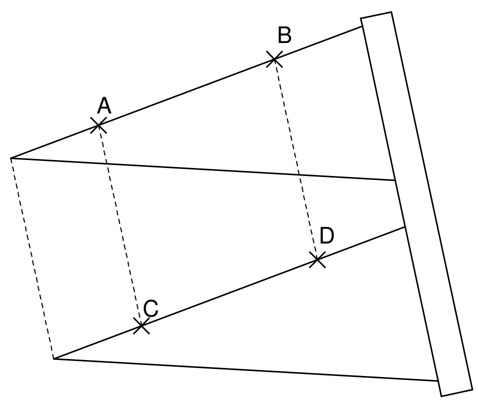
1.4 A grandeza vetor deslocamento

Estamos em condições de definir uma primeira grandeza multidimensional dentro do espaço de um referencial *R*. Chamá-la-emos de *deslocamento* ou *vetor deslocamento*, escrevendo-a como $\vec{D}_R$, onde o índice R indica que esta grandeza é definida no referencial *R*. O domínio dela é o mesmo da grandeza distância, ou seja, o conjunto de pares de pontos de um referencial. Mas, a relação de equivalência que define igualdade de valores é diferente. Esta é definida através de um procedimento experimental relativamente complicado.

Podemos fabricar objetos sólidos (objetos que podem servir como corpos de referência rígida) que possuem uma face plana, isto é cujos pontos formam um subconjunto de um plano. A noção de plano foi definida na secção anterior. Chamaremos estes objetos de *mesas planas*. Podemos também fabricar objetos sólidos planos com arestas retas. Em aulas de geometria estes objetos são conhecidos como réguas e esquadros. Geralmente os esquadros têm pontas com ângulos de 45°, 30°. 60° ou 90°. Não definimos ainda ângulo e de fato no momento não precisamos de nenhum valor especial de ângulo. É somente importante que os nossos esquadros tenham arestas retas. As noções de reto e de reta já foram definidas.

Agora imagine um dado par de pontos $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$ no espaço $\mathcal{E}_R$ de um referencial R. Colocamos uma mesa plana no espaço de tal forma que os pontos A e B estejam dentro do plano da mesa. Em seguida colocamos um esquadro na mesa de tal forma que uma das arestas retas do esquadro encoste-se aos pontos A e B e fixamos marcas $\tilde{\mathrm{A}}$ e $\tilde{\mathrm{B}}$ na borda do esquadro nos lugares dos pontos A e B. Em seguida encostamos uma régua numa das arestas retas do esquadro e a fixamos na mesa. Finalmente deslizamos o esquadro ao longo da régua por alguma distância. Então as marcas $\tilde{\mathrm{A}}$ e $\tilde{\mathrm{B}}$ na borda do esquadro definem um novo par de pontos $\langle \mathrm{C}, \mathrm{D} \rangle$ que será considerado equivalente ao par original $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$. Podemos ainda deslizas o esquadro ao longo de outra aresta e obter mais pares equivalentes. Todos os pares de pontos que podem ser construídos desta forma a partir do par $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$ são, por definição, equivalentes ao par $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$. Podemos chamá-los de pares transportados paralelamente. Experimentalmente pode-se verificar que esta prescrição define realmente uma relação de equivalência. A Figura 1.4.1 mostra um exemplo de um transporte paralelo de um par de pontos.

Fig. 1.4.1 Transporte paralelo de um par de pontos..



As classes de equivalência são os valores da grandeza deslocamento. Cada valor desta grandeza é também chamado de *vetor*. A classe de equivalência ou vetor que contem o par de pontos $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$ será escrito como $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Variáveis que representam valores da grandeza $\vec{D}_R$ serão escritos com uma seta sobrescrita, por exemplo $\vec{a}$. Escreveremos o espaço de valores da grandeza $\vec{D}_R$ com o símbolo $\mathbb{D}_R$, onde o índice R indica que se trata da grandeza deslocamento definido no referencial R.

Resta definir a soma de vetores. Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ valores da grandeza $\vec{D}_R$. Para construir a som $\vec{a}+\vec{b}$ escolhe-se um par de pontos $\langle \mathrm{A},\mathrm{B} \rangle$ na classe $\vec{a}$. Existe um ponto único C tal que $\langle \mathrm{B},\mathrm{C} \rangle \in \vec{b}$. Então $\vec{a}+\vec{b}$ é definido como a classe que contem o par $\langle \mathrm{A},\mathrm{C} \rangle$. Isto completa a definição da grandeza deslocamento.

A Figura 1.4.2 ilustra a definição da soma de vetores. Usualmente em figuras, um valor $\vec{v}$ da grandeza deslocamento é representado através de uma seta que aponta a partir de um ponto A até um ponto B que forma com A um par que pertence a classe $\vec{v}$.

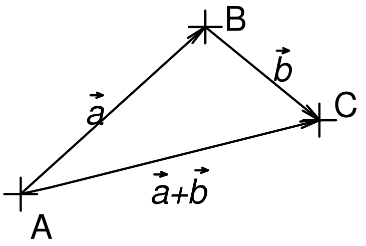


Fig. 1.4.2 Soma de vetores.

A soma de vetores tem uma interpretação simples que justifica o nome deslocamento. Imagine um objeto pequeno que foi deslocado do ponto A até o ponto B. O vetor $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ descreve este deslocamento. Se deslocarmos o objeto subsequentemente com um deslocamento $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ obtemos um deslocamento total $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ que é a soma de $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

Podemos dar ainda outra interpretação. Cada valor $\vec{v}$ da grandeza deslocamento define um mapeamento bijetivo $T_{\vec{v}} : \mathscr{E}_R \leftrightarrow \mathscr{E}_R$. A imagem de um ponto A é o ponto B tal que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{v}$. Este tipo de mapeamento é chamado *translação no espaço*. A soma de vetores corresponde à concatenação dos mapeamentos; $T_{\vec{a}+\vec{b}} = T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{b}}$.

Os pares de pontos com dois pontos iguais formam uma classe de equivalência que não altera valores quando somado ao valor:

$$\vec{v} + \overrightarrow{\mathrm{AA}} = \vec{v} \qquad (1.4.1)$$

Então esta classe é o valor zero, $\overrightarrow{\mathrm{AA}} = 0$. Para qualquer $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ temos

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{AA}} = 0 \qquad (1.4.2)$$

Consequentemente vale $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\overrightarrow{\mathrm{BA}}$. Define-se também a diferença de vetores:

$$\vec{a} - \vec{b} \underset{Def.}{=} \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) \qquad (1.4.3)$$

Figura 1.4.3 mostra soma e diferença de vetores.

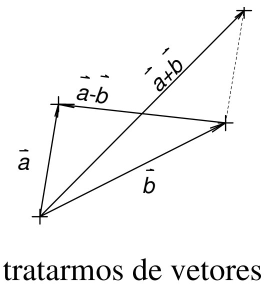
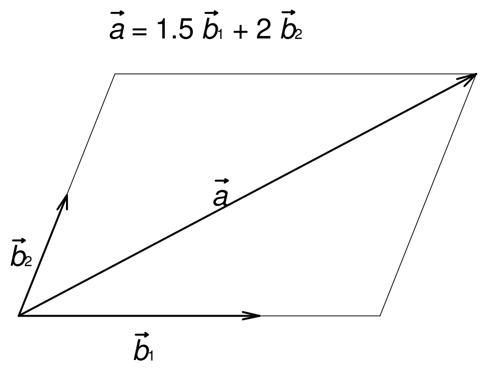


Fig. 1.4.3 Soma e diferença de vetores.

A multiplicação de valores da grandeza deslocamento com números racionais é definida como para qualquer outra grandeza, a saber, a partir de somas repetidas. Mas um pouco mais tarde veremos que precisamos ainda de outros tipos de números quando tratarmos de vetores.

Deslocamento é uma grandeza tridimensional. Então em geral precisamos de três valores básicos para poder escrever um valor qualquer como combinação linear dos elementos básicos. Quando restringimos os vetores num plano podemos usar apenas dois vetores básicos. A Figura 1.4.4 mostra um exemplo.

Fig. 1.4.4 Representação de um vetor num plano como combinação linear de uma base..



É um fato não trivial que o procedimento experimental descrito leva a uma grandeza consistente, tridimensional. Podemos enunciar este fato como a quarta lei da mecânica clássica:

> **Lei 4:** Deslocamento é uma grandeza física linear consistente de três dimensões.

Evidentemente todos os pares de pontos que pertencem a uma mesma classe de equivalência da grandeza deslocamento têm a mesma distância. Isto é evidente porque poderíamos fixar as pontas de um compasso nas marcas feitas na beirada do esquadro na hora de fazer o transporte paralelo. Consequentemente as classes da grandeza deslocamento formam uma subdivisão das classes da grandeza distância e podemos associar o valor de distância de qualquer para de pontos de uma classe $\vec{a}$ da grandeza $\vec{D}_R$ ao vetor $\vec{a}$. Este valor de distância é chamado de norma ou módulo do vetor e ele é escrito colocando o vetor entre duas barras verticais:

Definição 1.4.1: Módulo de um vetor de deslocamento:

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \underset{Def.}{=} d_{\langle \mathrm{AB} \rangle} \tag{1.4.4}$$

A operação de tomar o modulo de um vetor de deslocamento define um mapeamento que mapeia o espaço de valores $\mathbb{D}_R$ no espaço de valores V_d.

$$\left| \;\right| : \mathbb{D}_R \to V_d \tag{1.4.5}$$

Exercício: Determine se este mapeamento é linear ou não.

O módulo pode ser usado para formular uma lei empírica importante:

Lei 5: Todos os pares de pontos que pertencem ao mesmo vetor de deslocamento têm a mesma distância e este valor, $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| \underset{Def.}{=} d_{\langle \mathrm{AB} \rangle}$, obedece a seguinte condição:

$$\boxed{\forall\left(\vec{a},\vec{b} \in \mathbb{D}_R\right): \quad \left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = 2\left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{b}\right|^2} \tag{1.4.6}$$

Esta fórmula é chamada de *lei do paralelogramo*. A lei do paralelogramo tem conseqüências importantíssimas. Ela é uma das pecas básicas mais importantes da física.

Na secção 1.2 definimos a multiplicação de uma grandeza com uma grandeza unidimensional. Agora veremos o primeiro exemplo de multiplicação de duas grandezas tridimensionais. Imagine que tenhamos um objeto que possui duas propriedades do tipo vetor deslocamento. Por exemplo, um paralelogramo como aquela da figura 1.4.5 tem naturalmente tais propriedades.

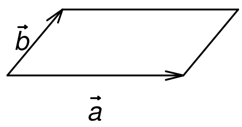


Fig. 1.4.5 Objeto com duas propriedades do tipo deslocamento.

Definimos:

Definição 1.4.2: O produto escalar de dois vetores deslocamento $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \underset{Def.}{=} \frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 \right) \tag{1.4.7}$$

Esta definição precisa de algumas explicações. Primeiro, o quadrado de um módulo é naturalmente uma grandeza positiva. Mas, podemos estender o espaço de valores desta grandeza para formarmos um espaço unidimensional completo acrescentando valores negativos. Da mesma maneira como encontramos um significado de massas negativas estendendo o uso desta grandeza para descrever massa transportada, podemos dar um significado para os valores negativos de quadrados de distâncias aplicando esta grandeza não mais a pares de pontos, mas, como na fórmula (1.4.7), a quádruplos de pontos.

Segundo, o fator ¼ pode parecer estranho. Mas este valor particular foi escolhido para garantir uma relação bem simples entre produto escalar e módulo. Temos

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2 \qquad (1.4.8).$$

Terceiro, com $\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \left|\vec{b}-\vec{a}\right|$ conclui-se que o produto escalar é simétrico: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.

E finalmente, com a ajuda da lei do paralelogramo, podemos provar uma propriedade do produto escalar importante:

Teorema 1.4.1 : Para todos vetores $\vec{a}\in\mathbb{D}_R$, $\vec{b}\in\mathbb{D}_R$ e $\vec{c}\in\mathbb{D}_R$ vale

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \qquad (1.4.9).$$

Demonstração: Primeiramente usamos a fórmula (1.4.7) para escrever o lado direito da fórmula (1.4.9):

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} = \frac{1}{4}\left\{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right\} + \frac{1}{4}\left\{\left|\vec{a}+\vec{c}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{c}\right|^2\right\} \qquad (1.4.10).$$

Em seguida, aplicamos a lei do paralelogramo com dois dos quarto termos:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = 2\left|\vec{a}\right|^2 + 2\left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 \tag{1.4.11}$$

e

$$-\left|\vec{a}-\vec{c}\right|^2 = -2\left|\vec{a}\right|^2 - 2\left|\vec{c}\right|^2 + \left|\vec{a}+\vec{c}\right|^2 \qquad (1.4.12).$$

Então obtemos

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \;=\; \frac{1}{4}\left\{\cancel{2\left|\vec{a}\right|^2}+2\left|\vec{b}\right|^2-2\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2+2\left|\vec{a}+\vec{c}\right|^2-\cancel{2\left|\vec{a}\right|^2}-2\left|\vec{c}\right|^2\right\} \qquad (1.4.13).$$

Agora somamos um "zero inteligente" $\left|\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right|^2$ no colchete:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \;=\; \frac{1}{4}\left\{\underline{2\left|\vec{b}\right|^2}\quad \underline{\underline{-2\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2}}+\underline{2\left|\vec{a}+\vec{c}\right|^2}\quad \underline{\underline{-2\left|\vec{c}\right|^2}}+\underline{\underline{\left|\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right|^2}}\quad \underline{-\left|\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right|^2}\right\}$$
$$(1.4.14)$$

A aplicação da lei do paralelogramo nos termos simplesmente sublinhados fornece $\left|\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}\right|^2$ e os termos duplamente sublinhados resultam em $-\left|\vec{a}-\vec{c}-\vec{b}\right|^2$. Então o resultado final é

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} \;=\; \frac{1}{4}\left\{\left|\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{c}-\vec{b}\right|^2\right\} \;=\; \vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) \qquad (1.4.15),$$

o que completa a demonstração do teorema 1.4.1.

Aplicando o teorema no caso $\vec{b}=n\vec{c}$ e usando $\vec{a}\cdot 0 = 4^{-1}\left(\left|\vec{a}+0\right|^2-\left|\vec{a}-0\right|^2\right)=0$ se conclui indutivamente que vale $\vec{a}\cdot\left(n\vec{c}\right)=n\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Com $\vec{d}=n\vec{c}$ e $n\neq 0$ temos também $n^{-1}\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)=\vec{a}\cdot\left(n^{-1}\vec{d}\right)$. E finalmente temos também

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\left(-\vec{e}\right) &= 4^{-1}\left(\left|\vec{a}+\left(-\vec{e}\right)\right|^2-\left|\vec{a}-\left(-\vec{e}\right)\right|^2\right)\\ &= 4^{-1}\left(\left|\vec{a}-\vec{e}\right|^2-\left|\vec{a}+\vec{e}\right|^2\right)=-\left(\vec{a}\cdot\vec{e}\right)\end{aligned} \qquad (1.4.16)$$

Então se conclui que $q\left(\vec{a}\cdot\vec{e}\right)=\vec{a}\cdot\left(q\,\vec{e}\right)$ para qualquer número racional q. Podemos combinar isto com o teorema 1.4.1 e afirmar que para qualquer combinação linear $\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ vale

$$\vec{a}\cdot\left(\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\right) \;=\; \beta\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+\gamma\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) \qquad (1.4.17)$$

Com um fator esquerdo $\vec{a}$ fixo, o produto escalar define um mapeamento que mapeia $\mathbb{D}_R$ no espaço de valores de quadrados de distâncias. A formula (1.4.17) informa que este mapeamento é linear. Então podemos afirmar: o produto escalar é linear no fator da direita. Mas, como ele é simétrico, ele é também linear no fator da esquerda. Uma função de duas variáveis, que depende linearmente de cada uma das variáveis é chamada de *bilinear*. Então o produto escalar é um mapeamento bilinear. Esta conseqüência da lei do paralelogramo é bastante surpreendente, uma vez que o produto escalar é construído a partir da função módulo, que não é linear.

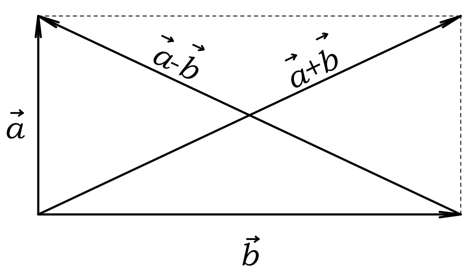


Fig. 1.4.6 Vetores ortogonais.

A Figura 1.4.6 mostra um caso

particularmente interessante de produto escalar. Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ formam um paralelogramo com quarto ângulos iguais. Estes ângulos são chamados de ângulos retos e quando dois vetores formam um ângulo reto diz-se que os vetores são *ortogonais*. Da simetria da figura se percebe que as duas diagonais têm o mesmo tamanho e os vetores $\vec{a}+\vec{b}$ e $\vec{a}-\vec{b}$ têm o mesmo módulo. Consequentemente o produto escalar de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é zero; $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Inversamente se o produto escalar for zero as duas diagonais têm o mesmo tamanho e o paralelogramo tem quatro ângulos iguais. No caso que um dos vetores $\vec{a}$ ou $\vec{b}$ for zero o paralelogramo é degenerado e neste caso define-se que este vetores são ortogonais também. Então podemos resumir:

Definition 1.4.3: $$\vec{a}\ e\ \vec{b} \text{ são ortogonais } \underset{Def.}{\Leftrightarrow} \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \qquad (1.4.18)$$

A afirmação que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ortogonais se escreve também na seguinte forma: $\vec{a}\perp\vec{b}$.

A desigualdade de triângulo implica que

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le |\vec{a}|+\left|\vec{b}\right| \qquad (1.4.19).$$

O sinal = vale somente em casos muito especiais, a saber, quando os vetores são alinhados e apontam no mesmo sentido.

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = |\vec{a}|+\left|\vec{b}\right| \quad \text{somente se } \vec{b}=\beta\vec{a} \text{ ou } \vec{a}=\alpha\vec{b} \text{ com } \alpha,\beta \ge 0 \qquad (1.4.20)$$

De maneira parecida temos geralmente $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 \ne |\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2$, mas em casos especiais pode valer uma igualdade. Estes casos especiais são os casos de vetores ortogonais. Da fórmula (1.4.8) podemos concluir imediatamente o

Teorema 1.4.2: $$\vec{a} \text{ e } \vec{b} \text{ são ortogonais } \Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2+\left|\vec{b}\right|^2 \qquad (1.4.21)$$

Este resultado é conhecido como o **teorema de Pitágoras**.

Agora, este teorema tem conseqüências intrigantes. Considere o caso de dois vetores ortogonais $\vec{a}$ e $\vec{b}$ com o mesmo módulo; $\vec{a}\perp\vec{b}$ e $|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|$. Neste caso, o teorema de Pitágoras resulta em

$$\left(\vec{a}\perp\vec{b} \quad \wedge \quad |\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|\right) \Rightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2 = 2|\vec{a}|^2 \qquad (1.4.22)$$

A Figura 1.4.7 mostra esta situação.

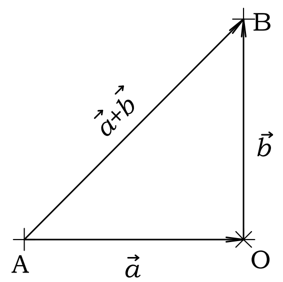


Fig. 2.3.7 Soma de vetores ortogonais do mesmo módulo.

A formula (1.4.22) significa que as distâncias do par de pontos $\langle A, O\rangle$ e do par $\langle A, B\rangle$ da figura 1.4.7 diferem por um fator numérico muito especial:

$$d_{\langle A,B\rangle} = \rho\, d_{\langle O,A\rangle} \qquad \text{com} \quad \rho^2 = 2 \qquad (1.4.23)$$

Agora, o fato intrigante é que dentro do conjunto de números racionais não existe nenhum número ρ cujo quadrado é 2. Podemo-nos convencer disso da seguinte maneira: Se ρ fosse um quociente de dois números inteiros $\rho = n/m$ poder-se-ia decompor n e m nos seus fatores primos e poder-se-ia cancelar fatores que aparecem em ambos os números. Podemos supor que este cancelamento já tenha sido feito. Então supostamente n e m não tem fatores primos em comum. Mas $\rho^2 = 2$ implica $n^2 = 2m^2$. Então n^2 é um número par. Consequentemente o próprio n é um número par. Então n^2 contem o fator 2 pelo menos duas vezes. ($n^2 = 4k$ com algum $k \in \mathbb{N}$). Então m^2 é também um número par e consequentemente m é um número par. Isto contradiz a hipótese de que n e m não têm fatores primos em comum.

Se queremos escrever o valor $d_{\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle}$ como um múltiplo numérico do valor $d_{\langle \mathrm{O},\mathrm{A}\rangle}$ temos que inventar um novo tipo de número. A idéia é de aproximar o valor com uma seqüência de números racionais e definir o novo número pela seqüência inteira. Mas há dois detalhes que precisam ser considerados: (a) nem todas as seqüências de números racionais servem para definir novos números e (b) diferentes seqüências podem definir um único número novo.

Podemos tomar conta do ponto (a) considerando apenas seqüências do tipo Cauchy, isto é seqüências $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ que satisfazem a condição

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(M \in \mathbb{N})\forall(n,m > M):\ \ |a_n - a_m| < \varepsilon \qquad (1.4.24)$$

e do ponto (b), declarando que duas seqüências $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são equivalentes se e somente se

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(M \in \mathbb{N})\forall(n > M):\ \ |a_n - b_n| < \varepsilon \qquad (1.4.25).$$

Os novos números (os números irracionais) podem então ser definidos como classes de equivalência destas seqüências de Cauchy.

Rejeitamos os axiomas de Hilbert porque eles não informam para o físico experimental de que se trata. Começamos a construção dos espaços físicos com objetos reais, mas imperfeitos. Mas logo estes objetos poluídos por imperfeições experimentais são mentalmente substituídos por idealizações. Os pontos ideais não têm extensão. Vamos exigir destes objetos idealizados que eles satisfaçam a seguinte condição: para cada par de pontos $\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle$ no espaço $\mathscr{E}_R$ de um referencial R e cada número natural n existe um ponto A_n tal que $n\, d_{\langle \mathrm{A},\mathrm{A}_n\rangle} = d_{\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle}$. Com esta hipótese podemos considerar seqüências e limites nos espaços $\mathscr{E}_R$, $\mathbb{D}_R$ e no espaço de valores de distância V_d. A multiplicação de valores com números irracionais é definida pelo limite dos valores que obtemos multiplicando com números racionais de uma seqüência que define o número irracional. O mapeamento módulo $|\ |: \mathbb{D}_R \to V_d$ é contínuo, o produto escalar também e os espaços $\mathscr{E}_R$, $\mathbb{D}_R$ e V_d são imaginados como espaços completos, isto é, neles todas as seqüências do tipo Cauchy têm limite. Poder-se-ia pensar que estas hipóteses servem apenas para satisfazer os sentimentos estéticos de alguns matemáticos. Ao final nunca podemos realizar seqüências infinitas no laboratório. Mas, surpreendentemente as noções mais importantes na física, a saber, derivada e integral dependem crucialmente destas hipóteses aparentemente tão esotéricas.