança simétrica com o corpo c num dos pratos fica em equilíbrio horizontal se os corpos a e b estiverem juntos no outro prato sem nenhum outro corpo junto. O caso da soma de distâncias é mais complicado e trataremos da definição da soma de distâncias mais tarde.

Quando se formula uma definição envolvendo um procedimento experimental temos que verificar experimentalmente se esta definição cumpre as exigências gerais do conceito de grandeza física. Primeiramente teria que verificar que o teste experimental da equivalência cumpre as condições (1.1.1), (1.1.2) e (1.1.3). Depois é preciso verificar se a prescrição da formação de soma define realmente uma operação no conjunto de valores. Por exemplo, no caso da massa poder-se-ia imaginar que dois corpos a e a' que têm a mesma massa resultam em massas diferentes quando somamos outro valor de massa (compare a figura 1.2).

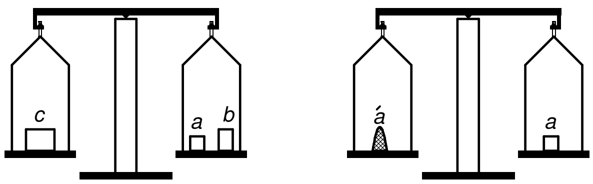
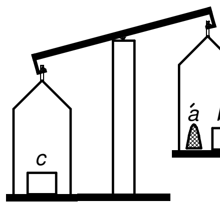


Fig. 1.2 Possível inconsistência na definição de soma de massas.



Neste caso a definição dada não resultaria numa operação no conjunto de valores, mas numa operação no domínio. Também as condições (1.1.6) e (1.1.7) precisam ser verificadas experimentalmente. Vamos chamar as condições (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3), a exigência que a soma é definida no conjunto de valores e não no domínio e as condições (1.1.6) e (1.1.7) de *condições de auto-consistência* da grandeza. Em geral, na verificação de condições de auto-consistência aparecem inconsistências (não tão grandes como na figura 1.2) e estas inconsistências atribuímos a erros experimentais. A estimativa de incertezas experimentais é, em última instância, determinada por testes experimentais de auto-consistência de uma grandeza com dados instrumentos de medida. As condições de auto-consistência são uma idealização.

É prático definir uma multiplicação de valores de uma grandeza com números. Primeiramente vamos considerar números inteiros positivos. Neste caso podemos definir o produto de um valor v com um número n como soma repetida do valor.

$$n\,v \underset{def.}{=} \underbrace{v+v+v+.....+v}_{n \text{ vezes}} \tag{1.1.8}$$

Nesta equação escrevemos as somas sem parêntesis, já que a lei associativa (1.1.7) torna-as desnecessárias. Pode-se definir o múltiplo de um valor também de forma mais elegante por uma prescrição recursiva. É conveniente de incluir também o número zero e de começar a recursão no valor zero. Muitas grandezas possuem um valor *zero*, que escreveremos como 0, e que não altera valores na hora de somar:

$$\forall\left(v\in V_G\right):\quad v+0=v \tag{1.1.9}$$

Caso que este valor não exista, pode-se inventar um valor zero e acrescenta-lo no conjunto V_G. Com este valor zero podemos formular a recursão que define múltiplos de valores:

$$\forall\left(v\in V_G\right):\quad 0v \underset{def.}{=} 0 \tag{1.1.10}$$

$$\forall(v\in V_G)\forall(n\in\mathbb{N}):\ (n+1)v \underset{def.}{=} nv+v \tag{1.1.11}$$

Com demonstrações (três indutivas e uma direta) pode-se mostrar que esta multiplicação de valores e números satisfaz as seguintes leis:

$$\forall(n\in\mathbb{N})\forall(m\in\mathbb{N})\forall(v\in V_G):\ nv+mv=(n+m)v \tag{1.1.12}$$

$$\forall(n\in\mathbb{N})\forall(v\in V_G)\forall(w\in V_G):\ nv+nw=n(v+w) \tag{1.1.13}$$

$$\forall(v\in V_G):\ 1v = v \tag{1.1.14}$$

$$\forall(n\in\mathbb{N})\forall(m\in\mathbb{N})\forall(v\in V_G):\ n\times mv=n(mv) \tag{1.1.15}$$

Usamos apenas um tipo de símbolo "+". Note no entanto, que as fórmulas (1.1.11) e (1.1.12) contêm dois tipos de soma diferentes! Por exemplo na (1.1.12) o "+" do lado esquerdo da igualdade significa uma soma de valores da grandeza G (definida por um procedimento experimental), enquanto o "+" do lado direito significa uma soma de números. A pesar disso a fórmula (1.1.12) não define a soma de valores da grandeza G em termos de somas de números. Note que o lado direito também contém somas de valores porque a multiplicação de um valor com um número era definida através da soma de valores. Note também que escrevemos a multiplicação de números na fórmula (1.1.15) com o símbolo "$\times$" enquanto a multiplicação de um valor da grandeza G com um número é escrita sem símbolo de multiplicação.

A maioria[2] das grandezas satisfaz as seguintes condições: (a) Para $n\neq 0$ pode-se concluir de uma igualdade $nv=nw$ que vale também $v=w$. (b) A soma de valores define uma função injectiva $f_w:V_G\to V_G$, $f_w(v)=w+v$ para todo valor w. Grandezas que cumprem estas condições chamaremos de *grandezas lineares*.

$$\begin{aligned}
&G \text{ é linear } \underset{def.}{\Leftrightarrow}\\
&(a)\quad \forall(v\in V_G)\forall(w\in V_G)\forall(n\in\mathbb{N}):\big((n\neq 0\wedge nv=nw)\Rightarrow v=w\big)\\
&\wedge\\
&(b)\quad \forall(w\in V_G): f_w:V_G\to V_G \text{ com } f_w(v)=w+v \text{ é injectiva.}
\end{aligned} \tag{1.1.16}$$

Para qualquer valor v de uma grandeza linear G e para qualquer número inteiro não negativo n e qualquer número inteiro positivo k existe no máximo um valor w tal que $nv=kw$. Se este valor existir vamos chama-lo de $\frac{n}{k}v$. Se estes valores sempre existirem chamaremos a grandeza de grandeza *linear e contínua*. Com

$$nv=kw \quad\Rightarrow\quad \frac{n}{k}v \underset{def.}{=} w \tag{1.1.17}$$

estendemos a multiplicação de valores e números para números racionais não negativos. Esta multiplicação satisfaz regras análogas às regras (1.1.12) - (1.1.15):

$$\forall(r\in\mathbb{Q}_{\geq 0})\forall(s\in\mathbb{Q}_{\geq 0})\forall(v\in V_G):\ rv+sv=(r+s)v \tag{1.1.18}$$

[2] Existem exceções. A grandeza ângulo pode ser definida de várias formas diferentes. Uma forma leva a um conceito de ângulo com valores cíclicos e neste caso as condições não são satisfeitas. O pseudo-momento de elétrons numa rede cristalina são outro exemplo de exceção.

$$\forall(r\in\mathbb{Q}_{\geq 0})\forall(v\in V_G)\forall(w\in V_G):\quad rv+rw=r(v+w) \tag{1.1.19}$$

$$\forall(v\in V_G):\quad 1v \;=\; v \tag{1.1.20}$$

$$\forall(r\in\mathbb{Q}_{\geq 0})\forall(s\in\mathbb{Q}_{\geq 0})\forall(v\in V_G):\quad r\times s\,v=r(s\,v) \tag{1.1.21}$$

onde o símbolo $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ representa o conjunto de números racionais não-negativos. Vamos demonstrar somente a primeira regra e as outras deixamos como exercício:

Demonstração de (1.1.18): Sejam $r=n/m$ e $s=k/l$ com n, k, em $\mathbb{N}$ e com m, l em $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ dados arbitrariamente. A definição de multiplicação de valores com números racionais não-negativos (1.1.17) implica

$$n\,v \;=\; m(r\,v) \qquad \text{e} \qquad k\,v \;=\; l(s\,v) \tag{1.1.22}$$

Com a regra (1.1.15) concluímos

$$l\times n\,v \;=\; l\times m(r\,v) \qquad \text{e} \qquad m\times k\,v \;=\; m\times l(s\,v) \tag{1.1.23}$$

Somando estas equações e usando as duas leis distributivas (1.1.12) e (1.1.13) obtemos

$$(l\times n+m\times k)v \;=\; l\times m\big((r\,v)+(s\,v)\big) \tag{1.1.24}$$

Com a definição de multiplicação (1.1.17) segue finalmente o resultado desejado:

$$(r\,v)+(s\,v) \;=\; \left(\frac{l\times n+m\times k}{l\times m}\right)v \;=\; (r+s)v \tag{1.1.25}$$

e isto completa a demonstração. •

Agora podemos perguntar se não seria possível definir também a multiplicação de valores com números racionais negativos. Seja v um valor de uma grandeza linear e $q>0$ algum numero racional positivo. Se a equação

$$qv+x \;=\; 0 \tag{1.1.26}$$

tiver uma solução esta seria única por causa da exigência (b) da definição de grandeza linear (1.1.16). Neste caso podemos definir o produto $(-q)v$ como esta solução:

$$\big(\exists(x\in V_G):qv+x \;=\; 0\big) \quad\Rightarrow\quad (-q)v \underset{def.}{=} x \tag{1.1.27}$$

Se a equação (1.1.26) não tiver solução podemos inventar uma acrescentando os símbolos $(-1)v$ como novos elementos ao conjunto de valores V_G.

A primeira vista, tal aumento do conjunto de valores parece ser uma mera questão de beleza matemática. Mas, isto não é assim. Geralmente os valores artificialmente inventados para obter uma estrutura matemática simples acabam tendo também um significado físico. Podemos ver isto com a grandeza massa. No domínio desta grandeza, formado por pequenos objetos materiais do nosso ao redor, não encontramos corpos cuja massa fornecem uma solução de equações do tipo (1.1.26). Não existem corpos com valores negativos de massa. Mas os valores negativos de massa que inventamos podem ter uma interpretação concreta: Sejam A e B duas regiões espacialmente separadas que contêm alguns objetos materiais. Durante um dado intervalo de tempo pode ocorrer um transporte de objetos entre estas regiões. Neste caso podemos definir a grandeza $M_{A\to B}$ = "massa líquida transportada de A até B". O valor de massa de um objeto que foi transportado de B para A seria contado como um valor negativo da grandeza $M_{A\to B}$. Com este uso secundário da grandeza massa os valores negativos tem um significado concreto. Futuramente veremos exemplos extremamente importantes onde os valores negativos inventados de grandezas ganham significados reais.

Mais tarde, quando trataremos da geometria, veremos motivos de estender a multiplicação de valores com números ainda mais, incluindo números irracionais. Esta extensão requer também a invenção de novos valores hipotéticos. Esta extensão pode ser feita com limites.

A soma de valores e a multiplicação de valores com números formam os elementos estruturais básicos de espaços lineares. Com a multiplicação de valores com números e com as extensões associadas do conjunto de valores podemos afirmar que:

O conjunto de valores V_G de uma grandeza linear forma um espaço linear sobre o corpo de números reais $\mathbb{R}$ ou pode ser estendido a um espaço linear sobre o corpo de números reais. Vamos chamar V_G com sua estrutura linear de *espaço de valores da grandeza,* ou de forma sucinta, de *espaço-valor* da grandeza. A grandeza G é um mapeamento que mapeia o domínio da grandeza no seu espaço de valores; $G: D_G \to V_G$.

No caso de uma grandeza linear que não é contínua a extensão necessária para formar um espaço linear acrescenta não apenas valores com sinal trocado mas preenche também lacunas entre valores.

A combinação de somas e multiplicações com números leva a expressões da forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ onde $v_1,\ v_2, ...v_n$ são valores da grandeza e $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ são números. Tais expressões chamamos de *combinações lineares*.

Podemos buscar um conjunto $\{b_1,.....,b_n\}$ de elementos básicos no espaço de valores V_G de tal forma que qualquer valor $v \in V_G$ possa ser escrito como combinação linear dos valores básicos:

$$v \;=\; \alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} \alpha_k b_k \qquad (1.1.28)$$

Se os valores básicos foram escolhidos de forma linearmente independentes os números $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ são determinados de forma única pelo valor v e pelos valores da base. Se v for um valor da grandeza de algum objeto concreto do domínio pode-se aplicar os procedimentos experimentais que definem a grandeza para determinar os números $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$. Tal determinação experimental destes números é chamada de uma **medição do valor** v. Em geral vamos chamar uma **medição da grandeza** G qualquer procedimento experimental que resulta em afirmações envolvendo valores da grandeza[3]. No caso da medição do valor v as afirmações envolveriam n+1 valores.

[3] Uma primeira tentativa de uma teoria da medição é devido a Helmholtz (Helmholtz, H.v.,. "Zählen und Messen erkenntnis-theoretisch betrachtet". *Philosophische Aufsätze Eduard Zeller gewidmet.* Leipzig, 1887.). Hölder elaborou uma teoria axiomática das medições: (Hölder, O. "Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass". *Ver. Verh. Kgl. Sachisis. Ges. Wiss. Leipzig. Math-Phys. Classe* 53, 1-64 (1901. Compare também: Krantz, D.H., Duncan, R., Suppes, L.P., and Tversky, A.: Foundations of Measurement. Vol. 1-3. San Diego: Academic Press 1971. Narens, L., and Luce, R.D., "The algebra of

O número máximo de valores linearmente independentes no espaço V_G é a dimensão deste espaço e vamos chamar este número de dimensão da grandeza G. Muitas grandezas são unidimensionais, como por exemplo a massa e a distância espacial. Mas existem grandezas de mais alta dimensão. Velocidade, aceleração e força são tridimensionais. Na Teoria da Relatividade se usam muitas grandezas 4- dimensionais. Grandezas de dimensionalidade 6 são também muito freqüentes na Física.

No caso de grandezas unidimensionais o valor básico escolhido é chamado de ***unidade***. É importante notar que o valor da grandeza de um dado objeto do domínio não depende da unidade ou em geral da base. Isto é formulado dizendo que o valor é uma *invariante*. Quando mudamos a escolha da unidade o número que multiplica a unidade muda correspondentemente de tal forma que o produto αb fica invariante. A maneira com o número α tem que variar para manter o valor αb invariante é chamado de *contravariante*.

É um erro muito comum de pensar que a soma de valores de uma grandeza unidimensional pode ser definida expressando os valores da grandeza em termos de uma unidade. Se somarmos uma distância de $5\,\mathrm{m}$ e uma de $2\,\mathrm{m}$ obtemos uma de $7\,\mathrm{m}$. Mas isto não define a soma de valores porque esta operação algébrica não é capaz de informar quais são os pares de pontos no espaço que têm a distância de $7\,\mathrm{m}$. É preciso formular uma prescrição operacional experimental que define a soma de valores. Somente depois de termos a soma definida a noção de unidade tem sentido. Lembre-se que o símbolo "+" tem dois significados diferentes! Na operação 5+2=7 foi usado somente um dos significados e o outro não pode ser derivado deste, mas precisa de uma definição operacional.

Para as grandezas unidimensionais pode-se definir uma relação de ordem total no espaço de valores que é compatível com a estrutura algébrica do espaço de valores. Uma relação de ordem total num conjunto C é uma relação binária ">" que satisfaz as seguintes condições:

$$\forall\left(x, y \in C\right): \quad \text{vale exatamente uma das três relações: } x<y \text{ ou } y<x \text{ ou } x=y \tag{1.1.29}$$

$$\forall\left(x, y, z \in C\right): \quad \left(\left(x<y\right)\wedge\left(y<z\right)\Rightarrow x<z\right) \tag{1.1.30}$$

No caso dos valores de grandezas unidimensionais definem-se ordenamentos totais que são compatíveis com a estrutura algébrica do espaço de valores. Isto significa:

$$\forall\left(u, v, w \in V_G\right):\left(\ v<w \quad \Rightarrow \quad v+u<w+u\right) \tag{1.1.31}$$

$$\forall\left(\alpha \in \mathbb{R}\right)\forall\left(v, w \in V_G\right): \quad \left(\left(v<w \ \wedge \ \alpha<0\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha w<\alpha v\right) \tag{1.1.32}$$

Para as grandezas que precisam de uma extensão do conjunto V_G para poder acomodar os valores $(-1)v$ define-se o ordenamento tal que para os valores originais vale $0<v$ ou $0=v$. Então todas as distâncias entre pontos cumprem $0 \le d$ e todas as massas de objetos materiais cumprem $0 \le m$.

measurement" *J. Pure and Applied Algebra* 8, 197-233 (1976). Narens, L. *Abstract Measurement Theory* MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England ISBN-10: 0262140373. (1985)

Existe uma generalização da noção de ordem total que é chamada *ordem parcial*. Nesta podem existir pares de elementos não comparáveis. Na Teoria da Relatividade veremos que as grandezas 4-dimensionais usadas nesta teoria carregam uma estrutura de ordem parcial. Mas deixamos a discussão desta estrutura para um momento posterior quando apresentaremos a mecânica relativística.

Exercícios:

E01.01.1: Determine as classes de equivalência das relações P e D (fórmulas (1.1.4) e (1.1.5)).

E01.01.2 Demonstre as regras (1.1.12) - (1.1.15).

E01.01.3 Elabore uma definição de soma de distâncias espaciais. **3a)** Defina primeiramente a comparação de distâncias no sentido de maior e menor. **3b)** Defina a soma de distâncias. **3c)** Escreva por que a seguinte solução do item 3b) não é aceitável: para somar duas distâncias d_1 e d_2 meço estas distâncias com uma régua e somo os valores. Isto me dá a soma de d_1 e d_2.