

## 1.5 Curvas, ângulos, co-seno e seno.

Com as considerações finais da secção anterior temos as noções de limite nos espaços físicos e espaços de valores de grandezas e com isto temos a noção de continuidade de mapeamentos. Lembramos das aulas de matemática que um mapeamento  $F$  é contínuo se podemos trocar a ordem de tomar limite e aplicar o mapeamento:

$F$  é contínuo  $\Leftrightarrow F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n)$ . Podemos então definir curvas contínuas.

Precisamos de uma grandeza unidimensional  $P$  para formar um *parâmetro de curva*. No espaço de valores  $V_P$  desta grandeza podemos sempre definir uma relação de ordem total compatível com a estrutura algébrica ( $a < b \Rightarrow a + c < b + c$  e  $(a < b \wedge \alpha < 0) \Rightarrow \alpha b < \alpha a$ ). Muitas vezes vamos simplesmente usar uma grandeza numérica tal que  $V_P = \mathbb{R}$ . Em  $V_P$  se define a noção de intervalo: Para  $a, b \in V_P$  define-se o intervalo fechado:

$$[a, b] \stackrel{Def.}{=} \{x \in V_P \mid a \leq x \leq b\} \quad (1.5.1)$$

o intervalo aberto

$$(a, b) \stackrel{Def.}{=} \{x \in V_P \mid a < x < b\} \quad (1.5.2),$$

e dois intervalos semi-abertos:

$$\text{aberto a direita} \quad [a, b) \stackrel{Def.}{=} \{x \in V_P \mid a \leq x < b\} \quad (1.5.3)$$

$$\text{aberto a esquerda} \quad (a, b] \stackrel{Def.}{=} \{x \in V_P \mid a < x \leq b\} \quad (1.5.4).$$

Uma *curva parametrizada* em  $\mathcal{E}_R$  é um mapeamento contínuo  $\gamma$  que mapeia algum intervalo  $[a, b]$  em  $\mathcal{E}_R$ ;  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{E}_R$ . A variável independente  $\lambda \in [a, b]$  deste mapeamento é chamada o parâmetro da curva. Os pontos  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  são chamados de início e fim da curva parametrizada respectivamente.

Pode-se trocar um parâmetro de curva por outro. Seja  $Q$  uma secunda grandeza unidimensional com ordem total compatível com a estrutura algébrica. Seja  $\chi$  um mapeamento contínuo e estritamente monotonamente crescente que mapeia um intervalo  $[c, d]$  de valores de  $Q$  no intervalo  $[a, b]$  da grandeza  $P$ :

$$\chi: [c, d] \rightarrow [a, b], \text{ contínuo e } \forall (\alpha, \beta \in [c, d]): (\alpha < \beta \Rightarrow \chi(\alpha) < \chi(\beta)) \quad (1.5.5).$$

Agora seja  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{E}_R$  uma curva parametrizada. A curva parametrizada  $\gamma \circ \chi$  será chamada uma *reparametrização* de  $\gamma$ . Vamos considerar duas curvas parametrizadas  $\gamma$  e  $\eta$  como equivalentes se uma delas poder ser escrita como reparametrização da outra. Pode-se mostrar que isto define realmente uma relação de equivalência. As classes de equivalência desta relação são chamadas de curvas. A curva (classe de equivalência) que contem a curva parametrizada  $\gamma$  será escrita como  $\boldsymbol{\gamma}$  (negrito). Início e fim de uma curva parametrizada são também chamados de início e fim da curva.

Queremos definir o comprimento de uma curva. Comprimento e distância são noções relacionadas, mas distintas. O comprimento de um segmento de reta é a distância dos pontos finais. Para curvas não retas podemos definir comprimento através de

aproximações da curva por segmentos retos. Seja  $\gamma$  uma curva e  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{E}_R^c$  uma curva parametrizada na classe  $\gamma$ . Uma seqüência finita  $\{\lambda_k\}_{k=0}^N$  de valores de parâmetro tal que  $\lambda_0 = a$ ,  $\lambda_N = b$ , e que  $\forall (n, m \in \{0, 1, 2, \dots, N\}) : (n < m \Rightarrow \lambda_n < \lambda_m)$  será chamada de partição do intervalo  $[a, b]$ . Para uma dada partição formamos a soma de distâncias de pontos consecutivos da curva com a intenção de aproximar o comprimento da curva:

$$\sum_{k=0}^{N-1} d_{\langle \gamma(\lambda_k), \gamma(\lambda_{k+1}) \rangle} \quad (1.5.6).$$

Este somatório depende apenas dos pontos  $\gamma(\lambda_k)$  e ele não muda com uma reparametrização da curva. Quando se adicionam mais pontos intermediários, para tornar a partição mais fina, o valor da soma não pode diminuir. Ela pode somente crescer ou ficar constante por causa da desigualdade de triângulo. (Exercício: exemplifique a situação com um desenho!) Este fato motiva definir o comprimento da curva como o supremo das somas de todas as possíveis partições:

$$\text{comprimento}(\gamma) \stackrel{\text{Def.}}{=} \sup_{\text{todas as partições}} \sum_{k=0}^{N-1} d_{\langle \gamma(\lambda_k), \gamma(\lambda_{k+1}) \rangle} \quad (1.5.7).$$

Nem sempre este supremum existe. Então nem todas as curvas têm um comprimento bem definido. Curvas com comprimento bem definido são chamadas curvas *retificáveis*.

Seja  $\gamma$  uma curva parametrizada com intervalo de parâmetro  $[a, b]$ . Para cada valor de parâmetro  $c \in [a, b]$  podemos definir uma curva parametrizada  $\gamma_c$  que é a restrição do mapeamento  $\gamma$  para o intervalo  $[a, c]$ . Para  $c = b$  obtemos a curva parametrizada  $\gamma$  original e para  $c = a$  obtemos uma curva degenerada que não sai do lugar inicial. O comprimento da curva  $\gamma_c$  visto como função de  $c$  será chamado de comprimento de arco e escrito com a letra  $s$ :

$$s(c) \stackrel{\text{def.}}{=} \text{comprimento}(\gamma_c) \quad (1.5.8).$$

Vale

$$\forall (c_1, c_2 \in [a, b]) : (c_1 < c_2 \Rightarrow s(c_1) \leq s(c_2)) \quad (1.5.9).$$

Se valer também a condição mais forte

$$\forall (c_1, c_2 \in [a, b]) : (c_1 < c_2 \Rightarrow s(c_1) < s(c_2)) \quad (1.5.10)$$

chamaremos a curva de *não estagnada*. Neste caso a função  $s$  tem função inversa e os valores de  $s$  podem ser usados como parâmetro de curva. Se  $L$  for o comprimento de  $\gamma$  a reparametrização  $\gamma(s^{-1}(\sigma))$  usa valores  $\sigma$  no intervalo  $[0, L]$ . Este tipo de parametrização de curva é frequentemente usada como uma parametrização padrão.

Um comprimento de curva sumamente importante é o comprimento da circunferência de um círculo. Este é proporcional ao diâmetro. A constante de proporcionalidade é chamada de  $\pi$ .

$$\text{Comprimento da circunferência de círculo de diâmetro } d = \pi d \quad (1.5.11)$$

Johann Heinrich Lambert<sup>1</sup> mostrou que  $\pi$  é irracional. Provavelmente o matemático e astrônomo indiano Aryabhata<sup>2</sup> já tinha consciência da irracionalidade de  $\pi$ . Lindemann<sup>3</sup>, baseado em trabalhos anteriores de Hermite<sup>4</sup>, mostrou que  $\pi$  é não apenas irracional mas também transcendental, o que significa que este número não pode ser escrito como solução de uma equação polinomial com coeficientes racionais.<sup>5</sup>

Agora vamos definir a grandeza ângulo. Vamos defini-la de tal forma que ela resulte ser uma grandeza linear. Isto significa que precisamos poder distinguir um valor de  $0^\circ$  do valor de  $360^\circ$  e também que valores positivos e negativos sejam definidos. Estas exigências podem ser satisfeitas com um domínio adequado da grandeza.

Para poder tomar conta dos sinais do ângulo, precisamos da noção de plano orientado. Qualquer plano  $\mathcal{P}$  no espaço  $\mathcal{E}_R$  do referencial  $R$  divide  $\mathcal{E}_R$  em três partes: o plano  $\mathcal{P}$  e dois semi-espacos  $\mathcal{E}_{R_1}, \mathcal{E}_{R_2}$  de tal forma que um semi-espaco não pode ser alcançado a partir do outro com uma curva sem passar pelo plano. Um plano orientado  $\overset{o}{\mathcal{P}}$  é um par  $\langle \mathcal{P}, \mathcal{E}_{R_k} \rangle$  que consiste de um plano e um dos seus semi-espacos. O

domínio da grandeza ângulo é o conjunto de quádruplos  $\langle \overset{o}{\mathcal{P}}, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, cv \rangle$  onde

$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  são semi-retas no plano  $\mathcal{P}$  que começam num mesmo ponto (que chamaremos o vértice do ângulo) e onde  $cv$  (cordão de voltas) é uma curva no plano  $\mathcal{P}$  que começa em algum ponto da primeira semi-reta e termina em algum ponto da segunda semi-reta e que nunca toca no vértice. Este cordão de voltas serve para contagem de voltas com o intuito de podermos distinguir, por exemplo, o valor de  $0^\circ$  do valor de  $360^\circ$ . (compare figura 1.5.1). As classes de equivalência podem ser definidas especificando as operações que mantêm ângulos constantes: translações e rotações dos objetos de ângulo, e deformações contínuas dos cordões de voltas sempre mantendo-os dentro do plano  $\mathcal{P}$  e sempre afastados do vértice. Uma rotação é um mapeamento  $\Gamma: \mathcal{E}_R \rightarrow \mathcal{E}_R$  que tem pelo menos um ponto fixo,  $\Gamma(P) = P$ , que conserva distâncias,  $\forall (A, B \in \mathcal{E}_R): d_{\langle A, B \rangle} = d_{\langle \Gamma A, \Gamma B \rangle}$ , e que pode ser deformado continuamente até se transformar no mapeamento identidade. As deformações contínuas dos cordões de voltas e dos mapeamentos  $\Gamma$  devem ser intuitivamente claros, mas no apêndice desta secção damos uma descrição matemática exata destas noções.

A soma de ângulos de dois objetos do domínio é construída trasladando e girando o segundo objeto de ângulo de tal forma que os dois objetos tenham o mesmo plano orientado, o mesmo vértice e tal que a primeira semi-reta do segundo objeto caia encima da segunda semi-reta do primeiro objeto. Depois rearranjamos os cordões de voltas de tal forma que o cordão do segundo objeto seja a continuação do cordão do primeiro. Finalmente eliminamos as semi-retas coincidentes e obtemos um novo objeto de ângulo que representa a soma dos ângulos. A figura 1.5.1 mostra um exemplo.

<sup>1</sup> Johann Heinrich Lambert (Mulhouse Alsace 1728 – 1777 Berlin) Matemático, Físico e Filósofo. Trabalhos sobre geometria, óptica geométrica, fotometria (lei de Lambert) e lógica. Ele foi o primeiro de usar o termo *fenomenologia*.

<sup>2</sup> Aryabhata (Sanskrit: आर्यभट ) (476–550)

<sup>3</sup> Carl Louis Ferdinand Lindemann (1852 – 1939)

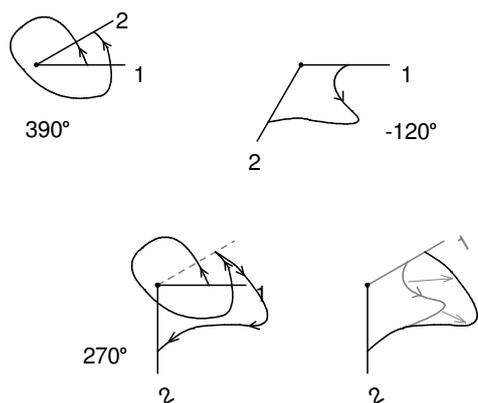
<sup>4</sup> Charles Hermite (1822 – 1901)

<sup>5</sup> Eli Maor: *e: The Story of a Number* Princeton University Press 1994

O ordenamento dos ângulos é definido tal que um cordão de volta que corre no sentido anti-horário para um observador que olha do lado do semi-espaco do plano orientado do objeto de ângulo corresponda a um ângulo positivo.

Podemos definir os valores de ângulo como as classes de equivalência. Vamos chamar o conjunto destes valores de  $V_{\mathcal{X}}^{class}$ . Usualmente a fração de  $1/360$  de uma volta completa<sup>6</sup> é usada como unidade e esta é chamada de grau e abreviada com o símbolo “°”.

Fig. 1.5.1 Objetos de ângulos e a determinação da soma de ângulos. O quarto desenho mostra o rearranjo do cordão do segundo objeto girado.



Em algum momento da história<sup>7</sup> alguém teve a idéia brilhante de acompanhar o cordão de voltas por uma curva circular com centro no vértice e quantificar o ângulo pela razão do comprimento (com sinal) desta curva e seu raio. Comprimento e raio tomam valores no mesmo espaço de valores e conseqüentemente a razão destes valores é um número puro. Isto significa que temos agora um segundo espaço de valores de ângulo que é simplesmente  $\mathbb{R}$ . Os números podem ser usados como

nomes alternativos de valores de ângulos e temos um mapeamento bijectivo que mapeia  $\mathbb{R}$  em  $V_{\mathcal{X}}^{class}$ . Este mapeamento  $K = 360^\circ / 2\pi$  é uma *constante fundamental*. Muitas constante fundamentais na Física são mapeamentos que identificam certos espaços de valores de grandezas. Com este segundo espaço de valores podemos verificar se dois objetos de ângulo são equivalentes e se um terceiro objeto de ângulo tem um valor de ângulo que é a soma dos valores de dois outros sem usarmos as regras originais de igualdade e soma de valores. Por esta razão podemos eliminar o espaço de valores original  $V_{\mathcal{X}}^{class}$ . Esta nova definição de ângulo é operacionalmente independente da primeira, mas ela define a mesma estrutura no conjuntos de objetos de ângulo.

Quando se especifica um ângulo pelo quociente de comprimento de arco e raio se escreve muitas vezes a unidade “rad”. Na verdade rad é simplesmente o número 1, mas rad aparece em declarações de ângulo para indicar para o leitor que aqui um número está sendo usado como nome de uma classe de objetos de ângulo. A especificação de ângulos em rad é a maneira científica padrão, a original de graus é mais usada na forma coloquial.

Podemos estender o domínio da grandeza ângulo para incluir pares de vetores deslocamento não nulos. Sejam  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{D}_R$  dois vetores com  $\vec{a} \neq 0$  e  $\vec{b} \neq 0$ . Podemos escolher um ponto arbitrário  $O \in \mathcal{E}_R$  e formar um plano  $\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{E}_R \mid \exists (\alpha, \beta \in R): \overrightarrow{OP} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\}$  e definir as semi-retas

<sup>6</sup> Uma volta completa significa que as semi-retas coincidem e o cordão de voltas dá uma volta.

<sup>7</sup> Hiparco (em grego: Ἱππάρχος, *Hipparkhos*) (190 a.C. — 120 a.C.) dividiu o círculo em 360 partes mas na sua tabela de cordas usou conceitualmente a quantificação de ângulos através de comprimento de arco.

$\mathcal{L}_1 = \{P \in \mathbb{C}_R \mid \exists(\alpha > 0): \overline{OP} = \alpha \vec{a}\}$  e  $\mathcal{L}_2 = \{P \in \mathbb{C}_R \mid \exists(\beta > 0): \overline{OP} = \beta \vec{b}\}$  dentro deste plano. Então temos quase um objeto de ângulo. Falta apenas uma orientação do plano e um cordão de voltas. A falta deste elementos acarretar uma ambigüidade do valor de ângulo de um par de vetores. O sinal do ângulo entre dois vetores não é definido e existe uma ambigüidade de múltiplos inteiros de  $2\pi$ . O fato de termos escolhido um ponto fixo  $P$  não importa, já que os valores de ângulo não mudam quando trasladamos objetos de ângulo.

O ângulo  $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$  entre dois vetores não muda quando substituirmos os vetores por vetores multiplicados com números positivos: para  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  vale

$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \sphericalangle(\alpha \vec{a}, \beta \vec{b})$ . O valor  $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$  também não muda quando girarmos ambos os vetores. Repare que um giro no espaço físico induz um mapeamento que leva vetores em vetores (compare com a Figura 1.5.2).

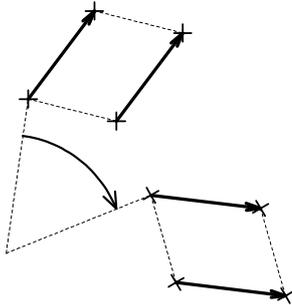


Fig. 1.5.2 Pares de pontos que eram equivalentes no sentido da grandeza deslocamento continuam equivalentes depois de submeter os pontos a um giro. Então um giro no espaço físico define um mapeamento de vetores.

Agora, a expressão numérica

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad (1.5.12)$$

tem exatamente as mesmas propriedades de invariância que os ângulos entre vetores. Concluimos que este número pode somente ser uma função do ângulo. Definimos a função co-seno:

$$\cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})) \stackrel{Def.}{=} \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad (1.5.13)$$

Por causa da ambigüidade de ângulos entre dois vetores devemos acompanhar esta definição com as condições

$$\forall(\alpha \in \mathbb{R}): \cos(\alpha) = \cos(-\alpha) \quad (1.5.14)$$

e

$$\forall(\alpha \in \mathbb{R}) \forall(n \in \mathbb{N}): \cos(\alpha) = \cos(\alpha + n 2\pi) \quad (1.5.15).$$

Com o seguinte teorema temos uma informação a respeito dos valores desta função:

**Teorema 1.5.1:** Para todos os vetores  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{D}_R$  vale

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \quad (1.5.16)$$

**Demonstração:** Trataremos dois casos separadamente: caso (a)  $\vec{b} = 0$ . Neste caso ambos os termos são zero e a desigualdade é satisfeita na forma de igualdade. Caso (b):  $\vec{b} \neq 0$ . Neste caso o vetor

$$\vec{c} \stackrel{\text{def.}}{=} \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \quad (1.5.17)$$

é bem definido. Calculamos o produto escalar deste vetor com  $\vec{b}$ :

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} (\vec{b} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} |\vec{b}|^2 = 0 \quad (1.5.18)$$

A fórmula (1.5.17) permite escrever  $\vec{a}$  como

$$\vec{a} = \vec{c} + \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \quad (1.5.19)$$

De acordo com (1.5.18), os dois vetores em (1.5.19), cuja soma resulta em  $\vec{a}$ , são ortogonais. Então vale, com o teorema de Pitágoras, que

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{c}|^2 + \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right|^2 \geq \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right|^2 = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} \quad (1.5.20)$$

Então temos

$$|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \geq |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 \quad (1.5.21)$$

Usando o fato que a raiz quadrada é uma função monotonamente crescente obtemos o resultado desejado;  $|\vec{a}| |\vec{b}| \geq |\vec{a} \cdot \vec{b}|$ . • A desigualdade (1.5.16) é conhecida como desigualdade de Cauchy<sup>8</sup>–Bunyakovsky<sup>9</sup>–Schwarz<sup>10</sup>.

Como consequência deste teorema concluímos:

$$\forall (\alpha \in \mathbb{R}): |\cos(\alpha)| \leq 1 \quad (1.5.22).$$

A figura 1.5.3 mostra o gráfico desta função no intervalo  $[-2\pi, 2\pi]$ .

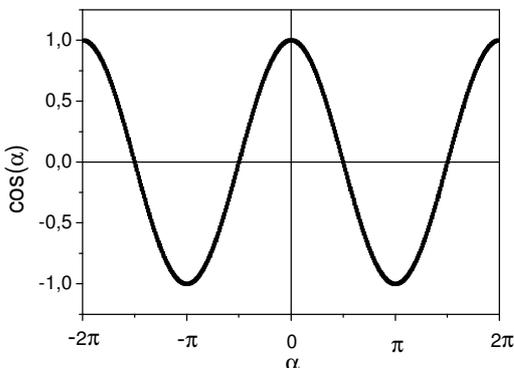


Fig. 2.5.3 Gráfico da função co-seno no intervalo  $[-2\pi, 2\pi]$ .

<sup>8</sup> Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857)

<sup>9</sup> Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (Russo: Виктор Яковлевич Буняковский; 1804 – 1889)

<sup>10</sup> Karl Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921)

Considere agora dois vetores  $\vec{b}_1$  e  $\vec{b}_2$  ortogonais do mesmo módulo  $b$  no plano do papel;  $\vec{b}_1 \perp \vec{b}_2$  e  $|\vec{b}_1| = |\vec{b}_2| = b$ . Vamos imaginar estes vetores tais que um giro de  $90^\circ$  (ou  $\pi/2$ ) de  $\vec{b}_1$  até  $\vec{b}_2$  parece para o leitor um giro no sentido anti-horário. Seja  $O$  um ponto fixo no plano do papel e  $P(\alpha)$  um ponto de uma curva parametrizada em forma de círculo de raio  $b$  e centro  $O$ . O parâmetro  $\alpha$  é o ângulo entre os vetores  $\vec{b}_1$  e  $\overrightarrow{OP}(\alpha)$  (compare com a Fig. 1.5.3). Costuma-se chamar este vetor de *vetor posição do ponto P* e se escreve com o símbolo  $\vec{r}$ . Vamos escrever o vetor posição na base  $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$

$$\vec{r} = x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2 \quad (1.5.23)$$

O produto escalar deste vetor com o vetor básico  $\vec{b}_1$  resulta em

$$\vec{b}_1 \cdot \vec{r} = xb^2 \quad (1.5.24)$$

Mas, como o raio do círculo era  $b$  temos

$$x = \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{r}}{b^2} = \frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{r}}{|\vec{b}_1||\vec{r}|} = \cos(\alpha) \quad (1.5.25)$$

Da mesma forma obtemos

$$y = \frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{r}}{b^2} = \frac{\vec{b}_2 \cdot \vec{r}}{|\vec{b}_2||\vec{r}|} = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.5.26)$$

Como curvas parametrizadas do tipo da figura 1.5.3 aparecem frequentemente e empenham um papel importante se justifica definir uma função específica para a dependência dos valores de  $y$  do ângulo  $\alpha$ :

$$\text{sen}(\alpha) \stackrel{\text{Def.}}{=} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.5.27)$$

Esta é a função seno<sup>11</sup>. O dobro dela foi tabelada por Hiparco como tabela de cordas. Do seno e co-seno se formam ainda as conhecidas funções tangente, co-tangente, secante e co-secante. Certamente as funções co-seno e seno também já eram velhas conhecidas dos leitores, mas definimo-las aqui de novo porque usamos uma abordagem diferente da geometria.

Do teorema de Pitágoras segue imediatamente que vale

$$\forall(\alpha \in \mathbb{R}): (\cos(\alpha))^2 + (\text{sen}(\alpha))^2 = 1 \quad (1.5.28)$$

---

<sup>11</sup> O nome seno (sinus = seio, mama, peito) foi introduzido por Gerardus Cremonensis (Gerhard von Cremona \* 1114 Cremona, Italia; † 1187 Toledo, Espanha) como tradução Latina da palavra Árabe جيب (jiba) (= seio, dobra, baía). De sua vez, esta palavra é uma tradução (errada) da palavra em Sanskrit ज्या (jyA) (= corda do arco), que era usada como abreviação de अर्धज्या (ardhajyA) (= metade da corda de arco). Tendo em vista a bela forma do gráfico da função seno a má tradução não resultou num nome impróprio. A função co-seno (seno complementar) foi introduzida na Europa pelo astrônomo Austríaco Georg von Peurbach (1423 Peurbach na Austria; † 1461 Vienna), mas ela já tinha sido usada na astronomia Hindu antiga na era Gupta (320 - 550) e se chamava कोटिज्या (koTijyA).

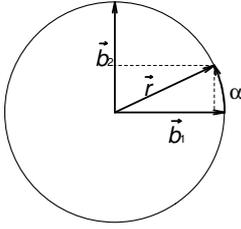


Fig. 1.5.3 Curva parametrizada circular com ângulo como parâmetro.

## Apêndice

### Deformações contínuas de cordões de voltas:

Sejam  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  semi-retas num plano  $\mathcal{P}$  que começam num ponto  $V$ . Sejam  $\gamma$  e  $\eta$  duas curvas em  $\mathcal{P}$  cujos pontos ficam todos dentro de  $\mathcal{P} \setminus \{V\}$  e que comecem em  $\mathcal{L}_1$  e terminem em  $\mathcal{L}_2$ . Definimos:  $\gamma$  pode ser deformado continuamente em  $\mathcal{P} \setminus \{V\}$  respeitando a limitação dos pontos iniciais e finais até se transformar em  $\eta$  se e somente se existir um mapeamento contínuo  $\sigma: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathcal{P} \setminus \{V\}$  tal que a curva parametrizada  $\sigma(\cdot, 0): [0,1] \rightarrow \mathcal{P} \setminus \{V\}$  pertence à classe  $\gamma$ , a curva parametrizada  $\sigma(\cdot, 1): [0,1] \rightarrow \mathcal{P} \setminus \{V\}$  pertence à classe  $\eta$  e tal que para todo  $\lambda \in [0,1]$  a curva parametrizada  $\sigma(\cdot, \lambda): [0,1] \rightarrow \mathcal{P} \setminus \{V\}$  tem ponto inicial em  $\mathcal{L}_1$  e ponto final em  $\mathcal{L}_2$ . A notação  $\sigma(\cdot, \lambda): [0,1] \rightarrow \mathcal{P} \setminus \{V\}$  com um ponto no argumento da função indica que se trata de um mapeamento que associa a cada valor da variável no lugar do ponto um valor imagem, enquanto o outro parâmetro  $\lambda$  tem um valor fixo. A topologia em  $[0,1] \times [0,1]$  (isto é a estrutura que determina convergência) é definida com qualquer norma, pois em espaços de dimensão finita as topologias induzidas por todas as normas são equivalentes.

### Deformações contínuas de isometrias com ponto fixo:

Seja  $P$  um ponto no espaço físico  $\mathcal{E}_R$  de um referencial  $R$ . Seja  $I_P$  o conjunto de todos os mapeamentos  $M: \mathcal{E}_R \rightarrow \mathcal{E}_R$  que conservam distâncias (isto é,  $\forall (A, B \in \mathcal{E}_R): d_{\langle A, B \rangle} = d_{\langle M(A), M(B) \rangle}$ ) e que mantêm o ponto  $P$  fixo (isto é,  $M(P) = P$ ). Sejam  $M_1$  e  $M_2$  dois elementos de  $I_P$ . Definimos a distância ente  $M_1$  e  $M_2$  como

$$D_{\langle M_1, M_2 \rangle} \stackrel{def.}{=} \sup_{\substack{A \in \mathcal{E}_R \\ d_{\langle P, A \rangle} \neq 0}} \frac{d_{\langle M_1(A), M_2(A) \rangle}}{d_{\langle P, A \rangle}} \quad (1.5.29)$$

Uma seqüência  $\{M_k\}_{k=0}^{\infty}$  de elementos em  $I_P$  converge em  $I_P$  se existir um elemento  $M \in I_P$  tal que  $\forall (\varepsilon > 0) \exists (N \in \mathbb{N}) \forall (n > N): D_{\langle M, M_k \rangle} < \varepsilon$ . Com isto temos a noção de mapeamentos contínuos que mapeiam o intervalo  $[0,1]$  em  $I_P$ . Então

podemos definir: um elemento  $M_1$  de  $I_p$  pode ser deformado continuamente num elemento  $M_2$  em  $I_p$  se e somente se existir um mapeamento contínuo  $K : [0,1] \rightarrow I_p$  tal que  $K(0) = M_1$  e  $K(1) = M_2$ . Deformabilidade contínua em  $I_p$  é uma relação de equivalência definida em  $I_p$ . Mais tarde veremos que  $I_p$  tem exatamente duas classes de equivalência. A classe que contém o mapeamento identidade é o conjunto das rotações por volta do ponto  $P$ .