

2 - Dinâmica

2.1 A segunda e terceira lei de Newton

Qual é o conteúdo físico da segunda lei de Newton? Esta lei tem realmente um conteúdo empírico ou ela simplesmente define força e massa? Uma única equação que é definição de duas grandezas e ainda por cima esperamos que ela tenha algum significado empírico! Há físicos que afirmam que a segunda lei de Newton somente tem sentido quando ela for acompanhada por uma teoria das forças. Sem dúvida, uma teoria de forças aumenta consideravelmente a utilidade da mecânica. Mas as teorias de força não definem força. Eles se referem de novo ao produto de massa e aceleração. As leis de Newton têm conteúdo, caso contrário, não havia tantas aplicações úteis delas. Mas, qual é o conteúdo? A formulação da mecânica clássica com as três leis de Newton é compacta e elegante, mas ela não permite ver com clareza quais partes são simplesmente definições e quais são os conteúdos empíricos, isto é, afirmações que poderiam ser falsas e que precisam de comprovação experimental. A primeira lei de Newton diz respeito aos próprios conceitos de espaço e tempo. Já analisamos estes conceitos exaustivamente. Agora analisaremos o conteúdo físico da segunda e terceira lei de Newton.

Consideramos um sistema de N partículas pontuais que podem interagir entre si, mas o sistema deve ficar longe de influências externas. O número de partículas pode ser arbitrariamente grande e podemos até permitir que se acrescentem partículas. A meta é a elaboração de leis que permitam prever o comportamento de sistemas de partículas. Relações matemáticas que permitam estas previsões são chamadas de *dinâmica*. A dinâmica de um sistema pode ser extremamente complicada e muitos fatores podem entrar nas equações matemáticas. Mas existe certo tipo de partículas pontuais tais que a dinâmica de sistemas destas partículas pode ser formulada inteiramente em termos de propriedades permanentes das partículas e em termos de dados espaço-temporais tais como posições, velocidades etc. . Chamaremos este tipo de partícula de *partícula elementar* ou mais precisamente *partícula elementar da mecânica clássica*.

A noção de partícula elementar sofre várias mudanças no desenvolvimento da física. Na física quântica relativística Eugene Paul Wigner¹ deu uma definição famosa de partícula elementar em termos de representações irredutíveis do grupo de Poincaré. Mesmo esta definição famosa não tem um domínio de validade irrestrito. Se perguntarmos um físico de partículas o que é uma partícula elementar ele pensará logo em quarks, e estes não se encaixam na definição de Wigner. Eles são simplesmente variáveis dinâmicas que permitem uma descrição da dinâmica em termos simples, então algo parecido com o conceito de partícula elementar que estamos propondo aqui na mecânica clássica. Quando falarmos aqui de partícula elementar não estamos pensando em partículas elementares da física quântica, mas em objetos da mecânica clássica que permitem uma descrição simples da dinâmica.

Poderíamos formular neste ponto uma lei empírica que afirma a existência de partículas que permitam uma formulação da dinâmica somente em termos de propriedades permanentes das partículas e em termos de grandezas espaço-temporais. Mas como a formulação da dinâmica não está feita ainda, esta lei seria muito vaga e praticamente

¹ **Eugene Paul Wigner** 1902 Budapeste – 1, 1995 Princeton. Formado em engenharia química, se tornou um dos físicos teóricos mais importantes do século XX. Ele introduziu os conceitos de simetria da mecânica quântica.

não apta para ser corroborada experimentalmente. Então é preferível mencionar a existência de partículas especialmente simples em cada uma das leis subseqüentes que compõem a teoria da dinâmica da mecânica clássica.

Lei 13: Existem partículas pontuais tais que as acelerações das partículas de um sistema de N destas partículas não podem ser escolhidas independentemente das posições e velocidades. Isto é, as acelerações são funções das posições e velocidades. Além disso, estas funções são diferenciáveis.

$$\vec{a}_k(t) = \vec{A}_k(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t), \vec{v}_1(t), \vec{v}_2(t), \dots, \vec{v}_N(t)) \quad ,$$

$$A_k(\quad) \text{ diferenciáveis } \quad k=1, 2, \dots, N$$

(2.1.1)

Esta lei tem enorme importância prática. Imagine que preparemos um sistema com diversas posições e velocidades e medimos as acelerações até obtermos um enorme conjunto de dados. Podemos tentar ajustar funções simples a estes dados e usar estas funções de ajuste como uma descrição aproximada daquelas funções A_k cuja existência é afirmada na lei. Uma vez que temos expressões confiáveis das funções A_k a fórmula (2.1.1) deixa de ser um sistema de simples igualdades e se transforma em algo sumamente importante. As N igualdades (2.1.1) se transformam num sistema de N equações diferenciais.

Vale explicar o conceito de equação diferencial mais detalhadamente, já que equações diferenciais são usadas para formular as principais leis da física. Primeiramente temos que explicar o conceito de equação. Equação é algo mais do que uma simples igualdade. Geralmente usamos a palavra equação para igualdades que contem algum objeto desconhecido, chamado de *incógnita*, e a equação tem o papel de uma charada. Deve-se procurar o objeto adequado tal que a igualdade seja válida. Todos conhecemos equações algébricas como as equações quadráticas $x^2 + 5x - 20 = 0$. Neste caso a incógnita é um número. Mas, podem-se formular equações com incógnitas de diferentes naturezas. Por exemplo, podemos procurar um vetor desconhecido, uma matriz desconhecida ou qualquer outro objeto matemático. As incógnitas das equações diferenciais são funções. Uma equação diferencial exige a validade de igualdades para todos os valores da variável (ou das variáveis) independente(s) da função incógnita. A equação contém valores da ou das derivadas da função incógnita (às vezes incluindo a derivada número zero, isto é a própria função). O grau mais alto de derivada da incógnita que aparece na equação é chamado ordem da equações diferencial.

Um exemplo excelente de uma equação diferencial é fornecido pelas cadernetas de poupança. Seja $f(t)$ o capital investido na caderneta no instante t . A regra de jogo da caderneta é: o lucro, isto é a taxa de crescimento do capital, é proporcional ao valor do capital.

$$\frac{df(t)}{dt} = \lambda f(t) \quad (2.1.2)$$

O coeficiente de proporcionalidade é a taxa de juros. Esta é uma equação diferencial de primeira ordem. Todos conhecem as soluções desta equação:

$$f(t) = A \exp\{\lambda t\} \quad (2.1.3)$$

Aliais pode-se usar esta equação diferencial para definir a função exponencial. O que chama atenção é o fato que a solução não é única, pois a constante A pode ter qualquer valor. Então a equação (2.1.2) tem um número infinito de soluções. Poder-se-ia julgar uma charada com um número infinito de soluções uma charada fraca e inútil. Mas, ao contrário, justamente por admitir um número infinito de soluções as equações diferenciais são tão úteis. As incógnitas do sistema de equações diferenciais (2.1.1) são as N funções $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t)$. Cada solução deste sistema de equações diferenciais corresponde a um possível movimento do sistema de N partículas. Um sistema de N partículas pode-se mover de muitas maneiras diferentes. Todas estas maneiras podem ser descritas pelo mesmo sistema de equações. Então ter um número infinito de soluções é justamente o ponto forte deste tipo de charada.

Quando se quer estudar uma única solução tem que se especificá-la. Uma maneira de se fazer isto é por meio de *condições iniciais*. No caso da equação da caderneta de poupança (2.1.2) teria que especificar o capital inicial, ou seja o valor $f(0)$. Este valor é igual à constante A e a escolha do capital inicial seleciona uma única solução do conjunto infinito de soluções. No caso do sistema de equações (2.1.1) teria que especificar todas as posições das partículas num dado instante, por exemplo no instante $t=0$, e também todas as velocidades. Uma N -upla de posições $\langle P_1, P_2, \dots, P_N \rangle$ que corresponde aos respectivos partículas é chamada de *configuração do sistema*. Então uma condição inicial de N partículas consiste da especificação da configuração junto com uma especificação da taxa de mudança da configuração.

Podemos entender que estes dados são suficientes para determinar uma solução. Com dados valores de $\vec{r}_1(0), \vec{r}_2(0), \dots, \vec{r}_N(0)$ e $\vec{v}_1(0), \vec{v}_2(0), \dots, \vec{v}_N(0)$ as equações (2.1.1) determinam os valores $\vec{a}_1(0), \vec{a}_2(0), \dots, \vec{a}_N(0)$. Para facilitar a escrita das fórmulas dos argumentos subseqüentes vamos expressar todos os vetores numa base ortonormal $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ e escrever o sistema de equações (2.1.1) em termos das componentes dos vetores nesta base

$$a_{k,\alpha}(t) = A_{k,\alpha}(r_{1,1}(t), r_{1,2}(t), \dots, r_{N,3}(t), v_{1,1}(t), v_{1,2}(t), \dots, v_{N,3}(t)) \quad ,$$

$$k = 1, 2, \dots, N \quad \alpha = 1, 2, 3$$

(2.1.4)

O primeiro índice de cada variável numera as partículas e o segundo índice se refere às componentes na base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Por exemplo $\vec{r}_k = \hat{e}_1 r_{k,1} + \hat{e}_2 r_{k,2} + \hat{e}_3 r_{k,3}$.

Derivando as equações (2.1.4) obtemos

$$\ddot{r}_{k,\alpha}(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial A_{k,\alpha}(\xi_{1,1}, \dots, \xi_{N,3}, \Psi_{1,1}, \dots, \Psi_{N,3})}{\partial \xi_{n,\beta}} \Big|_{\xi_{1,1}=r_{1,1}(t), \dots, \Psi_{N,3}=v_{N,3}(t)} \times v_{n,\beta}(t) +$$

$$+ \sum_{n=1}^N \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial A_{k,\alpha}(\xi_{1,1}, \dots, \xi_{N,3}, \Psi_{1,1}, \dots, \Psi_{N,3})}{\partial \Psi_{n,\beta}} \Big|_{\xi_{1,1}=r_{1,1}(t), \dots, \Psi_{N,3}=v_{N,3}(t)} \times a_{n,\beta}(t)$$

(2.1.5)

Com dados valores de $r_{1,1}(0), r_{1,2}(0), \dots, r_{N,3}(0), v_{1,1}(0), v_{1,2}(0), \dots, v_{N,3}(0)$ as fórmulas (2.1.4) determinam os valores $a_{1,1}(0), a_{1,2}(0), \dots, a_{N,3}(0)$. Substituindo de sua vez, estes valores nas fórmulas (2.1.5) obtemos os valores das derivadas terceiras no instante $t=0$. Podemos seguir com este jogo indefinidamente, podemos derivar a

(2.1.5) e substituir os valores das derivadas terceiras para obter os valores das derivadas quartas, derivar a derivada da (2.1.5), substituir ,..... ad infinitum. Seguindo desta forma se determinam as derivadas das funções incógnitas de qualquer ordem. Agora esperamos das funções, que descrevem um sistema real, que eles sejam funções analíticas, isto é podem ser escritas como séries de Taylor. Como vimos que as equações diferenciais junto com os dado de $r_{1,1}(0), r_{1,2}(0), \dots, r_{N,3}(0), v_{1,1}(0), v_{1,2}(0), \dots, v_{N,3}(0)$ determinam todas as derivadas no instante inicial podemos concluir que as funções $r_{1,1}(\cdot), r_{1,2}(\cdot), \dots, r_{N,3}(\cdot)$ são determinadas.

Há toda uma teoria de equações diferenciais. Este campo da matemática se ocupa com quatro questões: (a) teoremas de existência de soluções, (b) teoremas de unicidade de solução com certas condições (por exemplo condições iniciais), (c) técnicas para encontrar soluções e (d) investigar a estabilidade de soluções. Este último ponto investiga se uma solução depende fortemente das condições iniciais e esta questão é ligada ao campo da pesquisa do caos.

Depois desta digressão sobre equações diferenciais podemos formular a lei 13 de forma sucinta: existem partículas cujos sistemas tem uma dinâmica descrita por um sistema de equações diferenciais de segunda ordem na qual as acelerações aparecem de forma linear. Formulamos esta lei num referencial qualquer. As leis restantes serão formuladas num referencial inercial.

Lei 14 (lei de superposição): Existem partículas que se encaixam da categoria das partículas da lei 13 e, num referencial inercial as funções \vec{A}_k podem ser escritas como soma de funções que dependem das variáveis de todos os pares de partículas $\langle k, l \rangle$ com $l \neq k$:

$$\vec{A}_k(\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \dots, \vec{r}_N(t), \vec{v}_1(t), \vec{v}_2(t), \dots, \vec{v}_N(t)) = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \vec{g}_{kl}(\vec{r}_k, \vec{r}_l, \vec{v}_k, \vec{v}_l)$$

(2.1.6)

Vamos chamar os vetores \vec{g}_{ab} de acelerações parciais. À primeira vista, um teste experimental desta lei parece ser complicado. Mas, de fato isto não é tão complicado. Quando formulamos a lei 6, que tratava das partículas livres, vimos que a influência de uma partícula sobre outra diminui com a distância. Então podemos preparar um sistema de N partículas de tal forma que duas das partículas, digamos as partículas a e b , fique muito afastadas dos demais partículas. Estudando as acelerações destas partículas separadas determinamos as funções \vec{g}_{ab} e \vec{g}_{ba} . Podemos fazer isto com todos os pares. Uma vez determinadas estas funções podemos testar se para configurações gerais as aceleração são realmente somas destas acelerações parciais previamente determinadas. Com o truque que separa pares podemos ainda testar as próximas leis:

Lei 15: Existem partículas que se encaixam na lei 13 e 14 e para os quais para todos os pares $\langle a, b \rangle$ de partículas distintas vale que \vec{g}_{ab} e \vec{g}_{ba} são colineares e apontam em sentidos contrários.

$$\vec{g}_{ab} = \mu_{ba} \vec{g}_{ba} \quad \text{com } \mu_{ba} \in \mathbb{R}, \quad \mu_{ba} < 0 \quad (2.1.7)$$

e os fatores numéricos μ_{ab} dependem somente das partículas.

Necessariamente temos

$$\mu_{ab} = \frac{1}{\mu_{ba}} \quad (2.1.8)$$

Lei 16: Para qualquer terna $\langle a, b, c \rangle$ de partículas, daquelas que se encaixam nas leis 13,14, e15, com $a \neq b, a \neq c, b \neq c$ vale

$$|\vec{g}_{ab}| |\vec{g}_{bc}| |\vec{g}_{ca}| = |\vec{g}_{ac}| |\vec{g}_{cb}| |\vec{g}_{ba}| \quad (2.1.9)$$

Com estas leis empíricas vamos definir uma relação \sim_m no conjunto de partículas:

(a) para todas as partículas deve valer $a \sim_m a$

(b) Para partículas distintas a, b deve valer

$$a \sim_m b \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \mu_{ba} = -1 \quad (2.1.10)$$

Com a fórmula (2.1.8) percebemos imediatamente que esta relação é simétrica; $a \sim_m b \Rightarrow b \sim_m a$.

Agora vamos mostrar que esta relação é transitiva: com (2.1.7) e com $\mu_{ba} < 0$ podemos escrever a (2.1.9) na seguinte forma:

$$\mu_{ba} \mu_{cb} \mu_{ac} = -1 \quad (2.1.11)$$

Agora sejam partícula a, b, c dadas tal que $a \sim_m b$ e que $b \sim_m c$. Temos que mostrar que $a \sim_m c$. Se $a=b$ ou $b=c$ ou $a=c$ a afirmação $a \sim_m c$ é trivialmente válida. Então vamos supor $a \neq b, b \neq c$ e $a \neq c$, e conseqüentemente μ_{ba}, μ_{cb} e μ_{ca} existem. Com $a \sim_m b$ e $b \sim_m c$ sabemos que $\mu_{ba} = -1$ e $\mu_{cb} = -1$. Então a (2.1.11) toma a forma $(-1) \times (-1) \times \mu_{ca} = -1$. Então segue $\mu_{ca} = -1$ e mostramos que $a \sim_m c$. Então a relação \sim_m é uma relação de equivalência.

Veremos agora como as classes de equivalência podem ser caracterizadas de forma elegante. Podemos escrever a fórmula (2.1.11) como

$$\mu_{ba} = -\frac{1}{\mu_{cb} \mu_{ac}} \quad (2.1.12)$$

e com a (2.1.8)

$$\mu_{ba} = -\frac{\mu_{bc}}{\mu_{ac}} \quad (2.1.13)$$

Se escolhermos uma partícula c como uma referência fixa podemos expressar a relação $a \underset{m}{\sim} b$ também da seguinte maneira:

$$a \underset{m}{\sim} b \Leftrightarrow \mu_{ac} = \mu_{bc} \quad (2.1.14)$$

Então a partícula de referência c junto com o número negativo μ_{ac} caracteriza as classes de equivalência. Podemos usar o par $\langle \mu_{ac}, c \rangle$ como nome da classe de equivalência que contem a partícula a . Temos tudo para formar uma grandeza física. Os valores são os pares $\langle \mu_{ac}, c \rangle$ e a soma tem a seguinte definição natural:

$$\langle \alpha, c \rangle + \langle \beta, c \rangle \stackrel{def.}{=} \langle \alpha + \beta, c \rangle \quad (2.1.15)$$

Podemos usar o valor $\langle -1, c \rangle$ como unidade e escrever um valor $\langle \alpha, c \rangle$ qualquer como

$$\langle \alpha, c \rangle = -\alpha \langle -1, c \rangle \quad (2.1.16)$$

Esta nova grandeza é chamada de massa da partícula. Geralmente usamos a letra m para esta grandeza e vamos escrever o valor $\langle \mu_{ac}, c \rangle$ como m_a .

Com a (2.1.13) e com esta nova grandeza massa podemos escrever a (2.1.7) na forma

$$\vec{g}_{ab} = -\frac{m_b}{m_a} \vec{g}_{ba} \quad (2.1.17)$$

Ou, usando nossa definição de produto de grandezas unidimensionais com grandezas, podemos escrever isto ainda como

$$m_a \vec{g}_{ab} = -m_b \vec{g}_{ba} \quad (2.1.18)$$

Agora é conveniente introduzir mais uma nova grandeza que é simplesmente uma abreviação do produto de massa e aceleração parcial:

<p>Definição: $\vec{F}_{ab} \stackrel{def.}{=} m_a \vec{g}_{ab}$ (2.1.19)</p>
--

Vamos dizer: \vec{F}_{ab} é a força que b exerce sobre a .

Com esta definição as fórmulas (2.1.1), (2.1.6) e (2.1.18) tomam a forma

$m_a \vec{a}_a = \sum_{b \neq a} \vec{F}_{ab}$	(2.1.20)
--	----------

e

$\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}$	(2.1.21)
--------------------------------	----------

Estas fórmulas são conhecidas como a segunda e terceira lei de Newton respectivamente.

Na definição de simultaneidade mencionamos que a validade da mecânica clássica é restrita. Esta restrição tem também conseqüências para as leis formuladas nesta secção. Medindo com muita precisão e grande resolução temporal se percebe que a terceira lei de Newton não é válida. Mas, aqui vamos supor sua validade até o momento de entrarmos na teoria da relatividade e na teoria de campos com tratamento relativístico.

Definimos o que significa a força que uma partícula elementar exerce sobre outra. Um par de partículas a, b está associado de forma permanente a uma função de força \vec{F}_{ab} .

Faz parte da noção de partícula elementar clássica, que esta função seja uma propriedade permanente das duas partículas. Podemos coletar dados que permitam estabelecer teorias de forças de tal forma que futuramente não precisemos mais levantamentos enormes de dados para poder conhecer as funções \vec{F}_{ab} . Basta fazer algumas poucas medidas para decidir de que tipo são as partículas a , e b e com a determinação do tipo já saberemos a expressão da função \vec{F}_{ab} . Naturalmente estas teorias tornarão a mecânica um instrumento muito mais útil para aplicações.

As forças conhecidas entre partículas elementares que podem ser observadas dentro do contexto da mecânica clássica são a força gravitacional, a força elétrica e forças de curto alcance. Com algumas restrições que discutiremos mais tarde, a força magnética também poderia ser contada como força dentro do contexto da mecânica clássica, mas no momento vamos excluí-la. A força entre duas partículas elementares clássicas a , b nas respectivas posições \vec{r}_a e \vec{r}_b pode ser descrita pela seguinte expressão

$$\vec{F}_{ab}(\vec{r}_a, \vec{r}_b) = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3} (\vec{r}_a - \vec{r}_b) + \frac{q_a q_b}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3} (\vec{r}_a - \vec{r}_b) + \frac{\vec{r}_a - \vec{r}_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|} N_{ab}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|)$$

(2.1.22)

Nesta expressão q_a e q_b são valores de uma nova grandeza que caracteriza as partículas. Falamos no parágrafo anterior que uma teoria de forças permite substituir um enorme levantamento de dados por poucas medidas para estabelecer o tipo de partícula e com o tipo determinado já saberemos a expressão da força. Então os parâmetros q_a e q_b são justamente os que especificam o tipo de partícula. Eles são valores da grandeza *carga elétrica*. A constante estranha $4\pi\epsilon_0$ não precisa nos incomodar no momento, ela está associada à maneira como a grandeza carga elétrica é definida.

Os primeiros dois termos da expressão no lado direito da fórmula (2.1.22) tem a mesma dependência espacial. O módulo da força cai quadraticamente com a distância das partículas. O primeiro termo descreve a atração gravitacional. A constante G foi medido pela primeira vez (1797–1798) por Henry Cavendish² com um instrumento construído por John Michell³, embora Cavendish não expressou seu resultado em termos de um valor de G , mas em termos da densidade da Terra. O valor medido com métodos modernos vale

$$G = 6,67384(80) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg s}^{-2} \quad (2.1.23).$$

O terceiro termo do lado direito descreve as forças de curto alcance. A função N_{ab} , que mapeia o espaço-valor de distâncias no espaço-valor de módulos de forças, cai rapidamente para zero. Tipicamente acima de distâncias de um micrometro esta parcela

² Henry Cavendish 1731 –1810. Químico e Físico fez importantes descobertas, muitas não publicadas que foram encontradas nas suas anotações após sua morte. Descobriu hidrogênio. Ele interpretou calor mecanicamente.

³ John Michell 1724 – 1793. Teórico e experimentador que trabalhou em diversas áreas: astronomia, geologia, gravitação, óptica, eletromagnetismo. Ele foi o primeiro a considerar objetos tão densos que luz seria incapaz de escapar destes objetos (estrelas escuras, hoje chamados de buracos negros). Ele também estava prevendo desvio para o vermelho gravitacional e ele tentou detectar pressão de radiação. Michell morreu antes de poder fazer a medida da atração gravitacional com a balança que ele construiu e que foi posteriormente usada por Cavendish.

começa a ser desprezível. Hoje sabemos que esta força de curto alcance é na verdade uma manifestação da própria força eletromagnética. As partículas que consideramos elementares na mecânica clássica frequentemente resultam ser compostas num nível mais microscópico. Se as partículas que compõem uma determinada partícula são eletricamente carregadas as forças elétricas destas podem resultar em forças efetivas de curto alcance. Na próxima seção discutiremos partículas compostas e forças efetivas. Mas, infelizmente não poderemos mostrar como as forças de curto alcance resultam das forças elétricas. Esta explicação das forças de curto alcance ultrapassa a validade da mecânica clássica e precisa da mecânica quântica.