1.2 Multiplicação e divisão de Grandezas

A formação de grandezas secundárias através da multiplicação e divisão é de fundamental importância para a formulação de leis da física. Uma multiplicação de números inteiros pode ser definida como uma soma repetida. Por exemplo, o significado de 3×5 é simplesmente 5+5+5. Mas, a multiplicação de um valor de massa com uma aceleração não tem o significado de uma soma repetida. Mesmo assim este produto está intimamente ligado à soma através de leis distributivas.

O que é então o produto de grandezas físicas e de seus valores? Os valores eram classes de equivalência ou características de classes. Como podemos multiplicar estes objetos?

Sejam G e H duas grandezas que têm domínios com intercessão não vazia, e não apenas não vazia mas com uma intercessão suficientemente ampla que justifique definir uma grandeza física na intercessão dos domínios. O produto $G \odot H$ é definido como qualquer grandeza; com uma relação de equivalência que define igualdade de valores e com uma soma no conjunto de valores. Na verdade podem-se definir vários tipos de produto. Por enquanto usaremos um símbolo genérico "$\odot$" para produto e mais tarde, quando especificamos o tipo de produto, usaremos os símbolos comumente empregados. Mas para todos os tipos de produto valem as seguintes duas regras de igualdade de valores:

(a) Sejam A e B objetos com os mesmos valores de G e H, isto é $G_A = G_B$ e $H_A = H_B$, então estes objetos tem o mesmo valor da grandeza $G \odot H$.

$$\forall (A, B \in D_G \cap D_H): \quad \left((G_A = G_B \wedge H_A = H_B) \Rightarrow (G \odot H)_A = (G \odot H)_B \right) \quad (1.2.1)$$

Então um par de valores $\langle g, h \rangle$ com $g \in V_G$ e $h \in V_H$ determina um valor do produto. Vamos escrever este valor como $g \odot h$.

(b) Quando multiplicamos um dos fatores de um produto com um número não importa qual fator é multiplicado:

$$\forall (g \in V_G) \forall (h \in V_H) \forall (\lambda \in \mathbb{R}): \quad (\lambda g) \odot h = g \odot (\lambda h) \quad (1.2.2)$$

Para poder chamar $G \odot H$ uma grandeza é preciso ter uma definição de soma de valores. Para todos os tipos de produto vamos exigir que valham duas leis distributivas:

$$\forall (g \in V_G) \forall (h, k \in V_H): \quad g \odot (h + k) = g \odot h + g \odot k \quad (1.2.3)$$

$$\forall (f, g \in V_G) \forall (h \in V_H): \quad (f + g) \odot h = f \odot h + g \odot h \quad (1.2.4)$$

No caso que uma das grandezas G ou H for unidimensional estas regras já determinam a soma completamente. Vamos supor que G seja unidimensional. A grandeza H pode ter mais de uma dimensão. Sejam f e g valores de G e h e k valores de H. Queremos saber o que significa $f \odot h + g \odot k$. Como G era supostamente unidimensional, podemos escrever f como múltiplo de g ou g como múltiplo de f. Se tanto f como g foram diferentes de zero ou ambos iguais a zero ambas as possibilidades existem. Se somente um dos valores for zero somente uma das possibilidades existe. Sem restrição da generalidade podemos supor que seja possível escrever f como múltiplo de g. Então $f = \varphi g$ com algum número φ adequado. Com as regras (1.2.2) e (1.2.3) podemos remeter a definição de soma do produto à soma definida no espaço de valores da grandeza H:

$$
\begin{aligned}
f\odot h + g\odot k &= (\varphi g)\odot h + g\odot k = \\
&= g\odot(\varphi h) + g\odot k = g\odot(\varphi h + k)
\end{aligned}
\tag{1.2.5}
$$

No caso de que H for a grandeza unidimensional este argumento usaria a lei distributiva (1.2.4) no lugar da (1.2.3). Percebemos que no caso de multiplicação com uma grandeza unidimensional todos os valores do produto podem ser escritos na forma $g\odot h$.

O raciocino exposto em (1.2.5) pode ser usado também para determinar o significado do produto $0\odot h$. Seja $g\odot k$ um valor arbitrário da grandeza $G\odot H$. O valor zero da grandeza G pode ser escrito como $0 = g + (-1)g$. Agora formamos a soma

$$
\begin{aligned}
0\odot h + g\odot k &= g\odot h + (-g)\odot h + g\odot k = \\
&= g\odot h + g\odot(-h) + g\odot k = \\
&= g\odot(h - h + k) = g\odot k
\end{aligned}
\tag{1.2.6}
$$

Então $0\odot h$ é o elemento que não altera valores quando somado, portanto é o valor zero da grandeza $G\odot H$. Com a fórmula (1.2.1) segue imediatamente que $g\odot 0$ também é zero. Para o produto com uma grandeza unidimensional vamos exigir que estes sejam as únicas possibilidades de formar o valor zero. Esta é a última regra que define o produto com uma grandeza unidimensional:

$$\forall(g\in V_G)\forall(h\in V_H):\ \left(g\odot h = 0 \Rightarrow (g=0 \vee h=0)\right) \tag{1.2.7}$$

No caso de duas grandezas multidimensionais existem tipos de produto que não cumprem esta condição.

Exercício: Mostre que para números λ racionais vale $(\lambda g)\odot h = \lambda(g\odot h)$

Uma vez completada a definição de produto vamos escolher o símbolo do produto. A escolha é a mais preguiçosa possível: a multiplicação com uma grandeza unidimensional é escrita sem nenhum símbolo, colocando o nome de um valor de uma grandeza ao lado do nome de um valor da outra. A grandeza $G\odot H$ será também escrita como *GH*. Se as duas grandezas forem diferentes percebemos qual valor pertence a qual grandeza e não é necessário expressar a individualidade pela posição no produto. Por exemplo, se multiplicarmos 5 Volt com 3 segundos obtemos 15 Volt segundos e não tem perigo de interpretar erroneamente Volt como um valor de tempo e segundo como um valor de voltagem. Se as duas grandezas forem iguais, a ordem dos fatores é de qualquer maneira irrelevante. Por exemplo, 3 metros vezes 5 metros resulta nos mesmos 15 metro metro como o produto de 5 metros com 3 metros. Em todo caso para a multiplicação com uma grandeza unidimensional vamos definir que *gh* e *hg* representam o mesmo valor. No caso de grandezas iguais usam-se também potências. Um valor como 15 metro metro é escrito como $15\,\mathrm{m}^2$.

De produtos de grandezas de mais alta dimensão trataremos mais tarde.

Lembramos aqui de uma definição matemática sumamente importante, a definição de um mapeamento[1] linear:

Definição: Sejam V e W espaços lineares sobre um corpo comutativo $\mathbb{K}$ (por exemplo o corpo de números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo de números complexos $\mathbb{C}$). Um mapeamento $F : V \to W$ é chamado de **linear** se e somente se para todos os elementos a e b de V e todos os elementos (números) α e β de $\mathbb{K}$ vale $F(\alpha a + \beta b) = \alpha F(a) + \beta F(b)$.

Exemplo 1: Seja H uma grandeza unidimensional e G uma grandeza física qualquer. Seja g algum valor fixo da grandeza G . A multiplicação dos valores de H com o valor g define um mapeamento linear que mapeia o espaço de valores de H no espaço de valores da grandeza GH.

Exemplo 2: Imagine que cortemos muitos pedaços de fio de cobre de um role de fio daqueles fios que são usados para enrolar transformadores. Medimos os comprimentos dos pedaços e pesamos os pedaços com uma balança de boa precisão. Representando os pares de valores de comprimento e massa num gráfico, percebemos que todos os pares ficam numa reta que passa pela origem do gráfico. Para pedaços de fios cortados do mesmo rolo descobrimos que existe uma relação linear entre massa e comprimento. Se repetirmos a experiência com pedaços de um outro rolo com fio de cobre de outro tipo, obtemos de novo uma relação linear entre massa e comprimento, mas possivelmente um outro mapeamento que corresponde a uma reta mais ou menos inclinada. Alguns tipos de arame correspondem a uma mesma função linear outros correspondem a mapeamentos diferentes. Isto permite definir uma relação de equivalência no conjunto de tipos de arame; dois tipos são considerados equivalentes se eles resultam na mesma relação linear entre comprimento e massa. Será que os mapeamentos lineares que relacionam comprimentos e massas poderiam ser considerados valores de uma grandeza física cujo domínio seria o conjunto de tipos de arames?

Para poder interpretar os mapeamentos lineares que relacionam comprimentos e massas como valores de uma grandeza é preciso ter uma soma para estes objetos. Uma soma de mapeamentos num espaço linear tem uma definição natural:

Definição. Seja C um conjunto, V um espaço linear e sejam $F : C \to V$ e $G : C \to V$ dois mapeamentos. A soma $F + G$ dos mapeamentos F e G é de novo um mapeamento de C para V tal que para todo x de C vale $(F+G)(x) = F(x) + G(x)$. (Repare que $(F+G)(x)$ designa o valor da função $F+G$ no ponto x enquanto $F(x)+G(x)$ designa a soma dos valores das funções F e G no ponto x.)

Caso que F e G sejam dois mapeamentos lineares entre espaços lineares a soma $F+G$ é também um mapeamento linear. Com esta soma podemos de fato considerar cada mapeamento que relaciona comprimentos de pedaços de fio com suas massas um valor de uma grandeza. Chamá-la-emos de densidade linear[2]. Então o valor da

[1] Usamos a palavra mapeamento como sinônimo de função, os matemáticos no Brasil usam frequentemente a palavra “aplicação” no lugar de mapeamento.
[2] Aqui a palavra linear não está sendo usada no sentido da definição de linearidade de um mapeamento e nem no sentido de linearidade de um espaço, mas aqui a palavra serve para distinguir este conceito de densidade de densidades superficiais e volumares.

densidade linear de um tipo T de arame é a função λ_T que fornece para um pedaço de arame do tipo T e de comprimento ℓ o valor da massa m:

$$\left.\begin{array}{l}\text{massa de um pedaço de arame}\\ \text{de tipo } T \text{ e compriemto } \ell\end{array}\right\} = \lambda_T(\ell) \qquad (1.2.8)$$

A função λ_T é o valor da grandeza densidade linear λ que é atribuído ao tipo T.

A definição de soma de funções acarreta automaticamente uma definição de múltiplo de uma função:

> **Definção:** Seja C um conjunto, V um espaço linear e seja $F: C \to V$ um mapeamento. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ define-se a função $(\alpha F): C \to V$ tal que para todo $x \in C$ vale $(\alpha F)(x) = \alpha(F(x))$. (Repare que no lado esquerdo a justaposição de (αF) e (x) significa "o valor da função (αF) no ponto x" e no lado direito a justaposição de α e $(F(x))$ significa "o produto do número α com o valor $F(x)$". Esta última multiplicação é definida no espaço linear V.)

Se aplicarmos esta definição no caso da densidade linear e usarmos ainda que a densidade linear é um mapeamento linear obtemos o seguinte resultado interessante:

$$\lambda_T(\alpha\ell) = \alpha(\lambda_T(\ell)) = (\alpha\lambda_T)(\ell) \qquad (1.2.9)$$

Em palavras: uma alteração da densidade linear do tipo de arame por um fator α tem sobre a massa de um pedaço de arame o mesmo efeito que uma alteração do comprimento pelo mesmo fator α. Percebemos certa semelhança deste resultado com a condição de igualdade (1.2.2) de produtos. Existe ainda outra semelhança com o produto. Devido a linearidade das funções λ_T temos $\lambda_T(0) = 0$. Um pedaço de arme de comprimento zero é um objeto um tanto hipotético, mas podemos imaginar este objeto como um caso limite de pedaços verdadeiros. Também podemos imaginar um tipo fictício de arame cujos pedaços todos tenham a massa zero independente do comprimento do pedaço. Este tipo de arame tem a densidade zero e de novo isto pode ser um caso limite de objetos reais. Estas são as únicas maneiras de obter pedaços de arame de massa zero. Então temos

$$\lambda_T(\ell) = 0 \;\Rightarrow\; (\ \ell = 0 \;\vee\; \lambda_T = 0\ ) \qquad (1.2.10)$$

Esta implicação é análoga da condição (1.2.7) e a fórmula (1.2.9) é análoga da (1.2.2). Estas analogias nos motivam a investigar o produto da grandeza densidade linear e da grandeza comprimento.

Primeiramente temos que estender o domínio da grandeza densidade linear para poder formar o produto. Pois os comprimentos são definidos para pedaços de arame enquanto a densidade é definida para tipos de arame. Mas, cada pedaço pertence a um tipo de arame e podemos atribuir a densidade também ao pedaço. Com esta extensão do domínio da densidade temos uma intersecção de domínios suficientemente grande para poder formar o produto $\lambda_T \odot \ell$. Aqui vamos escrever excepcionalmente o sinal de produto para poder distinguir muito claramente o produto $\lambda_T \odot \ell$ e o valor $\lambda_T(\ell)$ da função λ_T no ponto ℓ.

Agora vamos imaginar dois pedaços de arame; um do tipo A com comprimento a e outro do tipo B com comprimento b. Primeiramente vamos supor que os dois pedaços tenham a mesma massa:

$$\text{hipótese:} \qquad \lambda_A(a) = \lambda_B(b) \tag{1.2.11}$$

e que eles tenham comprimentos diferentes de zero.

Podemos escrever o comprimento de um dos pedaços como múltiplo do comprimento do outro;

$$a = \alpha b \tag{1.2.12}$$

com algum número real α. Com a fórmula (1.2.9) obtemos

$$(\alpha\lambda_A)(b) = \lambda_A(\alpha b) = \lambda_A(a) = \lambda_B(b) \tag{1.2.13}$$

Então as duas funções $\alpha\lambda_A$ e λ_B coincidem no ponto b. Um comprimento qualquer x pode ser escrito como múltiplo do comprimento b;

$$x = \xi b \tag{1.2.14}$$

com algum número adequado ξ. Com a linearidade das funções $\alpha\lambda_A$ e λ_B segue

$$(\alpha\lambda_A)(\xi b) = \xi(\alpha\lambda_A)(b) = \xi\lambda_B(b) = \lambda_B(\xi b) \tag{1.2.15}$$

Então as duas funções $\alpha\lambda_A$ e λ_B coincidem em todos os pontos e eles são a mesma função

$$\alpha\lambda_A = \lambda_B \tag{1.2.16}$$

Agora vamos investigar os produtos $\lambda_A \odot a$ e $\lambda_B \odot b$. Com o resultado (1.2.16) e com (1.2.2) temos

$$\lambda_B \odot b = (\alpha\lambda_A) \odot b = \lambda_A \odot (\alpha b) = \lambda_A \odot a \tag{1.2.17}$$

Então mostramos para $a \neq 0$ e $b \neq 0$ que $\lambda_A(a) = \lambda_B(b) \;\Rightarrow\; \lambda_A \odot a = \lambda_B \odot b$. Evidentemente esta implicação também vale quando um dos comprimentos for zero.

Agora vamos mostrar a implicação inversa. Vamos supor que os produtos sejam iguais:

$$\text{hipótese:} \qquad \lambda_A \odot a = \lambda_B \odot b \tag{1.2.18}$$

Primeiramente vamos ainda supor que b seja diferente de zero. De novo vamos escrever a como múltiplo de b e vamos usar a regra de igualdade de produtos (1.2.2):

$$(\alpha\lambda_A) \odot b = \lambda_A \odot (\alpha b) = \lambda_A \odot a = \lambda_B \odot b \tag{1.2.19}$$

Então temos

$$\{(\alpha\lambda_A) - \lambda_B\} \odot b = 0 \tag{1.2.20}$$

Como b era supostamente diferente de zero segue com (1.2.7) que $(\alpha\lambda_A) - \lambda_B = 0$, ou

$$(\alpha\lambda_A) = \lambda_B \tag{1.2.21}$$

Com a fórmula (1.2.9) segue

$$\lambda_A(a) = \lambda_A(\alpha b) = (\alpha\lambda_A)(b) = \lambda_B(b) \tag{1.2.22}$$

Então as massas são iguais. Para o caso $b \neq 0$ mostramos a implicação $\lambda_A \odot a = \lambda_B \odot b \Rightarrow \lambda_A(a) = \lambda_B(b)$. Caso $b = 0$ temos $\lambda_B \odot b = 0$ e com a hipótese (1.2.18) temos $\lambda_A \odot a = 0$. Com (1.2.7) segue $\lambda_A = 0$ ou $a = 0$. Em ambos os casos temos $\lambda_A(a) = 0$. Mas com $b = 0$ e com a linearidade de λ_B seria também $\lambda_B(b) = 0$ e as duas massas seriam iguais.

Conclusão: dois valores do produto $\lambda_A \odot a$ e $\lambda_B \odot b$ são iguais se e somente se os valores de massa $\lambda_A(a)$ e $\lambda_B(b)$ foram iguais. Então os valores de massa são uma característica das classes de equivalência da grandeza $\lambda \odot \ell$. Definimos igualdade de valores de produtos, mas de fato não falamos o que são os valores do produto. Agora, para o caso do nosso exemplo, podemos usar os valores de massa como valores do produto. Com esta decisão podemos identificar o valor de um produto $\lambda_A \odot a$ com o valor da aplicação do mapeamento λ_A no valor de comprimento a.

$$\lambda_A \odot a \underset{def.}{=} \lambda_A(a) \tag{1.2.23}$$

Mostramos então que as aplicações dos mapeamentos lineares λ_T podem ser escritas como multiplicações, ou seja o nosso exemplo 2 se reduz ao caso do exemplo 1. Pode-se mostrar que isto é assim para todos os mapeamentos lineares. No caso de um mapeamento linear $\lambda_T : V_1 \to V_2$ de um espaço unidimensional V_1 podemos fazer mais: podemos expressar o mapeamento como um quociente. As aplicações do mapeamento λ_T nos elementos de V_1 podem ser escritos como produtos:

$$\lambda_T(a) = \lambda_T \odot a \tag{1.2.24}$$

Um dado par de valores $\ell \in V_1$, $m \in V_2$ que satisfazem a equação

$$m = \lambda_T \odot \ell \tag{1.2.25}$$

determina o mapeamento de maneira única desde que $\ell \neq 0$. Pois, como V_1 é supostamente unidimensional, então qualquer valor a em V_1 pode ser escrito como múltiplo de ℓ e a aplicação de λ_T é determinada pela linearidade:

$$\text{com} \quad a = \alpha\ell \quad : \quad \lambda_T(a) = \alpha\lambda_T(\ell) = \alpha m \tag{1.2.26}$$

Isto justifica escrever o mapeamento como quociente:

$$\frac{m}{\ell} \underset{def.}{=} \lambda_T \tag{1.2.27}$$

Nesta discussão usamos as letras λ_T, m e ℓ que lembram densidade linear, massa e comprimento do nosso exemplo 2. Mas, podemos aplicar este tipo de divisão para qualquer grandezas desde que V_1 é unidimensional. V_2 pode até ser de mais alta dimensão. Com este resultado chegamos na definição da divisão de uma grandeza qualquer por uma grandeza unidimensional. Um quociente m/ℓ deve ser entendido como mapeamento linear que associa a cada valor da grandeza de ℓ um valor da grandeza de *m*. Este tipo de formação de quocientes é de fundamental importância na mecânica. Por exemplo, velocidade e aceleração são formados desta forma.

Um quociente m/ℓ pode ser interpretado também como um produto de m e ℓ^{-1}. Para atribuir um sentido a esta notação devemos definir o inverso de uma grandeza. Lembramos aqui da definição de espaço dual de um espaço linear:

> **Definição:** Seja V um espaço linear sobre um corpo comutativo $\mathbb{K}$ (por exemplo o corpo de números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo de números complexos $\mathbb{C}$). O conjunto de todos os mapeamentos lineares que mapeiam V em $\mathbb{K}$ tem naturalmente a estrutura de um espaço linear e este espaço é chamado o espaço dual de V e ele é escrito como V^*.

Agora seja G uma grandeza unidimensional com domínio D_G e espaço de valores V_G. Podemos definir uma grandeza G^{-1} que tem o domínio

$$D_{G^{-1}} \quad = \quad \left\{ x \in D_G \middle| G_x \neq 0 \right\} \qquad (1.2.28)$$

O espaço de valores desta grandeza é o espaço dual de V_G. Então os valores desta grandeza são mapeamentos que mapeiam V_G em $\mathbb{R}$. Então para cada objeto $x \in D_{G^{-1}}$ o valor $G^{-1}{}_x$ mapeia V_G em $\mathbb{R}$. Este mapeamento é tal que

$$G^{-1}{}_x \left(G_x \right) \quad = \quad 1 \qquad (1.2.29)$$

para todos os objetos $x \in D_{G^{-1}}$. Com esta definição podemos escrever um quociente m/ℓ como um produto de m e ℓ^{-1}.

Seja G uma grandeza unidimensional com domínio D_G e espaço de valores V_G. E ordem total compatível com a estrutura algébrica. No espaço de valores V_{G^2} da grandeza GG podemos definir uma ordem total natural tal que $v \geq 0$ se existir um valor $g \in V_G$ tal que $gg = v$. Este valor g chamaremos de raiz quadrada do valor v. A função raiz quadrada é monotonamente crescente; $v_1 < v_2 \Rightarrow \sqrt{v_1} < \sqrt{v_2}$.