1.3 Espaços Físicos

A primeira lei de Newton diz que uma massa pontual livre de influências externas permanece em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme. Para que essa lei adquira um sentido físico devemos definir os conceitos nela utilizados. O que é uma massa livre, em relação a que relógio é o movimento uniforme e o que é um movimento retilíneo?

As perguntas sobre movimento retilíneo e uniforme dizem respeito a espaço e tempo. Sobre isso Newton[1] escreveu: " O espaço absoluto, em virtude de sua natureza, permanece igual imóvel sem nenhuma relação com outros objetos" - "O tempo absoluto, verdadeiro e matemático, em virtude de sua natureza, escoa uniformemente sem nenhuma relação com quaisquer outros objetos."

Com o surgimento da Física Moderna – no início do século 20 – nossa visão mudou de maneira tal que já não podemos aceitar essas frases sobre espaço e tempo como fundamento de uma teoria física. O que falta a essas frases é uma indicação de como a uniformidade de um movimento em relação àquele tempo absoluto pode ser verificado empiricamente, ou como os pontos, retas, planos, etc. daquele espaço absoluto podem ser relacionados a objetos observáveis.

As noções Newtonianas sobre espaço e tempo absoluto perderam atualmente o seu significado. Para Newton eles eram uma ajuda mental para criar sua teoria. Como as frases afirmam, espaço e temo absoluto não têm nenhuma relação com outros objetos. Então eles também não têm nenhuma relação com as nossas experiências nos laboratórios e deve ser possível formular a mecânica sem estes conceitos. Uma formulação sem estes fantasmas metafísicas deve ajudar elucidar a verdadeira estrutura da teoria. Então vamos começar com uma análise do espaço, não do espaço intocável de Newton, mas de espaços caracterizados empiricamente.

Um espaço consiste de pontos. Mas um ponto é um conceito complicado! Um ponto é um lugar imaginado no espaço. Um ponto não tem extensão. Mas para poder falar de extensão precisamos da noção de distância, e esta é definida para pares de pontos no espaço. Então estamos dando voltas; na tentativa de definir ponto usamos um conceito que já pressupõem uma definição de ponto.

Os matemáticos encontraram uma maneira de evitar as complicações envolvidas. Quando eles formulam a geometria eles simplesmente não definem o que é um ponto, uma reta e um plano. Isto funciona, porque eles se interessam apenas pela estrutura com a qual estes objetos se relacionam. David Hilbert[2] reuniu estas relações de forma axiomática, mostrou que os axiomas são independentes e mostrou com um modelo (com o espaço matemático $\mathbb{R}^3$) que as axiomas não contêm contradições[3].

Mas na física esta abordagem não é aceitável. No laboratório temos que dar significados concretos a estes conceitos. Vamos então mergulhar no mundo sujo das medidas experimentais poluído por erros experimentais e vamos explicar o que é um ponto. Os artesãos que trabalham nas oficinas de mecânica fina marcam pontos riscando superfícies metálicas com agulhas com pontas finas e duras. Eles fazem dois traços e o

[1] Sir Isaac Newton *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (em latim) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRG)
[2]David Hilbert (1862 – 1943) era um dos matemáticos mais influentes dos tempos modernos.
[3] David Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig 1899, Teubner, Stuttgart 1999[14], ISBN 3-519-00237-X.

lugar onde os traços se cruzam é um ponto. Se você pergunta o que é uma ponta dura e fina, ela é um objeto que fere seu dedo quando você o pressiona contra a ponta.

Então temos pontos realizados no laboratório. Mas se você olhar uma marca feita desta maneira com a ajuda de uma lupa você mudará rapidamente de opinião: o que antes parecia um ponto parece agora como uma mancha enorme e mal definida. Então você vai pedir ao artesão da mecânica fina de usar uma agulha mais fina. Mas isto resolve o problema somente até o momento de adquirir também uma lupa mais potente. O ponto é uma idealização que ficaria no fim de uma seqüência infinita de melhoramentos de riscos cruzados. Na prática não conseguimos realizar tais seqüências infinitas e na aplicação prática da mecânica os pontos são mesmo aqueles riscos que aparecem como manchas mal definidas na imagem de lupa. Consequentemente todas as grandezas físicas definidas a partir de pontos, como por exemplo a grandeza distância, levam incerteza experimental devido a própria imperfeição dos pontos.

Com toda imperfeição que os pontos e as medidas de grandezas relacionadas com pontos possam ter, as medidas feitas revelam uma estrutura que chamamos de geometria. Investigaremos agora esta estrutura mais detalhadamente.

Na discussão do conceito de grandeza física já mencionamos a relação de equivalência que define igualdade de distância. Agora temos que investigar o procedimento experimental que verifica igualdade de distâncias mais detalhadamente. Definimos a igualdade de distâncias pelo encaixe das pontas de um compasso. Mas este procedimento não é tão simples. O que significa encaixar as pontas de um compasso num par de pontos marcados? Significa botar as pontas do compasso em contato com os pontos marcados. Mas isto não é o suficiente. O contato das duas pontas com os dois pontos tem que existir simultaneamente, caso contrário se trataria de um transporte do compasso entre os pontos marcados e não de um processo de encaixe. É sumamente surpreendente que o procedimento experimental que serve para explorar geometria do espaço envolva noções temporais!

Ainda não definimos simultaneidade, mas podemos dar uma prescrição cautelosa do processo de encaixar um compasso num par de pontos que deve funcionar qualquer que seja a definição correta de simultaneidade. Esta funciona da seguinte forma: para encaixar as pontas A' e B' de um compasso em pontos marcados A e B devemos colocar a ponta A' em contato com o ponto A e emitir algum tipo de sinal na direção do ponto B. Quando este sinal chegar no ponto B a ponta B' deve estar em contato com o ponto B. Neste momento mandamos um outro sinal de volta para o ponto A. Durante todo o processo, deste a emissão do primeiro sinal até a chegada do sinal de respostas a ponta A' deve ficar em contato permanente com o ponto A. Desta forma podemos garantir que o toque da ponta B' no ponto B aconteceu enquanto a ponta A' estava em contato com o ponto A.

Notamos que esta prescrição é assimétrica. Esperamos de uma noção decente de distância que ela seja simétrica. Isto é, a distância de um par de pontos $\langle A, B \rangle$ deveria ser sempre igual à distância do par $\langle B, A \rangle$:

$$d_{\langle A,B \rangle} = d_{\langle B,A \rangle} \tag{1.3.1}$$

Além disso não é nada trivial que a prescrição de encaixe de compassos gera realmente uma relação de equivalência. O mesmo compasso que hoje encaixa num par de pontos marcados poderia amanhã não encaixar. Se pensarmos em pontos marcados na massa de pão em fermentação isto é bastante evidente. Então percebemos que a auto-consistência da grandeza distância depende do corpo onde marcamos os pontos. Logo em seguida daremos a definição de soma de distâncias. Com igualdade de valores e soma de distâncias verificamos experimentalmente que existem corpos para os quais pontos marcados levam a uma noção consistente de distância que é unidimensional e que cumpre a condição de simetria (1.3.1). Vamos chamar estes corpos de *corpos de referência rígida.* Então podemos formular uma primeira lei empírica da mecânica clássica:

Lei 1: Existem corpos de referência rígida que dão origem a uma noção de distância consistente, simétrica e unidimensional.

Imagine que marquemos muitos pontos em dois corpos de referência rígida. Pode ser que o encaixe de compasso na junção de todos estes pontos dê origem a uma noção consistente de distância ou não. Por exemplo, no asfalto da rua podemos definir distância consistentemente e no chassi do meu carro também, mas juntando os pontos marcados no asfalto e os pontos marcados no carro encontramos uma noção consistente de distância somente se o carro estiver parado. Se o carro estiver andando cada encaixe de compasso entre um ponto no carro e outro no asfalto resulta em inconsistências. Quando podemos juntar os pontos de dois corpos de referencia rígida consistentemente vamos dizer que estes corpos são *compatíveis para referência.* Empiricamente encontramos a seguinte lei:

Lei 2: Compatibilidade para referência é uma relação de equivalência.

Vamos chamar uma classe de equivalência desta relação de *referencial.* A noção de referencial tem um papel importante em muitas áreas da Física, somente na Teoria da Relatividade Geral os referenciais perderão sua importância. Se tivéssemos ficado no mundo celeste dos axiomas de Hilbert não teríamos desconfiado que geometria fosse relacionada com conceitos temporais e consequentemente nunca teríamos encontrado o importante conceito de referencial.

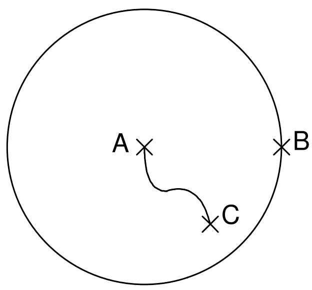


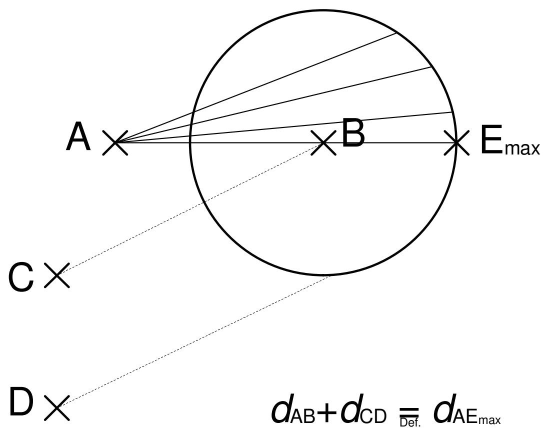
Fig. 1.3.1 Comparação de valores de distância.
$d_{\langle A,C \rangle} < d_{\langle A,B \rangle}$.

Vamos imaginar pontos associados a um referencial que não precisam ser marcados, mas que podem ser especificados a partir de pontos marcados através de relações geométricas. Por exemplo, podemos especificar três distâncias entre o ponto imaginado e três pontos marcados. O conjunto de todos os pontos que podem ser formados desta maneira junto com a estrutura geométrica que resulta da grandeza distância forma o espaço físico associado ao referencial. Mas, cada referencial tem o seu espaço associado. Logo não existe **o** espaço físico, mas existem espaços físicos. Um ponto no espaço de um referencial não corresponde a um ponto num outro referencial. Por exemplo, se marcarmos um ponto num tijolo e se jogarmos este tijolo pela janela do vigésimo andar de um prédio o ponto marcado não corresponde a nenhum ponto no referencial do prédio, mas sim a uma trajetória.

Falta definir a soma de distâncias. Primeiramente define-se um ordenamento dos valores de distância. Seja $\langle A,B \rangle$ um par de pontos num referencial. Podemos ajustar as pernas de um compasso neste par de pontos e podemos encaixar uma das pontas no ponto A.

Então podemos definir a superfície de esfera com raio $d_{\langle A,B \rangle}$ e centro A como o conjunto de pontos que podem ser alcançados pela outra ponta do compasso. Nesta definição admitimos pontos não marcados que são meramente imaginados como pontos possivelmente alcançáveis pela segunda ponta do compasso. Agora considere um terceiro ponto C. Tomamos uma agulha fina, aquelas usadas para marcar pontos, e movemos a ponta da agulha do ponto A até o ponto C. Se for possível de fazer isto sem nunca passar por um ponto na superfície da esfera de raio $d_{\langle A,B \rangle}$ e centro A vamos dizer que a distância $d_{\langle A,C \rangle}$ é menor que a distância $d_{\langle A,B \rangle}$ (compare com a figura 1.3.1).

Fig. 1.3.2 Soma de valores de distâncias.



Com a ajuda desta relação de ordem podemos definir a soma de valores de distância. Sejam $\langle A,B \rangle$ e $\langle C,D \rangle$ pares de pontos num referencial. Define-se a soma $d_{AB} + d_{CD}$ como a maior distância de todos os pares $\langle A,E \rangle$, onde E percorre todos os pontos da esfera de raio d_{CD} e centro B (compare Fig. 1.3.2).

Uma conseqüência imediata desta definição é a desigualdade

$$d_{\langle A,B \rangle} + d_{\langle B,C \rangle} \geq d_{\langle A,C \rangle} \qquad (1.3.2),$$

que é conhecida como *desigualdade de triângulo.* Como sempre, o símbolo "≥" significa " > ou = ". O caso da igualdade é um caso muito especial. Se os três pontos A, B e C estiveram localizados de tal maneira que vale $d_{\langle A,B \rangle} + d_{\langle B,C \rangle} = d_{\langle A,C \rangle}$ vamos dizer que estes pontos são alinhados. Agora podemos formular uma terceira lei empírica:

> **Lei 3:** Para todos os pontos distintos A e C de um referencial existem pontos B distintos dos pontos A e C tal que $d_{\langle A,B \rangle} + d_{\langle B,C \rangle} = d_{\langle A,C \rangle}$ e existem pontos D tal que $d_{\langle A,D \rangle} + d_{\langle D,C \rangle} > d_{\langle A,C \rangle}$.

O conjunto de pontos que resultam numa igualdade será chamado de segmento reto entre A e C.

Vamos escrever o conjunto de todos os pontos do espaço de um referencial R como $\mathscr{E}_R$. E vamos definir:

Definição: Sejam A e C pontos em $\mathscr{E}_R$. O segmento reto entre A e C é o conjunto

$$\overline{\mathrm{AC}} \underset{def.}{=} \left\{ B \in \mathscr{E}_R \,\middle|\, d_{\langle \mathrm{A,B} \rangle} + d_{\langle \mathrm{B,C} \rangle} = d_{\langle \mathrm{A,C} \rangle} \right\} \qquad (1.3.3).$$

A lei 3 garante que para o caso $\mathrm{A} \neq \mathrm{C}$ este conjunto não é trivial (isto é, ele não é o conjunto $\{\mathrm{A, C}\}$ e nem coincide com o espaço inteiro $\mathscr{E}_R$).

Definição: Um subconjunto S de $\mathscr{E}_R$ será chamado de subespaço se (a) ele contem pelo menos dois pontos distintos, (b) para todos A e C em S vale $\overline{\mathrm{AC}} \subset S$ e (c) para todos A e C in S existe um ponto B in S tal que $d_{\langle \mathrm{B,C} \rangle} = d_{\langle \mathrm{B,A} \rangle} + d_{\langle \mathrm{A,C} \rangle}$ e $d_{\langle \mathrm{B,A} \rangle} = d_{\langle \mathrm{A,C} \rangle}$. Escrito formalmente:

S é subespaço de $\mathscr{E}_R \underset{Def.}{\Leftrightarrow}$

$$\begin{cases} \exists(\mathrm{A} \in S)\exists(\mathrm{B} \in S) : \mathrm{A} \neq \mathrm{B} \quad \wedge \\ \forall(\mathrm{A} \in S)\forall(\mathrm{C} \in S) : \overline{\mathrm{AC}} \subset S \quad \wedge \\ \forall(\mathrm{A} \in S)\forall(\mathrm{C} \in S)\exists(\mathrm{B} \in S) : \left(d_{\langle \mathrm{B,C} \rangle} = d_{\langle \mathrm{B,A} \rangle} + d_{\langle \mathrm{A,C} \rangle} \wedge d_{\langle \mathrm{B,A} \rangle} = d_{\langle \mathrm{A,C} \rangle} \right) \end{cases} \qquad (1.3.4).$$

A Figura 1.3.3 pode ajudar captar a ideia desta definição. A exigência que o segmento reto entre dois pontos do conjunto pertence também ao conjunto caracteriza um tipo de conjuntos de pontos que são chamados de conjuntos convexos. A terceira condição significa que qualquer segmento reto no conjunto pode ser estendido dentro do conjunto para ambos os lados.

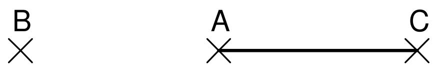


Fig. 1.3.3 Ilustração da terceira condição de subespaço..

Com estas noções estamos prontos para poder definir retas e planos.

Definição: Para dois pontos distintos A e B em $\mathscr{E}_R$ a intersecção de todos os subespaços que contêm os pontos A e B é chamada de reta que contem os pontos A e B .

Definition: Para todos três pontos distintos A, B e C em $\mathscr{E}_R$ que não pertencem a uma mesma reta, a intersecção de todos os subespaços que contêm os pontos A, B e C é chamada de plano que contem os pontos A, B e C .