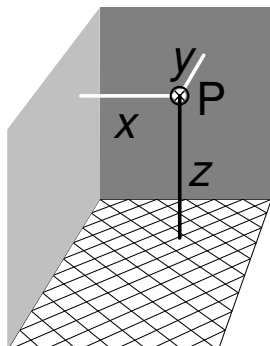


1.7 Coordenadas e diferenciais

Fig. 1.7.1 Coordenadas definidas com distâncias dos pontos aos paredes do laboratório,



Muitos objetos podem ser caracterizados com a ajuda de grandezas físicas a pesar de não serem grandezas. Um exemplo desta situação é fornecido pelos pontos do espaço físico \mathcal{E}_R de um referencial R . Um ponto não é uma grandeza, mas podemos escolher n grandezas unidimensionais G_1, G_2, \dots, G_n com correspondentes espaços de valor V_1, V_2, \dots, V_n e n funções $K_k : \mathcal{E}_R \rightarrow V_k$ definidas por algum procedimento experimental de tal forma que cada n -upla¹ $\langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$ de valores determina um ponto P em

\mathcal{E}_R de maneira única pelas condições $K_1(P) = g_1, K_2(P) = g_2, \dots, K_n(P) = g_n$. Um sistema de funções que caracteriza pontos desta maneira e que satisfaz, além disso, certas condições de simplicidade (as quais discutiremos em seguida) é chamado de *sistema de coordenadas*.

Um exemplo de sistema de coordenadas é fornecido pelas distâncias dos pontos às paredes do laboratório, permitindo também valores negativos dependendo de qual lado da parede que o ponto fica. O domínio original de distância era o conjunto de pares de pontos. Mas, podemos estender o domínio incluindo pares de planos e pontos. A distância de um ponto P a um plano \mathcal{P} definimos como a menor distância entre P e pontos do plano \mathcal{P} .

Podemos construir o mesmo tipo de sistema de coordenadas com a ajuda da linguagem vetorial que foi introduzida nas secções 1.4 – 1.6. Para isto escolhemos algum ponto fixo no espaço físico \mathcal{E}_R , que chamaremos de origem, e atribuímos a este ponto o símbolo O . Com este ponto podemos associar um vetor

$$\vec{r}(P) \stackrel{\text{Def.}}{=} \overline{OP} \quad (1.7.1)$$

a cada ponto P . Este vetor será chamado de *vetor posição do ponto P* . Quando é claro de qual ponto se trata vamos também omitir a indicação “(P)” e escrever somente \vec{r} . Agora vamos escolher uma base ortonormal $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ no espaço universal \mathbb{U}_R . É costume substituir a usual seta por um acento circunflexo para indicar que se trata de um vetor com módulo 1. Então quando lermos um vetor com circunflexo sabemos automaticamente que ele é um vetor do espaço \mathbb{U}_R , pois vetores de outros espaços não podem ter um módulo 1. Escrevendo o vetor posição na base $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ geramos três valores no espaço de valor da grandeza distância, e estes servem como um sistema de coordenadas:

¹ Uma k -upla é uma seqüência ordenada de k elementos. Esta noção é uma generalização do par ordenado, podendo ter mais de dois elementos e podendo ter como número de elementos uma variável qualquer como n, k , ou qualquer outra letra.

$$\vec{r}(\mathbf{P}) = x(\mathbf{P})\hat{x} + y(\mathbf{P})\hat{y} + z(\mathbf{P})\hat{z} \quad (1.7.2)$$

De novo, quando é evidente de qual ponto estamos falando, omitiremos a indicação “(P)”:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (1.7.3)$$

Sistemas de coordenadas construídos desta forma com uma base ortonormal se chamam *coordenadas Cartesianas*.

Para conhecermos o conceito de sistema de coordenadas de forma mais completa exploraremos agora possíveis alternativas não muito viáveis a título de contra-exemplo. Primeiro podemos pensar em acrescentarmos mais coordenadas. Poderíamos usar uma quarta coordenada, por exemplo, o módulo do vetor posição. Mas, logo se percebe que esta quarta coordenada não traz nenhum benefício, pois a tarefa de localizar os pontos no espaço já é perfeitamente resolvida com as coordenadas x , y e z . Será que esta tarefa poder-se-ia resolver com menos de três grandezas? Surpreendentemente isto é de fato possível. Vamos escrever os valores das coordenadas x , y e z em termos de alguma unidade de distância, por exemplo como múltiplos do metro:

$$x = x^* \text{ m}, \quad y = y^* \text{ m}, \quad z = z^* \text{ m}, \quad (1.7.4)$$

Podemos escrever cada um dos números x^* , y^* e z^* em forma decimal:

$$\begin{aligned} x^* &= \dots x_2^* x_1^* x_0^*, x_{-1}^* x_{-2}^* x_{-3}^* x_{-4}^* \dots \\ y^* &= \dots y_2^* y_1^* y_0^*, y_{-1}^* y_{-2}^* y_{-3}^* y_{-4}^* \dots \\ z^* &= \dots z_2^* z_1^* z_0^*, z_{-1}^* z_{-2}^* z_{-3}^* z_{-4}^* \dots \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

Destes três números decimais, podemos formar um único número decimal

$$\zeta \stackrel{\text{def.}}{=} \dots z_2^* y_2^* x_2^* z_1^* y_1^* x_1^* z_0^* y_0^* x_0^*, z_{-1}^* y_{-1}^* x_{-1}^* z_{-2}^* y_{-2}^* x_{-2}^* \dots \quad (1.7.6).$$

Inversamente, podemos determinar três números x^* , y^* e z^* para cada valor de ζ :

$$\begin{aligned} x^* &= \dots \zeta_6 \zeta_3 \zeta_0, \zeta_{-3} \zeta_{-6} \zeta_{-9} \dots \\ y^* &= \dots \zeta_7 \zeta_4 \zeta_1, \zeta_{-2} \zeta_{-5} \zeta_{-8} \dots \\ z^* &= \dots \zeta_8 \zeta_5 \zeta_2, \zeta_{-1} \zeta_{-4} \zeta_{-7} \dots \end{aligned} \quad (1.7.7).$$

Cada valor de ζ determine uma terna de valores x^* , y^* e z^* de forma única e, de sua vez, esta terna determina um ponto no espaço físico de forma única. Então resolvemos a tarefa de caracterizar os pontos do espaço com os valores de uma única grandeza unidimensional ζ .

Mas, o espaço físico não é apenas um conjunto de pontos. Ele tem também uma estrutura geométrica. Evidentemente as coordenadas Cartesianas têm uma relação simples com esta estrutura. Contrariamente, na localização dos pontos através da grandeza ζ esta estrutura ficou despedaçada ou picada até ficar completamente irreconhecível. Para a construção de coordenadas, não vamos tolerar este tipo de localização de pontos.

Então temos que especificar quais são as exigências de simplicidade que um sistema de coordenadas deva satisfazer. Para fazer isto vamos primeiramente juntar as grandezas G_1, G_2, \dots, G_n que fazem parte do sistema de coordenadas K_1, K_2, \dots, K_n numa única

grandeza \mathbf{G} . Podemos arrumar os n valores de uma n -upla $\langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$ numa matriz coluna

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n \end{pmatrix} \quad (1.7.8)$$

e definir a soma deste objetos da forma usual

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} \stackrel{Def.}{=} \begin{pmatrix} g_1 + f_1 \\ g_2 + f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n + f_n \end{pmatrix} \quad (1.7.9)$$

Isto define a nova grandeza \mathbf{G} que tem um espaço de valores de n dimensões que é a soma direta dos espaços V_1, V_2, \dots, V_n .

$$V_{\mathbf{G}} = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n \quad (1.7.10)$$

O sistema de coordenadas pode ser expresso por um mapeamento $\mathbf{K}: \mathcal{E}_R \rightarrow V_{\mathbf{G}}$ tal que

$$\mathbf{K}(P) = \begin{pmatrix} K_1(P) \\ K_2(P) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ K_n(P) \end{pmatrix} \quad (1.7.11)$$

Na verdade vamos ser até menos exigentes. Um sistema de coordenadas não precisa funcionar necessariamente para todo o espaços \mathcal{E}_R . Basta que a função \mathbf{K} seja definida em algum subconjunto aberto \mathcal{A} de \mathcal{E}_R ; $\mathbf{K}: \mathcal{A} \rightarrow V_{\mathbf{G}}$. Então este sistema de coordenadas funcionaria apenas dentro de \mathcal{A} . Agora imagine um ponto P_0 qualquer em \mathcal{A} . Para pontos P numa pequena vizinhança de P_0 vamos exigir que a variação dos valores de \mathbf{K} possa ser aproximada por uma função linear e bijetiva do vetor deslocamento $\overline{P_0P}$. Temos que explicar o que queremos dizer com essa exigência.

The two points P_0 and P determine two n -tuples of values of the coordinates:

$$P_0 \rightarrow \begin{pmatrix} K_1(P_0) \\ K_2(P_0) \\ \vdots \\ K_n(P_0) \end{pmatrix} = \mathbf{K}(P_0) \quad , \quad P \rightarrow \begin{pmatrix} K_1(P) \\ K_2(P) \\ \vdots \\ K_n(P) \end{pmatrix} = \mathbf{K}(P) \quad (1.7.12)$$

The value space $V_{\mathbf{G}} = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$ is a linear space and so the difference $\mathbf{K}(P) - \mathbf{K}(P_0)$ is well defined. On the other hand we can form the displacement vector $\overline{P_0P}$ of the two points P_0 and P . So the tours that start at point P_0 and ends at point P define a mapping of a vector space \mathbb{D}_R into the linear space $V_{\mathbf{G}}$. We could require from our coordinates that this mapping is always linear. Poderíamos exigir das nossas coordenadas que este mapeamento seja sempre linear. But this would be a very strong requirement. Let us be a little more generous and require only that linearity is valid as a limiting case when the point P approaches the point P_0 . This can be formulated in a formal way as follows:

For any $\vec{a} \in \mathbb{D}_R$ and $\varepsilon \in \mathbb{R}$ with $\varepsilon \neq 0$ let $P_{\vec{a},\varepsilon}$ be the point such that $\varepsilon\vec{a} = \overline{P_0P_{\vec{a},\varepsilon}}$. Then we require that there exists a linear mapping $d\mathbf{K}_{P_0} : \mathbb{D}_R \rightarrow V_{\mathbf{G}}$, which we shall call the differential of the function \mathbf{K} , so that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\{\mathbf{K}(P_{\vec{a},\varepsilon}) - \mathbf{K}(P_0)\} - d\mathbf{K}_{P_0}[\varepsilon\vec{a}]}{\varepsilon} = 0 \quad (1.7.13)$$

for all $\vec{a} \in \mathbb{D}_R$. Nesta fórmula escrevemos a aplicação do mapeamento linear $d\mathbf{K}_{P_0}$ no vetor $\varepsilon\vec{a}$ como $d\mathbf{K}_{P_0}[\varepsilon\vec{a}]$. Se esta condição for válida em todo o domínio \mathcal{A} da função \mathbf{K} chamaremos a função de diferenciável. Na secção 1.2 mencionamos que os mapeamentos lineares podem ser escritos como multiplicações. Então se conseguirmos escrever um $d\mathbf{K}_{P_0}[\varepsilon\vec{a}]$ na forma de algum produto $d\mathbf{K}_{P_0}[\varepsilon\vec{a}] = \mathbf{K}'_{P_0} \odot \varepsilon\vec{a}$ chamaremos o objeto \mathbf{K}'_{P_0} de derivada da função \mathbf{K} no ponto P_0 .

Para um sistema de coordenadas vamos exigir não apenas que estes mapeamentos lineares $d\mathbf{K}_{P_0}$ existam, mas também que eles sejam bijetivas.

Veremos o exemplo das coordenadas Cartesianas. Neste caso o mapeamento linear $d\mathbf{K}_{P_0}$ não é apenas uma aproximação linear, mas a própria diferença $\mathbf{K}(P_{\varepsilon\vec{a}}) - \mathbf{K}(P_0)$ depende linearmente do vetor $\varepsilon\vec{a}$. Então para o caso cartesiano temos:

$$d\mathbf{K}_{P_0}^{\text{Cartesiano}}[\varepsilon\vec{a}] = \mathbf{K}^{\text{Cartesiano}}(P_{\varepsilon\vec{a}}) - \mathbf{K}^{\text{Cartesiano}}(P_0) = \begin{pmatrix} \varepsilon\vec{a} \cdot \hat{x} \\ \varepsilon\vec{a} \cdot \hat{y} \\ \varepsilon\vec{a} \cdot \hat{z} \end{pmatrix} \quad (1.7.14)$$

O valor $\varepsilon\vec{a} \cdot \hat{x}$ é a mudança que a coordenada x sofre quando nos deslocarmos do ponto P_0 até o ponto $P_{\varepsilon\vec{a}}$. Podemos escrever este valor como a aplicação do

mapeamento linear dx no vetor $\varepsilon \vec{a}$. Isto é $\varepsilon \vec{a} \cdot \hat{x} = dx[\varepsilon \vec{a}]$. Analogamente podemos escrever as demais componentes como aplicações de diferenciais; $\varepsilon \vec{a} \cdot \hat{y} = dy[\varepsilon \vec{a}]$ e $\varepsilon \vec{a} \cdot \hat{z} = dz[\varepsilon \vec{a}]$. Então no caso Cartesiano temos

$$d\mathbf{K}_{P_0}^{\text{Cartesiano}} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (1.7.15)$$

Para um sistema de coordenadas qualquer temos

$$d\mathbf{K}_{P_0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_1}{\partial x} dx + \frac{\partial K_1}{\partial y} dy + \frac{\partial K_1}{\partial z} dz \\ \frac{\partial K_2}{\partial x} dx + \frac{\partial K_2}{\partial y} dy + \frac{\partial K_2}{\partial z} dz \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial K_n}{\partial x} dx + \frac{\partial K_n}{\partial y} dy + \frac{\partial K_n}{\partial z} dz \end{pmatrix} \quad (1.7.16)$$

Nesta expressão as derivadas parciais são todas calculadas no ponto P_0 . Na verdade as funções K_1, K_2, \dots, K_n eram definidas no espaço físico \mathcal{E}_R e não no espaço de ternas de valores de distâncias. Mas, como cada terna de valores $\langle x, y, z \rangle$ determina um ponto $P_{\langle x, y, z \rangle} \in \mathcal{E}_R$ de maneira única, podemos definir derivadas parciais em relação a x, y e z de uma função definida em \mathcal{E}_R ;

$$\frac{\partial F}{\partial x} \stackrel{\text{Def.}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(P_{\langle x+\varepsilon, y, z \rangle}) - F(P_{\langle x, y, z \rangle})}{\varepsilon} \quad (1.7.17)$$

e as derivadas $\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial z}$ analogamente. A exigência que $d\mathbf{K}_{P_0}$ seja bijetiva para um sistema de coordenadas implica imediatamente que o número de coordenadas tem que ser três. Com isto eliminamos qualquer coordenadas redundantes. A exigência de linearidade local elimina estas picotagens que fizemos no nosso contra-exemplo (1.7.7). Veremos um exemplo de sistemas importante de coordenadas.

Coordenadas esféricas.

Como no caso das coordenadas Cartesianas, escolhemos uma origem O no espaço \mathcal{E}_R e caracterizamos um ponto P pelo seu vetor posição. Mas este vetor não caracterizamos pelas componentes na base $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$, mas pelo seu módulo

$r \stackrel{\text{Def.}}{=} |\vec{r}|$, pelo ângulo entre \vec{r} e \hat{z} e pelo ângulo que a projeção ortogonal do vetor \vec{r} no plano x - y faz com o vetor \hat{x} .

$$r \stackrel{\text{def.}}{=} |\vec{r}|, \quad \theta \stackrel{\text{def.}}{=} \sphericalangle(\hat{z}, \vec{r}), \quad \varphi \stackrel{\text{def.}}{=} \sphericalangle(\hat{x}, \{\vec{r} - \hat{z}(\hat{z} \cdot \vec{r})\}) \quad (1.7.18)$$

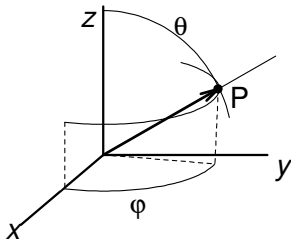
Como os pontos do espaço \mathcal{E}_R tem uma relação um a um com os ternas de valores $\langle x, y, z \rangle$ podemos escrever as coordenadas r, θ, φ como funções de x, y e z ou inversamente, podemos escrever x, y e z em termos de r, θ e φ . Aqui damos esta segunda transformação:

$$\begin{aligned} x &= r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y &= r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z &= r \cos(\theta) \end{aligned} \quad (1.7.19)$$

E podemos escrever o próprio vetor posição em termos das coordenadas r, θ e φ :

$$\vec{r} = \hat{x} r \sin(\theta) \cos(\varphi) + \hat{y} r \sin(\theta) \sin(\varphi) + \hat{z} r \cos(\theta) \quad (1.7.20)$$

Fig. 1.7.2 Coordenadas esféricas.



Para um sistema de coordenadas \mathbf{K} podemos definir sistemas de bases vetoriais associadas pelas derivadas parciais do vetor posição escritos como função dos valores g_1, g_2 e g_3 das coordenadas.

$$\vec{K}_i \stackrel{\text{def.}}{=} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial g_i} \right)_{g_{\text{não } i}} \quad (1.7.21)$$

Nesta fórmula o índice $g_{\text{não } i}$ significa que a derivada parcial deve ser tomada considerando os valores das coordenadas que não são a coordenada K_i como constantes. Repare que este sistema de vetores básicos em geral dependo do ponto. Sistemas de coordenadas que resultam em bases associadas de vetores ortogonais são chamados de coordenadas ortogonais. Estas são sistemas de coordenadas nas quais as *linhas de coordenadas* se cruzam sempre de forma perpendicular. Isto é o caso das coordenadas esféricas. As *linhas de coordenadas* são as linhas que obtemos variando uma das coordenadas e mantendo as outras duas constantes. A figura 1.7.2 mostra as três linhas de coordenadas que passam pelo ponto representativo P.

Para sistemas de coordenadas ortogonais vale o esforço de normalizar os vetores básicos associados. Para coordenadas não ortogonais isto não faria muito sentido. Então define-se para coordenadas ortogonais bases ortonormais:

$$\hat{K}_i \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial g_i} \right)}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial g_i} \right|} \quad (1.7.22)$$

Exercício:

- (a) Calcule as bases ortonormais $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}\}$ expressando estes vetores na base original $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$.
- (b) Mostre que esta base é ortonormal (ou melhor, estas bases são ortonormais, pois a base depende da posição e então são várias bases).
- (c) Imagina que uma partícula se move e este movimento é descrito por uma função $\vec{r}(t)$. Escreva $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = d\vec{r}/dt$ e $\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t)$ em termos das grandezas $r, \theta, \phi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \ddot{r}, \ddot{\theta}, \ddot{\phi}, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$.
- (d) Faça os mesmos cálculos para coordenadas cilíndricas P, ϕ, z (a primeira letra é um ρ maiúsculo) que se relacionam com as coordenadas Cartesianas da seguinte maneira: $x = P \cos(\phi)$, $y = P \sin(\phi)$ e z inalterada.