

1.9 Posição, velocidade e aceleração

Formulamos leis empíricas que tratam de movimentos de partículas pontuais livres em referenciais inerciais. Agora temos que tratar de casos mais gerais. Consideramos novamente partículas pontuais mas não necessariamente livres.

Lei 10: Para qualquer partícula pontual e qualquer referencial R e qualquer instante t existe um ponto $P(t) \in \mathcal{E}_R$ onde se encontra a partícula no instante t .

À primeira vista não parece ser necessário formular um fato tão óbvio como uma lei empírica. No entanto, esta lei não é trivial. De fato, na mecânica quântica se descobre que esta afirmação não é válida! O conjunto das posições $P(t)$ quando t percorre todo conjunto de instantes é chamado de trajetória da partícula. Quando tratarmos de várias partículas colocaremos um índice na letra P que serve como nome da partícula. De tal forma, $P_k(t)$ seria a posição da partícula k no instante t .

Seja $P(t)$ a posição de uma partícula no instante t no espaço físico \mathcal{E}_R de um referencial R . Seja τ algum valor da grandeza lapso de tempo. Se dividirmos o vetor deslocamento $\overrightarrow{P(t)P(t+\tau)}$, que descreve o deslocamento da partícula que ocorreu entre os instantes t e $t+\tau$, pelo valor τ obtemos um vetor $\vec{w} = \tau^{-1} \overrightarrow{P(t)P(t+\tau)}$ no espaço das velocidades \mathbb{V}_R . Este vetor pode ser considerado um mapeamento linear que recebe valores de lapsos de tempo e devolve deslocamentos. Caso a partícula for uma partícula livre e o referencial for inercial, este mapeamento seria um objeto útil que pode servir para fazer previsões sobre futuras posições da partícula. Se soubermos, neste caso, que a partícula estava num ponto P_0 num instante t_0 o conhecimento de \vec{w} nos permitirá prever que num instante $t_0 + \gamma$ a partícula estará num ponto P tal que $\overrightarrow{P_0P} = \gamma \vec{w}$. Mas, se a partícula não for livre ou o referencial não for inercial este tipo de previsão não funciona. No entanto, para estes casos mais gerais pode-se ainda salvar uma parte da idéia de usar vetores do espaço \mathbb{V}_R para fazer previsões de futuras posições. Mas, o tipo de previsão será mais modesta. Ela tem o caráter de uma aproximação, válida para pequenos valores de lapsos de tempo. Podemos formular mais uma lei empírica:

Lei 11: Os movimentos de partículas em qualquer referencial R são sempre tais que para cada instante t existe um vetor $\vec{v}(t) \in \mathbb{V}_R$ tal que o verdadeiro deslocamento da partícula $\overrightarrow{P(t)P(t+\tau)}$ difere do vetor $\vec{v}(t)\tau$ por um termo de erro que tende a zero mais rapidamente que τ . Isto é, vale a fórmula:
$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1} \left| \overrightarrow{P(t)P(t+\tau)} - \vec{v}(t)\tau \right| = 0.$$

Definição: O vetor $\vec{v}(t)$, cuja existência é afirmada nesta lei, é chamado de velocidade da partícula no instante t .

Caso tenhamos várias partículas, teremos correspondentemente várias posições $P_a(t)$, $P_b(t)$, ... e várias velocidades $\vec{v}_a(t)$, $\vec{v}_b(t)$, onde a, b, \dots seriam nomes ou rótulos das partículas.

Com a ajuda do vetor posição da partícula

$$\vec{r}(t) = \overline{OP(t)} \quad (1.9.1)$$

podemos escrever o vetor velocidade na forma de uma derivada:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (1.9.2).$$

Então a lei 11 pode ser enunciada na forma simples: o vetor posição de qualquer partícula em qualquer referencial vista como função do tempo é uma função diferenciável.

É importante analisar esta lei criticamente. Como seria uma experiência que questiona a validade desta lei? Como todo procedimento experimental é finito, não podemos realizar o processo limite

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\tau) - \vec{r}(t)}{\tau} \quad (1.9.3)$$

Mesmo se pudéssemos realizar uma seqüência infinita de medidas, com lapsos de tempo τ_n com $\tau_n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$, não chegaríamos numa conclusão satisfatória. De fato podemos realizar seqüências finitas grandes onde τ_n atinge valores muito pequenos. Quando se faz isto observa-se sempre um desastre que é mostrado exemplarmente na figura 1.9.1. A figura mostra os valores dos quocientes da diferença da componente x do vetor posição e do lapso de tempo em função do lapso de tempo para uma situação experimental típica.

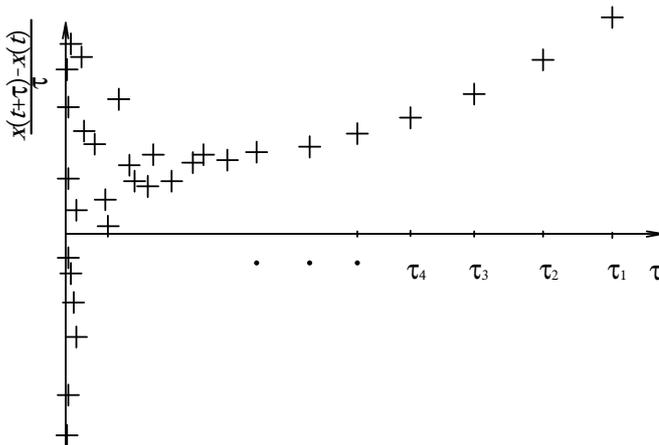


Fig. 1.9.1 Típico comportamento de quociente de diferenças.

Os primeiros valores do quociente mostram um comportamento sistemático e a seqüência de quocientes parece convergente. Mas justamente quando os lapsos de tempo se aproximam ao valor zero este comportamento sistemático acaba e é substituído por algo aleatório. A explicação deste fenômeno é simples. Quando os lapsos de tempo são muito curtos a diferença dos valores da coordenada começam ser menores que o erro experimental. Os valores dos lapsos de tempo também têm erro e na

região perto do valor $\tau=0$ estamos vendo somente o quociente de dois erros. Felizmente pode-se avaliar esta situação quantitativamente. As incertezas podem ser estimadas e pode-se julgar até que ponto os dados dos quocientes são confiáveis. O que queremos dizer com a afirmação que as posições em função do tempo são diferenciáveis é a existência do comportamento ordenado na região confiável. Esta, alias, pode ocupar os dois lados do eixo τ , pode-se formar o quociente também para valores negativos de τ . Os dados das regiões confiáveis podem ser ajustados com alguma curva suave que contém poucos parâmetros como é mostrado da figura 1.9.2.

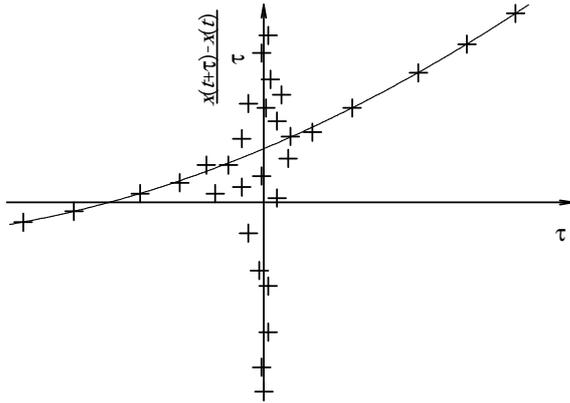


Fig. 1.9.2 Interpolação dos dados da parte confiável para obter uma estimativa do valor limite para $\tau \rightarrow 0$

A curva de ajuste determina um valor no ponto $\tau=0$ que representa o valor da derivada. Naturalmente este valor possui também erro experimental.

Determinado $\vec{v}(t)$ para muitos instante t , obtemos sempre dados que podem ser ajustados por curvas suaves e e

diferenciáveis. Então podemos formular mais uma lei:

Lei 12: As velocidades de qualquer partícula em qualquer referencial formam uma curva diferenciável no espaço de velocidades.

Definição: A aceleração no instante t de uma partícula, cujas posições são descritas por vetores posição $\vec{r}(t)$, é dada pela derivada segunda

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} .$$

Igual como no caso das posições e velocidades, podemos colocar rótulos na aceleração quanto tratarmos de várias partículas.

Derivadas em relação à variável t são também escritas com um ponto. Então podemos escrever

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} \tag{1.9.4}$$

e

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \tag{1.9.5}$$

Na idealização imaginamos que o movimento de uma partícula descreve uma curva parametrizada no espaço físico de um referencial. O tempo t é o parâmetro da curva. Na secção 1.5 definimos o comprimento de curvas e o comprimento de arco. Sejam t_i, t_f dois instantes com $t_i < t_f$. Escolhendo t_i como início temos o comprimento de arco

$$s(t_f) = \sup_{\text{todas as partições de } [t_i, t_f]} \sum_{k=0}^{N-1} d_{\langle P(t_k), P(t_{k+1}) \rangle} = \sup_{\text{todas as partições de } [t_i, t_f]} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{P(t_k)P(t_{k+1})} \quad (1.9.6).$$

Este valor pode ser escrito como uma integral de Riemann do módulo da velocidade:

$$s(t_f) = \int_{t_i}^{t_f} |\vec{v}(t)| dt \quad (1.9.7)$$

A demonstração detalhada deste fato se encontra no Apêndice desta secção. A idéia da demonstração é simples: Se os deslocamentos $\overline{P(t_k)P(t_{k+1})}$ de pequenos avanços podem ser aproximados por vetores $\vec{v}(t_k)(t_{k+1} - t_k)$ então a soma de distâncias pode ser aproximada pela soma dos módulos destes vetores. Os termos de erro são de ordem superior e mesmo somando muitos destes no limite desapareçam.

Da fórmula (1.9.7) obtemos

$$|\vec{v}(t)| = \frac{ds}{dt} \quad (1.9.8)$$

Na língua Inglesa existem duas palavras para rapidez: “velocity” e “speed”. Aproveitando esta duplicidade convencionou-se de usar “velocity” para o vetor $\vec{v}(t)$ e “speed” para o módulo deste vetor. Assim se encontra em textos por exemplo par o valor $3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ o nome de “speed of light” e não a expressão “velocity of light”. Os livros texto traduzidos para o português tentam inventar algo para imitar esta distinção e falam de “velocidade escalar” para designar o módulo da velocidade. Mas na prática esta expressão não é empregada de maneira consistente, pois ninguém fala da *velocidade escalar da luz*. Tal vez estamos burros por não perceber que neste ponto a nossa língua tem a mesma riqueza da língua Inglesa. Poderíamos chamar o módulo da velocidade de *rapidez*. Naturalmente estamos desacostumados de falar “*rapidez da luz*” no lugar do usual “velocidade da luz”, mas poder-se-ia pensar nesta possível mudança de hábito. Então ds/dt seria a rapidez da partícula.

As outras características da velocidade, a saber, direção e sentido podem ser expressos com um vetor chamado de *vetor tangente* que se obtém normalizando a velocidade:

$$\hat{t}(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} \quad (1.9.9)$$

Não há perigo de confundir a letra t neste caso com o tempo, pois a coordenada temporal nunca aparece com o acento circunflexo. Em pontos onde a partícula fica parada o vetor tangente pode não ser bem definido, embora em caso excepcionais ele pode ser definido mesmo com rapidez zero. Em pontos onde $ds/dt \neq 0$ podemos escrever

$$\hat{t}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \vec{v}(t) \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (1.9.10)$$

É interessante escrever a aceleração em termos do vetor tangente e da rapidez. Nesta tarefa aparecerá uma derivada de um vetor normalizado. Derivadas de funções vetoriais com módulo constante tem uma propriedade muito peculiar, que enunciamos aqui como um teorema:

Teorema 1.9.1: Seja A um espaço linear unidimensional e V um espaço vetorial. Seja $\vec{f}: A \rightarrow V$ uma função diferenciável tal que o módulo $|\vec{f}(x)|$ seja constante. Então o vetor $\frac{d\vec{f}}{dx}$ é necessariamente ortogonal ao vetor $\vec{f}(x)$.

Demonstração: Se $|\vec{f}(x)|$ é constante, então $|\vec{f}(x)|^2$ é constante e a derivada desta função é zero. Temos $|\vec{f}(x)|^2 = \vec{f}(x) \cdot \vec{f}(x)$. Com a regra de Leibniz segue

$$0 = \frac{d(\vec{f}(x) \cdot \vec{f}(x))}{dx} = \frac{d\vec{f}(x)}{dx} \cdot \vec{f}(x) + \vec{f}(x) \cdot \frac{d\vec{f}(x)}{dx} = 2\vec{f}(x) \cdot \frac{d\vec{f}(x)}{dx} \quad (1.9.11)$$

Então vale $\vec{f}(x) \cdot \frac{d\vec{f}(x)}{dx} = 0$.

Antes de aplicarmos este resultado em movimentos de partículas, vamos considerar um exemplo matemático simples e importante. Considere $A = \mathbb{R}$ e $V = \mathbb{U}_{\mathbb{R}}$. Seja $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ uma base ortonormal em $\mathbb{U}_{\mathbb{R}}$. Vamos investigar a função

$$\vec{f}(\varphi) \stackrel{\text{def.}}{=} \hat{x} \cos(\varphi) + \hat{y} \sin(\varphi) \quad (1.9.12)$$

O módulo destes vetores vale 1. Então isto é um valor constante. Consequentemente o teorema se aplica neste caso. Temos $\vec{f}'(\varphi) \perp \vec{f}(\varphi)$ onde denotamos a derivada com uma linha. Vamos determinar as outras características do vetor $\vec{f}'(\varphi)$. Temos, em analogia com o resultado (1.9.8), que

$$|\vec{f}'(\varphi)| = \frac{ds}{d\varphi} \quad (1.9.13)$$

Mas, com a maneira de medir ângulos pelo comprimento de arco e tendo aqui um raio unitário temos $s = \varphi$. Então segue

$$|\vec{f}'(\varphi)| = 1 \quad (1.9.14)$$

O sentido do vetor $\vec{f}'(\varphi)$ é no sentido do aumento do ângulo. Juntando estas três propriedades $\vec{f}'(\varphi) \perp \vec{f}(\varphi)$, $|\vec{f}'(\varphi)| = 1$ e sentido do aumento de ângulo, podemos concluir que

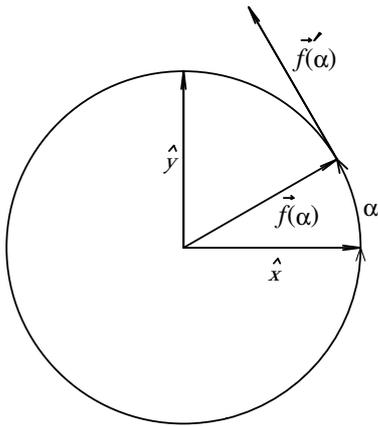
$$\vec{f}'(\varphi) = \vec{f}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.9.15)$$

Compare com a figura 1.9.3. Desta fórmula obtemos duas relação muito importantes:

$$(\cos(\varphi))' = -\sin(\varphi) \quad \text{e} \quad (\sin(\varphi))' = \cos(\varphi) \quad (1.9.16)$$

De novo, o leitor certamente conhecia estas relações, mas como definimos as funções co-seno e seno de forma diferente, tivemos a obrigação de deduzir as expressões para as derivadas. Além disso esta dedução é uma aplicação simples do teorema.

Fig. 1.9.3 Dedução das expressões das derivadas das funções seno e co-seno.



Depois desta pequena excursão de cálculo podemos voltar para a tarefa de caracterizar o movimento de uma partícula.

A separação da velocidade num vetor tangente e uma rapidez corresponde à separação do movimento da partícula num aspecto geométrico da trajetória e numa descrição como a partícula anda ao longo da trajetória. O vetor tangente descreve principalmente um aspecto da trajetória enquanto a rapidez descreve a maneira de avançar na trajetória. No caso do vetor tangente usamos a palavra “principalmente” como uma restrição, pois

somente a direção de \hat{t} é exclusivamente propriedade da trajetória, enquanto o sentido depende da maneira do avanço da partícula na trajetória. Agora vamos estudar uma derivada do vetor \hat{t} . Mas, não vamos estudar a derivada em relação ao tempo, mas uma derivada que é independente da maneira do avanço da partícula ao longo da trajetória e que depende apenas da geometria da trajetória. Esta derivada é a derivada em relação ao comprimento de arco s . Com o teorema 1.9.1 sabemos que esta derivada é ortogonal ao próprio vetor tangente. Caso esta derivada não tenha, no ponto considerado, o valor zero, podemos definir um vetor normalizado que aponta na direção e que tem o sentido da derivada:

$$\text{para } \frac{d\hat{t}}{ds} \neq 0 : \quad \hat{n}(s) \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{d\hat{t}/ds}{\left|d\hat{t}/ds\right|} \quad (1.9.17)$$

Com o teorema 1.9.1 sabemos então

$$\hat{t}(s) \perp \hat{n}(s) \quad (1.9.18)$$

Chamaremos este vetor de *vetor normal* da trajetória no ponto s . Esta maneira de falar é um pouco errada, trata-se de uma abreviação. O correto seria “normal da trajetória no ponto P onde o comprimento andado desde o início vale s ”. Mas isto seria muito complicado e se entende a abreviação.

O módulo do vetor $d\hat{t}/ds$ é uma grandeza do espaço-valor dos inversos de comprimento. Se este for diferente de zero, $|d\hat{t}/ds|$ é tradicionalmente escrito como o inverso de um raio:

$$R(s) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{\left|d\hat{t}/ds\right|} \quad (1.9.19)$$

$R(s)$ é chamado de raio de curvatura da trajetória no ponto s , ou raio de curvatura local. Veremos um exemplo para justificar este nome.

Exemplo: Movimento circular uniforme de raio R_0 :

$$\vec{r}(t) = \hat{x} R_0 \cos(\omega t) + \hat{y} R_0 \sin(\omega t) \quad (1.9.20)$$

Calculamos as grandezas $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$, $|\vec{v}(t)|$, $s(t)$, $\hat{t}(t)$ e $d\hat{t}/ds$:

$$\vec{v}(t) = -\hat{x} R_0 \omega \text{sen}(\omega t) + \hat{y} R_0 \omega \text{cos}(\omega t) \quad (1.9.21)$$

$$\vec{a}(t) = -\hat{x} R_0 \omega^2 \text{cos}(\omega t) - \hat{y} R_0 \omega^2 \text{sen}(\omega t) \quad (1.9.22)$$

$$|\vec{v}(t)| = R_0 |\omega| \quad (1.9.23)$$

$$s(t) = R_0 |\omega| t \quad (1.9.24)$$

$$\begin{aligned} \hat{t}(t) &= -\hat{x} \frac{\omega}{|\omega|} \text{sen}(\omega t) + \hat{y} \frac{\omega}{|\omega|} \text{cos}(\omega t) = \\ &= -\hat{x} \frac{\omega}{|\omega|} \text{sen}\left(\frac{\omega}{|\omega| R_0} s(t)\right) + \frac{\omega}{|\omega|} \hat{y} \text{cos}\left(\frac{\omega}{|\omega| R_0} s(t)\right) \end{aligned} \quad (1.9.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{t}(t)}{ds} &= -\hat{x} \frac{1}{R_0} \text{cos}\left(\frac{\omega}{|\omega| R_0} s(t)\right) - \hat{y} \frac{1}{R_0} \text{sen}\left(\frac{\omega}{|\omega| R_0} s(t)\right) = \\ &= -\frac{1}{R_0} \hat{r} \end{aligned} \quad (1.9.26)$$

Então neste exemplo o vetor normal é

$$\hat{n} = -\hat{r} \quad (1.9.27)$$

e o raio de curvatura é justamente o raio da trajetória circular:

$$R(t) = R_0 \quad (1.9.28).$$

Depois desta justificativa no nome raio de curvatura votemos ao estuda do movimento de uma partícula. Temos

$$\vec{v}(t) = \hat{t}(t) \frac{ds}{dt} \quad (1.9.29)$$

Então a aceleração é

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \hat{t}(t) \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\hat{t}(t)}{dt} \frac{ds}{dt} = \\ &= \hat{t}(t) \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{\hat{n}(s(t))}{R(s(t))} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \end{aligned} \quad (1.9.30)$$

A fórmula (1.9.30) vale naturalmente com a condição $d\hat{t}/ds \neq 0$. A expressão geral da aceleração é

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{t} + \begin{cases} |\vec{v}|^2 \frac{1}{R} \hat{n} & \text{se } \frac{d\hat{t}}{ds} \neq 0 \\ 0 & \text{se } \frac{d\hat{t}}{ds} = 0 \end{cases} \quad (1.9.31)$$

Temos uma componente tangencial e outra normal. A tangencial é determinada pela taxa de variação da rapidez enquanto a normal (se ela existir) é proporcional ao quadrado da rapidez e inversamente proporcional ao raio de curvatura da trajetória no ponto atual da partícula. Este segundo termo causa preocupação nos motoristas quando eles fazem uma curva em alta rapidez. Para um dado valor de rapidez ela é inversamente proporcional ao raio de curvatura da trajetória. Um bom motorista deve então escolher a geometria da trajetória adequadamente.

Seja t_0 um dado instante no qual a partícula esteja num ponto P_0 . Vamos chamar o valor de $s(t_0)$ de s_0 . Podemos imaginar uma expansão em série de Taylor da função \vec{r} (vista como função de s) em torno do ponto s_0 :

$$\begin{aligned}\vec{r}(s) &= \overline{OP_0} + \frac{d\hat{r}}{ds}\Big|_{s_0} (s-s_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\hat{r}}{ds^2}\Big|_{s_0} (s-s_0)^2 + \dots \\ &= \overline{OP_0} + \hat{v}(s_0)(s-s_0) + \frac{1}{2R(s_0)} \hat{n}(s_0)(s-s_0)^2 + \dots\end{aligned}\tag{1.9.32}$$

Isto significa que numa vizinhança suficientemente pequena do ponto P_0 , tal que termos de ordem superior ao quadrado de $s-s_0$ possam ser desprezados, a trajetória pode ser considerada um caminho dentro de um plano bidimensional. Este plano é gerado pelos vetores $\hat{v}(s_0)$ e $\hat{n}(s_0)$. Nesta vizinhança a trajetória pode ser aproximada por uma trajetória circular com raio igual à $R(s_0)$. Este fato justifica o nome de raio de curvatura local da trajetória.

Apêndice (Demonstração da (1.9.7))

Seja τ um valor positivo de lapso de tempo. Como $\vec{r}(\)$ e $\vec{v}(\)$ são diferenciáveis, a função

$$\Delta(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\left| \overline{P(t)P(t+\tau)} - \vec{v}(t)\tau \right|}{\tau}\tag{1.9.33}$$

é contínua no intervalo fechado $[t_i, t_f]$. Como este intervalo é compacto, a função atinge um máximo. Este máximo depende naturalmente do valor τ . Vamos chamá-lo de

$$M(\tau) \stackrel{\text{def.}}{=} \max_{t \in [t_i, t_f]} \frac{\left| \overline{P(t)P(t+\tau)} - \vec{v}(t)\tau \right|}{\tau}\tag{1.9.34}$$

A definição de $\vec{v}(t)$ implica que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} M(\tau) = 0\tag{1.9.35}$$

Seja $\langle t_0^A, t_1^A, t_2^A, t_3^A, \dots, t_N^A \rangle$, com $t_0^A = t_i$ e $t_N^A = t_f$ alguma partição arbitrária PA do intervalo $[t_i, t_f]$ com N instantes fora do instante inicial. Existe algum número natural m a partir do qual todos os lapsos $t_{i+1}^A - t_i^A$ da partição PA são maiores que $(t_f - t_i)n^{-1}$.

$$\exists(m \in \mathbb{N}) \forall(n > m): \frac{t_f - t_i}{\tau} < \max_k \{t_{k+1}^A - t_k^A\}\tag{1.9.36}$$

Para cada $n > m$ existe uma partição $P_n \langle t_0^n = t_i, t_1^n, t_2^n, t_3^n, \dots, t_K^n = t_f \rangle$ com máximo (fora do inicial) $N+n$ instantes que contem todos os instantes da partição PA , e alem disso é mais fina que $(t_f - t_i)n^{-1}$, isto é

$$K \leq N + n, \quad \text{e} \quad \max_k \{t_{k+1}^n - t_k^n\} < (t_f - t_i)n^{-1} \quad (1.9.37)$$

Agora, com a desigualdade de triângulo temos

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left| \overline{P(t_k^A)P(t_{k+1}^A)} \right| \leq \sum_{k=0}^{K-1} \left| \overline{P(t_k^n)P(t_{k+1}^n)} \right| \quad (1.9.38)$$

De novo, usando a desigualdade de triângulo concluimos:

$$\begin{aligned} \left| \overline{P(t_k^n)P(t_{k+1}^n)} \right| &= \left| \overline{\vec{v}(t_k^n)(t_{k+1}^n - t_k^n) + P(t_k^n)P(t_{k+1}^n)} - \overline{\vec{v}(t_k^n)(t_{k+1}^n - t_k^n)} \right| \leq \\ &\leq \left| \overline{\vec{v}(t_k^n)(t_{k+1}^n - t_k^n)} \right| + \left| \overline{P(t_k^n)P(t_{k+1}^n)} - \overline{\vec{v}(t_k^n)(t_{k+1}^n - t_k^n)} \right| \end{aligned} \quad (1.9.39)$$

Com a definição (1.9.34) podemos estimar o último termo:

$$\begin{aligned} \left| \overline{P(t_k^n)P(t_{k+1}^n)} \right| &\leq \left| \overline{\vec{v}(t_k^n)(t_{k+1}^n - t_k^n)} \right| + \left| \overline{P(t_k^n)P(t_{k+1}^n)} - \overline{\vec{v}(t_k^n)(t_{k+1}^n - t_k^n)} \right| \leq \\ &\leq \left| \overline{\vec{v}(t_k^n)(t_{k+1}^n - t_k^n)} \right| + (t_{k+1}^n - t_k^n) M \left(\max_k \{t_{k+1}^n - t_k^n\} \right) \end{aligned} \quad (1.9.40)$$

Inserindo esta estimativa na (1.9.38) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \overline{P(t_k^A)P(t_{k+1}^A)} \right| &\leq \sum_{k=0}^{K-1} \left| \overline{\vec{v}(t_k^n)(t_{k+1}^n - t_k^n)} \right| + \sum_{k=0}^{K-1} (t_{k+1}^n - t_k^n) M \left(\max_r \{t_{r+1}^n - t_r^n\} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} \left| \overline{\vec{v}(t_k^n)(t_{k+1}^n - t_k^n)} \right| + (t_f - t_i) M \left(\max_r \{t_{r+1}^n - t_r^n\} \right) \end{aligned} \quad (1.9.41)$$

O lado esquerdo não depende de n . Tomando o limite $n \rightarrow \infty$ o primeiro somatório do lado direito forma uma integral de Riemann do módulo da velocidade e o segundo termo tende a zero. Então obtemos

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left| \overline{P(t_k^A)P(t_{k+1}^A)} \right| \leq \int_{t_i}^{t_f} |\vec{v}(t)| dt \quad (1.9.42)$$

Tomando o supremo sobre todas as partições obtemos

$$s(t_f) \leq \int_{t_i}^{t_f} |\vec{v}(t)| dt \quad (1.9.43)$$

Agora vamos mostrar a desigualdade inversa. Para qualquer partição $PA \langle t_0^A, t_1^A, t_2^A, t_3^A, \dots, t_N^A \rangle$ temos, devido as propriedades do supremo:

$$s(t_f) \geq \sum_{k=0}^{N-1} \left| \overline{P(t_k^A)P(t_{k+1}^A)} \right| \quad (1.9.44).$$

Com a desigualdade de triângulo temos

$$\begin{aligned} \left| \overline{\vec{v}(t_k^A)(t_{k+1}^A - t_k^A)} \right| &= \left| \overline{P(t_k^A)P(t_{k+1}^A)} + \overline{\vec{v}(t_k^A)(t_{k+1}^A - t_k^A)} - \overline{P(t_k^A)P(t_{k+1}^A)} \right| \leq \\ &\leq \left| \overline{P(t_k^A)P(t_{k+1}^A)} \right| + \left| \overline{P(t_k^A)P(t_{k+1}^A)} - \overline{\vec{v}(t_k^A)(t_{k+1}^A - t_k^A)} \right| \end{aligned} \quad (1.9.45)$$

Então

$$\left| \overline{P(t_k^A)P(t_{k+1}^A)} \right| \geq \left| \bar{v}(t_k^A)(t_{k+1}^A - t_k^A) \right| - \left| \overline{P(t_k^A)P(t_{k+1}^A)} - \bar{v}(t_k^A)(t_{k+1}^A - t_k^A) \right| \quad (1.9.46)$$

Inserindo isto em (1.9.44) temos

$$s(t_f) \geq \sum_{k=0}^{N-1} \left| \bar{v}(t_k^A)(t_{k+1}^A - t_k^A) \right| - \sum_{k=0}^{N-1} \left| \overline{P(t_k^A)P(t_{k+1}^A)} - \bar{v}(t_k^A)(t_{k+1}^A - t_k^A) \right| \quad (1.9.47)$$

Se escolhermos agora para PA uma seqüência de partições $\{Pk\}_{k=0}^{\infty}$ cuja finura tende a zero o primeiro termo do lado direito tende à integral desejada e o segundo termo tenda a zero. Substituindo $\{Pk\}_{k=0}^{\infty}$ em (1.9.47) no lugar de PA obtemos uma desigualdade

$$s(t_f) \geq I_k - D_k \quad \text{com} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} I_k = \int_{t_i}^{t_f} |\bar{v}(t)| dt \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} D_k = 0 \quad (1.9.48)$$

Se $s(t_f)$ fosse estritamente menor que a integral, ou seja $s(t_f) < \int_{t_i}^{t_f} |\bar{v}(t)| dt$ a

desigualdade (1.9.48) resultaria numa contradição. Pois a existência dos limites significa que existe um número natural K tal que para todo $k > K$ vale

$$\left| I_k - \int_{t_i}^{t_f} |\bar{v}(t)| dt \right| < \frac{\int_{t_i}^{t_f} |\bar{v}(t)| dt - s(t_f)}{3} \quad \text{e} \quad |D_k| < \frac{\int_{t_i}^{t_f} |\bar{v}(t)| dt - s(t_f)}{3} \quad (1.9.49)$$

Então

$$\begin{aligned} s(t_f) - \int_{t_i}^{t_f} |\bar{v}(t)| dt &\geq \left\{ I_k - \int_{t_i}^{t_f} |\bar{v}(t)| dt \right\} - D_k \geq \\ &\geq - \left| I_k - \int_{t_i}^{t_f} |\bar{v}(t)| dt \right| - |D_k| > -2 \frac{\int_{t_i}^{t_f} |\bar{v}(t)| dt - s(t_f)}{3} = \frac{2}{3} \left(s(t_f) - \int_{t_i}^{t_f} |\bar{v}(t)| dt \right) \end{aligned} \quad (1.9.50)$$

Isto contradiz a hipóteses $s(t_f) < \int_{t_i}^{t_f} |\bar{v}(t)| dt$, o que comprova $s(t_f) \geq \int_{t_i}^{t_f} |\bar{v}(t)| dt$. Junto

com (1.9.43) temos então

$$s(t_f) = \int_{t_i}^{t_f} |\bar{v}(t)| dt \quad (1.9.51)$$