1.6 Outros vetores e escalares.

Quando escrevemos um vetor deslocamento $\vec{a}$ como combinação linear de vetores básicos, criamos três grandezas unidimensionais a_1, a_2, a_3 que são os números que multiplicam os vetores básicos:

$$\vec{a} = a_1\vec{b}_1 + a_2\vec{b}_2 + a_3\vec{b}_3 \tag{1.6.1}$$

Cada uma destas três grandezas depende do vetor $\vec{a}$. Porém, elas dependem não somente do vetor $\vec{a}$ mas também da escolha da base $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$. Quando mudarmos a base os números a_1, a_2, a_3 mudam contravariantemente para manter o vetor $\vec{a}$ invariante. Outras grandezas unidimensionais não têm este tipo de comportamento. Por exemplo, a massa não depende de forma alguma da nossa escolha da base no espaço $\mathbb{D}_R$. Também o módulo de um vetor não depende da escolha da base (excluído o caso que o vetor do qual estamos falando é justamente um dos vetores básicos). As grandezas unidimensionais que não dependem da escolha de base no espaço $\mathbb{D}_R$ vamos chamar de *escalares*. Todas as grandezas físicas que resultam da multiplicação ou divisão da grandeza vetor deslocamento por uma grandeza escalar vamos chamar de *vetor*, ou mais precisamente de *tri-vetor* (mais tarde, na Teoria da Relatividade vocês conhecerão ainda *quadri-vetores*).

> *Escalares* são todas as grandezas unidimensionais que não dependem da escolha de base no espaço de vetores $\mathbb{D}_R$.
>
> *Vetores* são todas as grandezas em forma de produto de um escalar com a grandeza vetor deslocamento.

Estas definições são válidas para boa parte da Física, somente na Teoria da Relatividade temos que modificá-las.

Mais tarde veremos ainda como definir duração temporal. De forma um tanto imprecisa falamos simplesmente *tempo*. A unidade de tempo mais usada na física é o segundo (s), que originalmente era ligada à duração de um dia e que atualmente é definida como duração de um número enorme de oscilações de certo tipo de átomo. Se dividirmos a grandeza vetor deslocamento, que descreve um deslocamento de uma partícula, pelo tempo que transcorreu durante o deslocamento, obtemos a grandeza velocidade. Vamos chamar o conjunto de valores desta grandeza de $\mathbb{V}_R$, o *espaço vetorial de velocidades*. Se a velocidade de uma partícula muda durante um tempo δt, podemos dividir a diferença de velocidades pelo δt, e a grandeza resultante chamamos de aceleração. Os valores desta grandeza formam outro espaço vetorial $\mathbb{A}_R$. Multiplicação pela massa leva a outro espaço vetorial $\mathbb{F}_R$, o espaço das forças. Desta maneira podemos formar uma infinidade de grandezas vetoriais. Todas estas grandezas são tridimensionais. Mas os espaços $\mathbb{D}_R$, $\mathbb{V}_R$, $\mathbb{A}_R$, $\mathbb{F}_R$,..... são diferentes. Por exemplo, uma força não corresponde a um par de pontos $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$. Mas podemos usar o espaço $\mathbb{D}_R$ para representar vetores dos outros espaços simbolicamente. Por exemplo, no caso das forças, podemos multiplicá-las com um valor de $1\mathrm{s}^2/\mathrm{kg}$ e transformá-las em vetores do espaço $\mathbb{D}_R$ e desenhá-las como setas. Podemos também usar outro valor, por exemplo,

$500\,\mathrm{s^2/kg}$ ou $10^{-6}\,\mathrm{s^2/kg}$ para obter um desenho de tamanho razoável capaz de mostrar as forças do nosso interesse. Este tipo de transformação de vetores do espaço $\mathbb{F}_R$ em vetores do espaço $\mathbb{D}_R$ é feita em *digramas de força*. Diagramas de velocidades, de campos elétricos etc. são obtidos analogamente.

Os espaços $\mathbb{D}_R$, $\mathbb{V}_R$, $\mathbb{A}_R$, $\mathbb{F}_R$,..... são todos diferentes. Não podemos somar um vetor do espaço $\mathbb{D}_R$ e um vetor de algum outro espaço $\mathbb{V}_R$ ou $\mathbb{A}_R$ ou $\mathbb{F}_R$ ..... Por esta razão nossa definição de produto escalar que demos com a fórmula (1.4.6) não permite multiplicar vetores de diferentes espaços. Mas de fato estes produtos são usados frequentemente. Temos que dar uma definição específica para este caso. Sejam V_1 e V_2 dois espaços vetoriais. Pela nossa definição de vetor os elementos destes espaços podem ser escritos como produtos de vetores do espaço $\mathbb{D}_R$ e escalares apropriados:

$$\text{Para} \quad \vec{v}_1 \in V_1 \ \text{ e } \ \vec{v}_2 \in V_2 : \qquad \vec{v}_1 = \alpha \vec{d}_1 \ \text{ e } \ \vec{v}_2 = \beta \vec{d}_2 \tag{1.6.2}$$

onde $\vec{d}_1 \in \mathbb{D}_R$ e $\vec{d}_2 \in \mathbb{D}_R$ e α e β são valores de grandezas escalares. Para $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ o produto escalar é bem definido pela fórmula (1.4.6). Então podemos definir o produto de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \underset{Def.}{=} \alpha\beta\, \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \tag{1.6.3}$$

Com isto estendemos o produto escalar para todos os vetores. Podemos também estender a definição de módulo. Para qualquer vetor $\vec{v}$ definimos:

$$\left|\vec{v}\right| \underset{Def.}{=} +\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \tag{1.6.4}$$

Com a extensão do produto escalar podemos definir ângulos entre vetores de diferentes espaços. A função co-seno, vista como função em todo $\mathbb{R}$, não tem inversa, mas como a noção de ângulo entre vetores é de qualquer maneira ambígua (sinal e múltiplos inteiros de 2π) podemos falar sem problemas da função inversa admitindo a mesma ambigüidade dos seus valores. Esta função inversa é chamada arco-co-seno e é escrita como arccos(). Com ela podemos definir o âgnulo entre quaisquer vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$$\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) \underset{Def.}{=} \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\,\left|\vec{b}\right|}\right) \tag{1.6.5}$$

É curioso que não podemos somar vetores de diferentes espaços vetoriais, mas podemos comparar direções de vetores de diferentes espaços. Os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ têm a mesma direção se $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\,\left|\vec{b}\right|$.

Vamos ainda introduzir um espaço vetorial que não corresponde a nenhuma das grandezas importantes da mecânica como velocidade, força etc., mas que, digamos, serve para todos estes “senhores importantes”. É assim dizer uma praça pública para todos eles. É o espaço vetorial que obtemos dividindo os vetores de $\mathbb{D}_R$ por alguma distância. Vamos chamá-lo de *espaço universal* e escrevê-lo como $\mathbb{U}_R$. Os vetores deste espaço têm módulos que são números. Se multiplicarmos um vetor deste espaço por um módulo de uma grandeza vetorial, obtemos um vetor desta grandeza. Por exemplo, se multiplicarmos um vetor de $\mathbb{U}_R$ por 1kg m/s^2 obtemos um vetor força. Podemos formar vários vetores força desta forma e escrever um vetor força qualquer como soma destes. Podemos fazer isto logo de forma mais sistemática escolhendo uma base $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ no espaço $\mathbb{U}_R$ e escrever as forças na forma

$$\vec{F} = F_1\,\vec{b}_1 + F_2\,\vec{b}_2 + F_3\,\vec{b}_3 \qquad (1.6.6)$$

As grandezas F_1, F_2, F_3 são unidimensionais, mas elas não são escalares, porque elas dependem da escolha da base[1]. Os valores destas grandezas podem ser escritos como um número vezes uma unidade; no caso das forças, uma unidade seria kg m/s^2. Desta forma podemos expressar todas as grandezas vetoriais com a mesma base:

$$Velocidade = \vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + v_3\vec{b}_3$$

$$aceleração = \vec{a} = a_1\vec{b}_1 + a_2\vec{b}_2 + a_3\vec{b}_3$$

$$momento\ linear = \vec{p} = p_1\vec{b}_1 + p_2\vec{b}_2 + p_3\vec{b}_3$$

etc.

As grandezas unidimensionais v_k, a_k, p_k,..... (com k = 1,2,3) chamamos de *componentes dos vetores* $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{p}$ *na base* $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$. As componentes levam a unidade do módulo da grandeza. No caso da velocidade m/s, da aceleração m/s^2, do momento linear kg m/s etc. .

No espaço universal $\mathbb{U}_R$ existem escolhas de base especialmente práticas. Vamos escolher a base $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ tal que valham as seguintes igualdades:

$$\begin{array}{lll} \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 = 1 \quad , & \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = 1 \quad , & \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_3 = 1 \\ \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0 \quad , & \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 = 0 \quad , & \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 = 0 \end{array} \qquad (1.6.7)$$

Podemos escrever estas igualdades de forma compacta com o símbolo de Kronecker[2]

$$\delta_{nm} \underset{Def.}{=} \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = m \\ 0 & \text{se} \quad n \neq m \end{cases} \qquad (1.6.8).$$

As seis igualdades aparecem na forma de uma:

$$\vec{b}_n \cdot \vec{b}_m \;=\; \delta_{nm} \qquad (1.6.9)$$

Uma base que cumpre esta condição é chamada de *base ortonormal*. A palavra ortonormal é a junção de ortogonal e normalizado. O uso de uma base ortonormal facilita o cálculo das componentes. Imagina que queremos saber quanto vale a componente 2 de um vetor $\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + v_3\vec{b}_3$ onde $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ é uma base

[1] A escolha de base em $\mathbb{U}_R$ é naturalmente equivalente a uma escolha de base em $\mathbb{D}_R$.

[2] Leopold Kronecker (1823 – 1891)

ortonormal. Para descobrir isto podemos multiplicar o vetor com o vetor básico $\vec{b}_2$. O resultado é

$$\begin{aligned} \vec{b}_2 \cdot \vec{v} = \vec{b}_2 \cdot \left(v_1 \vec{b}_1 + v_2 \vec{b}_2 + v_3 \vec{b}_3 \right) & \underset{\substack{\uparrow \\ liearidade}}{=} \\ = \quad v_1 \underbrace{\left(\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 \right)}_{=0} + v_2 \underbrace{\left(\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 \right)}_{=1} + v_2 \underbrace{\left(\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_3 \right)}_{=0} & \quad = \quad v_2 \end{aligned} \tag{1.6.10}$$

Em forma geral obtemos a componente k do vetor multiplicando com o vetor básico número k:

$$\vec{b}_k \cdot \vec{v} = \vec{b}_k \cdot \sum_{l=1}^{3} v_l \vec{b}_l \quad \underset{\substack{\uparrow \\ liearidade}}{=} \quad \sum_{l=1}^{3} v_l \delta_{lk} \quad = \quad v_k \tag{1.6.11}$$

Também, o produto escalar de vetores e o módulo de um vetor ficam numa forma muito simples quando expressamos os vetores numa base ortonormal. O leitor não familiarizado com este formalismo deve comprovar as seguintes fórmulas

$$\vec{v} \cdot \vec{w} \quad = \quad \sum_{k=1}^{3} v_k w_k \tag{1.6.12}$$

e

$$\left| \vec{v} \right|^2 = \sum_{k=1}^{3} \left(v_k \right)^2 \tag{1.6.13}$$

onde $\vec{v} = v_1 \vec{b}_1 + v_2 \vec{b}_2 + v_3 \vec{b}_3$ e $\vec{w} = w_1 \vec{b}_1 + w_2 \vec{b}_2 + w_3 \vec{b}_3$ são vetores escritas numa base ortonormal $\left\{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \right\}$.