1.8 O tempo

Começamos a discussão sobre espaço com uma crítica da primeira lei de Newton. Esta lei afirma que partículas pontuais livres mostram um movimento retilíneo uniforme ou ficam paradas. Já na questão da forma da trajetória encontramos dificuldades. Nossa análise mostrou que não existe **o** espaço físico, mas existem espaços físicos. Em geral um movimento que resulta numa trajetória reta num referencial resulta numa trajetória curva em outro. Imagine uma destas mesas sem atrito que encontramos em certos centros de jogos. Imagine que instalemos uma filmadora acima de uma destas mesas e lançamos um disco na mesa. A filmadora registrará uma trajetória reta do disco. Mas se filmarmos este mesmo movimento com uma filmadora montada num carrinho que possui um movimento acelerado em relação à primeira filmadora a trajetória registrada nesta segunda maquina não seria reta. Então a mera forma da trajetória já apresenta um problema.

Para podermos investigar esta questão mais cuidadosamente precisamos definir primeiramente o conceito de partícula pontual e de partícula pontual livre. É no espírito da Física de tentar investigar fenômenos complexos em termos de objetos simples. Então vamos imaginar um corpo grande e complicado composto de partículas tão pequenas que eles ocupem em cada instante praticamente um único ponto no espaço. A noção de ponto envolve naturalmente uma noção de escala. A partícula real possui um tamanho diferente de zero. Devemos comparar o tamanho da partícula com distâncias típicas do problema. Se a partícula for muito menor que distâncias típicas das trajetórias vamos considerar-la como pontual. O conjunto de pontos que uma partícula pontual ocupa no espaço $\mathcal{E}_R$ de um referencial no passar do tempo chamamos de *trajetória de partícula*.

Brincando com estes objetos percebemos que podemos influenciar seus comportamentos. Notamos, ainda de forma qualitativa, que é necessário chegar perto das partículas para perturbar-las. Na maioria das vezes precisa encostar-se às partículas para provocar alguma alteração do comportamento. Mas brincando com pedaços de ferro e imãs, percebe-se que existe também a possibilidade de perturbar de longe. Igualmente observam-se comportamentos semelhantes colocando bastões de plástico ou vidro atritados com panos perto de objetos sem encostar. Mas, mesmo nestes casos sem necessidade de contato direto percebe-se que as possibilidades de influenciar se tornam cada vez menores quando todos os objetos foram bem afastados das partículas. Então se pode pensar em partículas que ficam tão afastadas de tudo e qualquer objeto que estas possam ser consideradas livres de influência. Vamos chamar estas partículas de livres.

Agora temos um pequeno problema na investigação da geometria da trajetória de partículas livres. Nossos conceitos de geometria eram todos construídos com encaixes das pontas de compassos. Seria impossível medir as características da trajetória de partículas desta forma sem perturbar as partículas. Que tal a gente simplesmente olhar para as partículas? O mero olhar não parece perturbar as partículas. Que significa olhar? Significa fazer medidas com a ajuda de luz. Mas, para poder falar da geometria usando luz temos que fazer uma conexão entre luz e geometria. Esta conexão foi elaborada cuidadosamente pelo Físico Persa Alhacen[1]. Ele fez experiências em câmeras escuras e descobriu que luz se propaga no espaço vazio em linhas retas. Baseado neste fato pode-

[1] Alhacen Abū Alī al-Ḥasan ibn al-Ḥasan ibn al-Haytham (Persian : ابن هيثم) * 965 em Basra, † 1039 em Cairo.

se montar um arsenal de medidas ópticas para determinar a geometria de trajetórias sem perturbar as partículas.

Com estas preparações somos finalmente aptos para formular uma lei empírica:

Lei 6: É possível preparar e observar partículas tão afastadas de todos os objetos que estas podem ser consideradas livres de qualquer perturbação e existem referenciais nos quais as trajetórias de todas as partículas livres são retas ou pontos.

A possibilidade de a trajetória ser um ponto corresponde a uma partícula que está parada no espaço do referencial. Os referenciais cuja existência é afirmada no enunciado da lei 6 são chamados *de referenciais inerciais*. Foi Robert Hooke[2] que caracterizou os referenciais inerciais com a geometria das trajetórias de partículas livres.

Percebemos que a noção de partícula livre é um tanto vaga. Futuramente veremos que esta falha tem realmente conseqüências que terão um papel importante na teoria da gravitação.

Substituindo o espaço absoluto de Newton por um espaço de algum referencial inercial, podemos voltar à primeira lei de Newton e perguntar agora pela uniformidade do movimento. A uniformidade não é definida enquanto não definimos um relógio que mostra o "verdadeiro" tempo. Mas, o que é o verdadeiro tempo? Estamos de volta na antiga problemática do tempo matemático e absoluto de Newton. Existe uma saída desde dilema muito interessante. Podemos banir o tempo verdadeiro da discussão comparando apenas relações entre partículas. Podemos afirmar e verificar experimentalmente que os deslocamentos de quaisquer duas partículas livres em referenciais inerciais mostram uniformidade relativa. Isto quer dizer, se uma partícula percorre, por exemplo, 1 m enquanto a outra percorre 5 m a relação entre distâncias percorridas destas partículas permanecerá 5 para sempre. Então se a primeira percorre 10 m a segunda percorrerá 50 m.

Mas, esta saída tem ainda um problema grave. Quando compararmos as distâncias percorridas por duas partículas livres, precisamos resolver o seguinte tipo de tarefa: temos que determinar qual chegada da partícula 2 em qual ponto da sua trajetória é *simultânea* com a chegada da partícula 1 num determinado ponto da sua trajetória. Então para poder dizer quanto uma partícula percorre enquanto uma outra percorre uma dada distância precisamos da noção de *simultaneidade*. Esta vez o uso desta noção não pode ser substituído por uma artimanha como aquela que usamos na definição de distância.

Simultaneidade é uma propriedade de pares de *eventos*. Os físicos atribuem o nome de *evento*[3] a um acontecimento que ocorre numa região espacial tão pequena que possa ser considerada um ponto e que dura tão pouco tempo que possa ser considerado sem duração. A noção de evento é parecida com a noção de ponto na geometria. A chegada de uma partícula pontual num determinado ponto da trajetória pode servir como exemplo de um evento. A construção do espaço começa com pontos marcados e depois acrescentamos pontos descritos em termos de pontos anteriormente marcados e ainda acrescentamos pontos que poderiam ser determinados eventualmente. De forma

[2] Robert Hooke 1635 – 1703. , Formulou a hipótese da gravitação que cai quadraticamente com a distância, descobriu a lei de Hooke (elasticidade), descobriu uma estrela dupla. Colaborou com Boyle sobre pressão atmosférica em dependência da altura geográfica. Contribuiu para a biologia, criou a noção de célula.

[3] É muito infeliz que os teóricos de probabilidade usam a palavra evento num outro sentido.

parecida podemos começar com eventos fisicamente realizados, por exemplos as chegadas de partículas em pontos das suas trajetórias, e depois podemos acrescentar eventos construídos e ainda eventos imaginados que poderiam ser construídos ou realizados. Juntando todos os eventos reais ou imaginados chegamos num conjunto que vamos chamar de *espaço-tempo* e vamos representá-lo pelo símbolo $\mathscr{E}\mathscr{T}$.

Vamos dar uma definição de simultaneidade que se baseia na seguinte idéia intuitiva:

Imaginem que fixemos um número grande de montes de pólvora na superfície de uma mesa. Estes montes podem formar algum desenho. Em cada monte colocamos um filamento ligado por fios elétricos que são ligados numa bateria através de interruptores. Quando se fecha o circuito de um filamento, este esquenta e faz a pólvora explodir. A explosão representa um evento. Agora vamos imaginar que alguém puxa uma folha de papel por cima dos montes de pólvora. Cada explosão deixa uma pequena marca de queimadura no papel. Se as explosões acontecem em tempos diferentes o desenho das marcas queimadas no papel não terá a menor semelhança com o desenho original formado pelos montes de pólvora na mesa. Mas se as explosões aconteceram simultaneamente o desenho original será transferido fielmente para a folha de papel. A mesa representa um referencial e a folha de papel outro. As explosões simultâneas transferem pontos de um referencial para outro de forma que conserva relações geométricas.

Vamos formular esta idéia de maneira matemática. Cada evento e do espaço-tempo acontece em algum ponto $L_R(e)$ do espaço $\mathscr{E}_R$ de um referencial R. Então temos um mapeamento $L_R : \mathscr{E}\mathscr{T} \to \mathscr{E}_R$ que chamaremos de *localização*. Por outro lado podemos imaginar que escolhemos em cada ponto P do espaço do referencial R um evento $\varepsilon_R(\mathrm{P})$ que acontece justamente neste ponto P. Na verdade esta idéia de fazer escolhas em um número infinito de pontos imaginados é um tanto hipotética pois na prática podemos realizar apenas escolhas finitas. Os matemáticos até postulam (com um axioma) que escolhas infinitas existam. Em fim, se aceitarmos estas escolhas infinitas cada tipo de escolha define um mapeamento $\varepsilon_R : \mathscr{E}_R \to \mathscr{E}\mathscr{T}$, onde $\varepsilon_R(\mathrm{P})$ é algum evento escolhido que acontece no ponto P. Se fizermos a concatenação de um mapeamento de escolha ε_R com o mapeamento de localização L_R obtemos simplesmente o mapeamento identidade no espaço $\mathscr{E}_R$; $L_R \circ \varepsilon_R(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$. Devido ao fato que acontecem muitos eventos em cada ponto P, o mapeamento de localização não tem inverso. Mas se restringirmos L_R ao conjunto imagem de um mapeamento escolha ε_R obtemos um mapeamento com inverso e o inverso é justamente o mapeamento escolha ε_R. Se $\mathscr{S}$ for algum subconjunto de $\mathscr{E}\mathscr{T}$ tal que a restrição de $\mathrm{L_R}$ no conjunto $\mathscr{S}$ tem inverso este inverso é um mapeamento de escolha. Formar uma identidade $L_R \circ \varepsilon_R$ não é nada interessante. Mas, se concatenarmos ε_R com a localização de um outro referencial obtemos um mapeamento interessante, que mapeia pontos de um referencial em pontos de outro referencial. Este mapeamento depende do mapeamento de escolha e este fato permite definir simultaneidade, baseado numa nova lei empírica:

Lei 7: Para cada evento e_0 existe exatamente um subconjunto de eventos $\mathcal{S}_{e_0} \subset \mathcal{E}\mathcal{T}$ com $e_0 \in \mathcal{S}_{e_0}$ tal que para quaisquer referenciais R e $\tilde{R}$ a restrição $L_R\big|_{\mathcal{S}_{e_0}}$ da localização L_R no conjunto $\mathcal{S}_{e_0}$ possui inverso ε_{R,e_0} e tal que a concatenação deste mapeamento de escolha com a localização $L_{\tilde{R}}$ é um mapeamento $L_{\tilde{R}} \circ \varepsilon_{R,e_0} : \mathcal{E}_R \to \mathcal{E}_{\tilde{R}}$ que conserva distâncias (isto é, $\forall \left(\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathcal{E}_R\right) : d_{\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle} = d_{\left\langle L_{\tilde{R}}\left(\varepsilon_{R,e_0}(\mathrm{A})\right), L_{\tilde{R}}\left(\varepsilon_{R,e_0}(\mathrm{B})\right)\right\rangle}$).

Definição (baseada na lei 7): Os eventos do conjunto $\mathcal{S}_{e_0}$, mencionado na lei 7, são *simultâneos* entre se.

Simultaneidade é uma relação de equivalência no espaço-tempo e os conjuntos $\mathcal{S}_{e_0}$ são as classes de equivalência desta relação. Vamos chamar cada classe de um *instante*. Então um instante é o conjunto de todos os eventos simultâneos com algum evento.

Como com tantas outras leis empíricas, a lei 7 fala de conjuntos infinitos e a verificação se limita naturalmente a experiências finitas. No caso da lei 7 seriam experiências do tipo dos montes de pólvora numa mesa. Para um conjunto finito de pontos e eventos encontraríamos os mapeamentos da lei 7 e percebemos experimentalmente que este êxito experimental não depende do número escolhido de pontos. Isto motiva formular uma lei idealizada com conjuntos infinitos.

Hoje em dia sabemos que a mecânica clássica de Newton tem limitações e não vale em todas as circunstâncias. Se puxarmos a folha de papel encima da mesa com os montes de pólvora com a mão podemos medir com muita precisão e dentro do erro experimental poderíamos verificar a lei 7 perfeitamente. Mas, se tivéssemos folhas que deslizam por cima dos montes de pólvora com digamos 99,9 % da velocidade da luz notaríamos que a lei 7 não é válida. Na mecânica relativística não podemos manter a definição de simultaneidade dada aqui. O leitor não deve ficar desanimado por ter que aprender uma teoria que ao final das contas não vale em todas as circunstâncias. O domínio de validade da mecânica clássica é enorme e contem aplicações importantíssimas. Seria totalmente inadequado tratar estas aplicações com a mecânica relativística. Isto introduziria desnecessariamente muita dificuldade adicional sem trazer melhoras apreciáveis na precisão das previsões.

Agora vamos focar nossa atenção nos movimentos de partículas livres em espaços de referenciais inerciais. Formulamos mais uma lei empírica:

Lei 8: Para todas as partículas livres e todos os referencias inerciais vale que em todo instante a partícula se encontra em algum ponto da sua trajetória e, se a trajetória não for um único ponto, a partícula estará em cada ponto da sua trajetória em no máximo um instante.

Com esta lei podemos estabelecer uma relação biunívoca entre o conjunto dos instantes e pontos da trajetória reta de alguma partícula livre em algum referencial inercial. Numa trajetória reta podemos sempre definir uma ordem total dos pontos. Escolhe-se para esta finalidade arbitrariamente um vetor deslocamento $\vec{f}$ não nulo que aponta na direção da reta e se define que um ponto da reta P_1 é menor que um ponto P_2 se $\overrightarrow{P_1P_2} = \lambda \vec{f}$ com $\lambda > 0$. Com a relação biunívoca entre pontos da trajetória e instantes este ordenamento induz um ordenamento total de instante; o instante da chagada da partícula no ponto P_2 é considerado maior que o instante da chegada no ponto P_1 se $P_2 > P_1$. Então como conseqüência da lei empírica 8, podemos afirmar que os instantes são naturalmente ordenados com uma ordem total. A escolha da partícula, do referencial inercial e do vetor $\vec{f}$ são arbitrários. Consequentemente a orientação desta ordem total de instantes é arbitrária. Na vida humana temos claramente uma distinção do futuro e passado. O futuro diz respeito a construções da mente como planos e o passado está associado à memória. Também nos processos termodinâmicos há uma distinção clara de futuro e passado. Podemos escolher o ordenamento de instantes tal que um instante $\mathscr{S}_2$ é maior que um instante $\mathscr{S}_1$ se $\mathscr{S}_1$ pertence ao passado de $\mathscr{S}_2$. Esta é a convenção geralmente adotada. Mas, para a mecânica esta escolha não tem nenhuma importância. Poder-se-ia fazer perfeitamente a escolha contrária. Mas o que importa é que existe uma ordem total.

Com a definição de simultaneidade temos condições de formular a lei empírica que fala da uniformidade relativa dos movimentos de partículas livres em referenciais inerciais:

Lei 9: Os movimentos de partículas livres em referenciais inerciais mostram uniformidade relativa.

Com as leis empíricas 7, 8 e 9 podemos definir uma nova grandeza física, chamada de *duração* ou *lapso de tempo*. Vamos escolher o símbolo δt para esta grandeza. O domínio desta grandeza consiste do conjunto de pares ordenados de instantes. Lembramos que definimos acima que um instante é uma classe de equivalência da relação simultaneidade. Temos que definir a relação de equivalência que corresponde à igualdade dos valores da grandeza δt. Sejam $\langle \mathscr{S}_A, \mathscr{S}_B \rangle$ e $\langle \mathscr{S}_C, \mathscr{S}_D \rangle$ dois pares ordenados de instantes. Para testar se o lapso de tempo entre $\mathscr{S}_A$ e $\mathscr{S}_B$ é igual ao lapso de tempo entre $\mathscr{S}_C$ e $\mathscr{S}_D$ temos que fazer os seguintes dois testes: (a) verificar se os pares $\langle \mathscr{S}_A, \mathscr{S}_B \rangle$ e $\langle \mathscr{S}_C, \mathscr{S}_D \rangle$ tem o mesmo ordenamento temporal e (b) escolher alguma partícula pontual livre e algum referencial inercial no qual esta partícula tem uma trajetória reta e verificar se a distância que esta partícula percorre entre os instantes $\mathscr{S}_A$ e $\mathscr{S}_B$ é igual à distância que ela percorre entre os instantes $\mathscr{S}_C$ e $\mathscr{S}_D$. Se ambos os testes resultarem em afirmações positivas consideramos $\delta t_{\langle \mathscr{S}_A, \mathscr{S}_B \rangle} = \delta t_{\langle \mathscr{S}_C, \mathscr{S}_D \rangle}$. Vamos definir os valores como as classes de equivalência de pares de instantes e escreveremos o espaço-valor desta grandeza como $\mathbb{T}$. Falta definir a soma de valores: sejam δt_1 e δt_2 dois valores da grandeza lapso de tempo. Para construir $\delta t_1 + \delta t_2$ escolhemos algum par de instantes $\langle \mathscr{S}_A, \mathscr{S}_B \rangle$ na classe δt_1. Em conseqüência da lei 8 existe um par único de eventos $\langle \mathscr{S}_B, \mathscr{S}_C \rangle$ na classe δt_2. Então definimos $\delta t_1 + \delta t_2$ como a classe que contem o par de instantes $\langle \mathscr{S}_A, \mathscr{S}_C \rangle$. As leis empíricas 7, 8 e 9 garantem que δt é uma grandeza linear unidimensional bem definida.

Na secção anterior definimos coordenadas nos espaços físicos. Esta mesma idéia de caracterizar os pontos de um espaço físico por *n*-uplas de valores de grandezas unidimensionais de forma simples pode ser aplicada ao espaço-tempo. Neste caso vamos querer caracterizar os eventos. Podemos construir coordenadas no espaço-tempo com a ajuda de um referencial. Vamos escolher um referencial R. Seja e um evento. Este evento acontece no ponto $L_R(e)$ do espaço $\mathscr{E}_R$. No espaço $\mathscr{E}_R$ podemos escolher algum sistema de coordenadas K_1, K_2, K_3 e caracterizar o ponto $L_R(e)$ pelos valores $K_1(L_R(e)), K_2(L_R(e)), K_3(L_R(e))$. Falta mais uma coordenada para caracterizar o evento e. Chamaremos esta coordenada de $\boldsymbol{t}(\ )$ e ela tomará valores no espaço-valor $\mathbb{T}$. Para construir-la vamos escolher uma origem $*$ no conjunto de instantes. O evento e pertence a um instante $\mathscr{S}_e$. O valor $\boldsymbol{t}(e)$ da coordenada $\boldsymbol{t}(\ )$ para o evento e será o lapso de tempo que contem o par de instantes $\langle *, \mathscr{S}_e \rangle$.

Notamos que a quarta coordenada é independente da escolha do referencial. Cada instante corresponde a um determinado valor t de $\boldsymbol{t}(\ )$. Por esta razão é costume falar do "instante t". Na verdade seria o instante que tem o valor t da coordenada temporal $\boldsymbol{t}(\ )$. No resto destas aulas adotaremos também esta linguagem.

O fato de termos uma coordenada temporal que é a mesma para todos os referenciais é uma das principais características da mecânica não relativística. Na passagem para a mecânica relativística os conceitos temporais sofrerão mudanças muito profundas. Até o ordenamento temporal será outro. De certa forma os conceitos espaço-temporais da teoria da relatividade são até mais simples que os da mecânica Newtoniana.

Estamos num bom ponto para olhar para trás e contemplar o que foi alcançado. Dissecamos a primeira lei de Newton para entender quais são os elementos empiricamente testáveis dentro desta lei. Encontramos 9 leis empíricas nada simples que representam o conteúdo físico da primeira lei de Newton. Eles estabelecem a estrutura espaço-temporal na qual a mecânica clássica é formulada. Antes de enfrentar a segunda e terceira lei de Newton introduziremos ainda algumas grandezas importantes na próxima secção.