

2.3 Exemplos de sistemas mecânicos

A grande maioria das aplicações da mecânica trata de sistemas perto do globo terrestre. Apesar da força gravitacional ser uma força extremamente fraca, a força resultante somando todas as forças gravitacionais exercidas por todas as partículas dentro da Terra é consideravelmente forte. O fato da atração gravitacional ser muito fraca e resultar numa força apreciável somente quando somada sobre imensos números de partículas traz uma vantagem para os nossos cálculos. A força gravitacional resultante que atua sobre um objeto perto da Terra não muda praticamente nada se cavarmos um buraco embaixo do objeto ou se colocarmos um bloco de chumbo na sala ao lado do nosso laboratório. Então muitos detalhes da forma exata da Terra não importam e podemos aproximar a Terra por uma forma geométrica simples com uma distribuição de massa simples. Como veremos futuramente, a Terra não é exatamente uma esfera. Mas, o desvio da forma esférica é pequeno, na ordem de 0,3%. Aqui vamos tratar a Terra como um objeto esfericamente simétrico. Se considerarmos um átomo como partícula elementar da mecânica clássica teríamos aproximadamente 10^{50} partículas elementares na Terra. O cálculo de uma soma de 10^{50} forças seria impraticável. Vamos substituir este imenso número de partículas por uma distribuição contínua de matéria de densidade ρ e substituir o somatório por uma integral de volume. A densidade pode depender da posição, mas vamos supor uma função esfericamente simétrica. Com a origem de coordenadas no centro da Terra a densidade depende apenas do módulo do vetor posição \vec{r}_μ dos elementos de massa. Vamos calcular a força gravitacional resultante $\vec{F}(\vec{r})$ que atua sobre uma partícula de massa m na posição \vec{r} :

$$\vec{F}(\vec{r}) = -Gm \iiint_{|\vec{r}_\mu| \leq R} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_\mu)}{|\vec{r} - \vec{r}_\mu|^3} \rho(|\vec{r}_\mu|) d^3\vec{r}_\mu \quad (2.3.1)$$

onde $d^3\vec{r}_\mu$ é o elemento de volume da integração, R é o raio de Terra e a indicação $|\vec{r}_\mu| \leq R$ delimita o volume de integração. Para um cálculo concreto desta integral de volume vamos escolher coordenadas esféricas com um eixo z tal que $\vec{r} = |\vec{r}| \hat{z}$. Pela simetria é claro que somente a componente z das forças sobrevive na integração. As componentes x e y se anulam.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\hat{z} Gm \int_{r_\mu=0}^R \int_{\theta_\mu=0}^\pi \int_{\phi_\mu=0}^{2\pi} \frac{(|\vec{r}| - r_\mu \cos(\theta_\mu))}{|\vec{r} - \vec{r}_\mu|^3} \rho(r_\mu) r_\mu^2 \sin(\theta_\mu) d\phi_\mu d\theta_\mu dr_\mu \quad (2.3.2)$$

Obtemos o módulo de $\vec{r} - \vec{r}_\mu$ com a ajuda do produto escalar:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_\mu| &= \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r} + \vec{r}_\mu \cdot \vec{r}_\mu - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_\mu} = \\ &= \sqrt{r^2 + r_\mu^2 - 2r r_\mu \cos(\theta_\mu)} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

onde abreviamos $|\vec{r}|$ com r . Percebemos que nada na integral depende do ângulo azimutal ϕ_μ e portanto a integral sobre esta variável pode ser feita imediatamente dando um fator 2π :

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\hat{z} G m 2\pi \int_{r_\mu=0}^R \int_{\theta_\mu=0}^{\pi} \frac{(r - r_\mu \cos(\theta_\mu))}{(r^2 + r_\mu^2 - 2 r r_\mu \cos(\theta_\mu))^{\frac{3}{2}}} \rho(r_\mu) r_\mu^2 \sin(\theta_\mu) d\theta_\mu dr_\mu$$

(2.3.4)

Esta integral parece um tanto assustador, mas a função que deve ser integrada toma um aspecto bem mais amigável se a escrevermos como derivada em relação à variável r :

$$\begin{aligned} & \frac{(r - r_\mu \cos(\theta_\mu))}{(r^2 + r_\mu^2 - 2 r r_\mu \cos(\theta_\mu))^{\frac{3}{2}}} \rho(r_\mu) r_\mu^2 \sin(\theta_\mu) = \\ & = -\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\rho(r_\mu) r_\mu^2 \sin(\theta_\mu)}{\sqrt{r^2 + r_\mu^2 - 2 r r_\mu \cos(\theta_\mu)}} \right\} \end{aligned}$$

(2.3.5)

Com este truque a força toma a forma

$$\vec{F}(\vec{r}) = \hat{z} G m 2\pi \frac{d}{dr} \int_{r_\mu=0}^R \int_{\theta_\mu=0}^{\pi} \frac{\rho(r_\mu) r_\mu^2 \sin(\theta_\mu)}{\sqrt{r^2 + r_\mu^2 - 2 r r_\mu \cos(\theta_\mu)}} d\theta_\mu dr_\mu$$

(2.3.6)

Na integração em relação à variável θ_μ podemos fazer a seguinte substituição de variáveis:

$$\begin{aligned} \eta & \stackrel{def.}{=} \sqrt{r^2 + r_\mu^2 - 2 r r_\mu \cos(\theta_\mu)} \\ d\eta & = \frac{r r_\mu \sin(\theta_\mu)}{\sqrt{r^2 + r_\mu^2 - 2 r r_\mu \cos(\theta_\mu)}} d\theta_\mu \end{aligned}$$

(2.3.7)

Com esta substituição a integral toma a forma

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) & = \hat{z} G m 2\pi \frac{d}{dr} \int_{r_\mu=0}^R \int_{\eta=\sqrt{r^2+r_\mu^2-2rr_\mu}}^{\sqrt{r^2+r_\mu^2+2rr_\mu}} \frac{r_\mu}{r} \rho(r_\mu) d\eta dr_\mu = \\ & = \hat{z} G m 2\pi \int_{r_\mu=0}^R \frac{\partial}{\partial r} \left[\left\{ \sqrt{r^2 + r_\mu^2 + 2 r r_\mu} - \sqrt{r^2 + r_\mu^2 - 2 r r_\mu} \right\} \frac{r_\mu}{r} \right] \rho(r_\mu) dr_\mu \end{aligned}$$

(2.3.8)

A diferença das raízes resulta numa expressão muito simples:

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2 + r_\mu^2 + 2 r r_\mu} - \sqrt{r^2 + r_\mu^2 - 2 r r_\mu} & = r + r_\mu - |r - r_\mu| = \\ & = \begin{cases} 2r_\mu & \text{para } r \geq r_\mu \\ 2r & \text{para } r \leq r_\mu \end{cases} \end{aligned}$$

(2.3.9)

No caso $r \leq r_\mu$ obtemos uma expressão que independe de r e a derivada $\partial/\partial r$ anula o integrando. Então podemos restringir a integral de r_μ para valores menores do que r :

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\hat{z} G m 2\pi \int_{r_\mu=0}^r 2r_\mu^2 \frac{1}{r^2} \rho(r_\mu) dr_\mu \quad (2.3.10)$$

A integral $M(r) \stackrel{\text{def.}}{=} 4\pi \int_{r_\mu=0}^r r_\mu^2 \rho(r_\mu) dr_\mu$ é exatamente a massa contida na esfera de

raio r e centro no centro da massa esférica: Com isto temos o resultado final. Podemos agora retirar o nosso sistema de coordenadas e escrever o resultado de forma vetorial:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -GmM(|\vec{r}|) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.3.11)$$

Podemos formular este resultado verbalmente: A força gravitacional exercida por uma distribuição de massa esfericamente simétrica é igual à força gravitacional de uma massa pontual no centro cujo valor de massa é toda a massa da distribuição que fica menos afastada do centro do que a massa sobre a qual atua a força. Isaac Newton retardou a publicação dos seus resultados importantíssimos de mecânica por vinte anos, porque ele considerou o seu trabalho incompleto sem uma demonstração deste resultado. Considerando que todo cálculo diferencial e integral era completamente novo, de fato inventado pelo próprio Newton, é muito admirável que ele conseguiu fazer esta demonstração em vinte anos. Hoje todo bom aluno de Física III consegue este resultado com muita facilidade usando a lei de Gauss.

A massa total da Terra vale $5,9736 \times 10^{24}$ kg . Num capítulo futuro explicaremos como este valor pode ser determinado. Quando estudarmos os movimentos de um corpo de alguns quilogramas ou até algumas toneladas perto da Terra os movimentos deste corpo praticamente não alteram a posição do centro de massa da Terra. Como mencionamos no início desta seção, cavar um buraco ou colocar um bloco pesado de metal ao lado das nossas experiências também não muda a força gravitacional resultante apreciavelmente. Então possíveis deformações da Terra causadas pelo movimento de um corpo de algumas toneladas também não causam praticamente nenhuma alteração da força gravitacional resultante. Então a expressão (2.3.11) pode ser tratada como uma força externa conhecida com excelente precisão.

Primeiramente vamos considerar o caso de uma massa pontual numa distância r maior que o raio da Terra. Neste caso a fórmula (2.3.11) se reduz a

$$\vec{F}(\vec{r}) = -GmM_T \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.3.12)$$

onde M_T é a massa total da Terra.

Para pontos dentro de uma sala de laboratório estamos a todo rigor um pouco mergulhado dentro da Terra, pois há alguns quilômetros de ar acima dos nossos prédios. Mas, para muitas aplicações as exigências de precisão são suficientemente baixas para podermos desprezar esta pequena falta de massa; $M_T \approx M_{T \text{ parte não gasosa}}$. Dentro de um laboratório que mede algumas dezenas de metros podemos ainda desprezar totalmente a dependência da força da posição e podemos substituir \vec{r} por algum vetor posição fixo

\vec{r}_0 que aponta do centro da Terra para algum ponto qualquer dentro do laboratório. Com esta aproximação, válida dentro de um volume restrito, a força gravitacional da Terra seria constante:

$$\text{para pontos dentro do laboratório: } \vec{F}(\vec{r}) \approx -GmM_T \frac{\vec{r}_0}{|\vec{r}_0|^3} \quad (2.3.13)$$

Vamos chamar $GM_T |\vec{r}_0|^{-2}$ de “aceleração da gravidade provisória” g_P :

$$g_P \stackrel{\text{def.}}{=} GM_T |\vec{r}_0|^{-2} \quad (2.3.14)$$

e o vetor unitário $\vec{r}_0 / |\vec{r}_0|$ de “vertical para cima provisória” $\hat{\uparrow}_P$:

$$\hat{\uparrow}_P \stackrel{\text{def.}}{=} \vec{r}_0 / |\vec{r}_0| \quad (2.3.15).$$

Usamos o adjetivo provisória porque mais tarde descobriremos que aquilo que se mede na prática como aceleração da gravidade e como vertical diferem ligeiramente das expressões (2.3.14) e (2.3.15). Definimos:

A direção vertical num ponto de um referencial é a direção de equilíbrio do fio de um prumo pendurado neste ponto.

Um prumo é uma partícula pendurada num fio flexível mantida em condições tais que as únicas forças que atuam sobre a partícula são a força exercida pelo fio e forças proporcionais à massa e as únicas forças que atuam sobre elementos do fio são forças proporcionais a massa, forças exercidas por elementos vizinhos do fio e, no caso dos elementos extremos, forças exercidas pelo suporte fixo e pela partícula.

Então dentro do laboratório temos

$$\text{para pontos dentro do laboratório: } \vec{F}(\vec{r}) \approx -\hat{\uparrow}_P g_P m \quad (2.3.16)$$

Agora vamos imaginar uma partícula de massa m sujeita somente a esta força: A segunda lei de Newton desta partícula seria:

$$m \ddot{\vec{r}} = -\hat{\uparrow}_P g_P m \quad (2.3.17)$$

onde \vec{r} é o vetor posição da partícula. Esta equação diferencial tem a solução geral

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \hat{\uparrow}_P \frac{g_P}{2} t^2 \quad (2.3.18)$$

onde \vec{r}_0 e \vec{v}_0 são as constantes que podem ser ajustadas para adaptar a solução a dadas condições iniciais. Esta solução é bem conhecida.

Vamos tornar o problema um pouco mais complicado. Vamos imaginar que a partícula se mova dentro do ar atmosférico. Neste caso temos um problema de muitíssimos corpos, pois a partícula que está caindo interage com um número imenso de moléculas do ar. Mas, no espírito de forças efetivas e forças externas tentaremos tratar este problema ainda como um de uma única partícula. A força efetiva exercida pelo ar sobre a partícula do nosso interesse pode ser determinada fenomenologicamente com inúmeras experiências. Somente com condições especiais conseguiríamos uma expressão da força resultante como função de dados espaço-temporais da partícula do

nosso interesse; $\vec{F}_{particula,ar}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dots)$. Seria necessário, por exemplo, exigir que o ar longe da partícula esteja em repouso no referencial usado. Para baixas velocidades e baixas acelerações da partícula obtém-se empiricamente

$$\vec{F}_{particula,ar}(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}) \approx \hat{\uparrow}_p g_p \rho_{ar} V - \upsilon \dot{\vec{r}} - \alpha \ddot{\vec{r}} \quad (2.3.19)$$

onde υ e α são constantes, υ sendo necessariamente positiva¹, V é o volume ocupado pela partícula e ρ_{ar} a densidade de massa do ar. O termo constante é devido ao empuxo do ar. Sobre o último termo, que é proporcional à aceleração, comentaremos mais tarde. O fator α é da mesma ordem de grandeza que o fator $\rho_{ar} V$ do termo de empuxo. Em muitas aplicações a densidade de massa da partícula é muito maior que a densidade do ar e nesta situação podemos desprezar o termo do empuxo assim como o termo $-\alpha \ddot{\vec{r}}$;

$$\vec{F}_{particula,ar}(\dot{\vec{r}}) \approx -\upsilon \dot{\vec{r}} \quad (2.3.20).$$

Com esta força efetiva obtemos a segunda lei de Newton

$$m \ddot{\vec{r}} = -\hat{\uparrow}_p g_p m - \upsilon \dot{\vec{r}} \quad (2.3.21)$$

Notamos que a própria incógnita \vec{r} não aparece nesta equação diferencial. Neste caso podemos reduzir o grau da equação diferencial introduzindo a nova incógnita:

$$\vec{v} \stackrel{def.}{=} \dot{\vec{r}} \quad (2.3.22)$$

Com esta a equação (2.3.21) se transforma uma equação diferencial de primeira ordem:

$$m \dot{\vec{v}} = -\hat{\uparrow}_p g_p m - \upsilon \vec{v} \quad (2.3.23)$$

Esta equação diferencial é do tipo inhomgêneo²-linear. A forma geral deste tipo de equação é

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots) = j \quad (2.3.24)$$

onde f depende linearmente da incógnita x e j não depende da incógnita. No caso do nosso exemplo a incógnita seria o vetor \vec{v} , a função linear f seria $f(\vec{v}, \dot{\vec{v}}) = m \dot{\vec{v}} + \upsilon \vec{v}$ e j seria o termo $-\hat{\uparrow}_p g_p m$. Em geral, j pode ser uma função e este termo j é chamado a inhomogeneidade. A solução geral deste tipo de equação tem uma estrutura muito especial. Imagine você conseguiu achar alguma solução da equação (2.3.24). Vamos chamar esta solução de solução particular, por ser uma única e não a solução geral. Então vamos supor que tenhamos uma solução x_p :

¹ υ é do espaço-valor de módulos de força dividido por rapidez. Como direções de vetores de diferentes espaços podem ser comparadas, existe um ordenamento natural neste espaço-valor. $\upsilon > 0$ significa que \vec{v} e $\upsilon \vec{v}$ tem a mesma direção.

² Os especialistas de letras não aceitam a palavra “inhomgêneo” por ser um mistura de latim e grego e informam que a palavra adequada seria heterogêneo. Mas, na área matemática a palavra inhomgêneo é frequentemente usada e isto permite reservar a palavra heterogêneo para outras finalidades. Por exemplo a mistura de arroz e feijão é uma mistura heterogênea.

$$f(x_p, \dot{x}_p, \ddot{x}_p, \ddot{x}_p, \dots) = j \quad (2.3.25)$$

Como achar esta solução discutiremos um pouco mais tarde. Por enquanto podemos tomar o pontos de vista que a procura desta solução é o seu problema particular. Além da equação completa (2.3.24) vamos também resolver a equação homogênea associada à equação (2.3.24):

$$f(x_H, \dot{x}_H, \ddot{x}_H, \ddot{x}_H, \dots) = 0 \quad (2.3.26)$$

Em geral a tarefa de resolver equações lineares é mais fácil. Então vamos supor que conseguimos achar logo a solução geral desta equação. Com a solução geral x_H da equação homogênea e a solução partícula x_p da equação original podemos construir a solução geral x_G da equação original: a soma

$$x_G = x_p + x_H \quad (2.3.27)$$

satisfaz a equação original. Com a linearidade de f temos

$$\begin{aligned} f(x_G, \dot{x}_G, \ddot{x}_G, \ddot{x}_G, \dots) &= f(x_p + x_H, \dot{x}_p + \dot{x}_H, \ddot{x}_p + \ddot{x}_H, \ddot{x}_p + \ddot{x}_H, \dots) = \\ &= \underbrace{f(x_p, \dot{x}_p, \ddot{x}_p, \ddot{x}_p, \dots)}_{=j} + \underbrace{f(x_H, \dot{x}_H, \ddot{x}_H, \ddot{x}_H, \dots)}_{=0} = j \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

Através da função x_H , a função x_G contém o número certo de parâmetros ajustáveis para adapta-la a dadas condições iniciais e ela é a solução geral do problema.

Veremos a aplicação deste esquema no nosso caso da equação (2.3.23). Primeiramente resolveremos a equação homogênea associada:

$$m \dot{\vec{v}}_H = -\nu \vec{v}_H \quad (2.3.29)$$

Esta equação é justamente a “equação da conta bancária” com a taxa de juros negativa $-\nu/m$ (coitado do correntista). Conhecemos a solução geral:

$$\vec{v}_H(t) = \vec{V} \exp\left\{-\frac{\nu}{m}t\right\} \quad (2.3.30)$$

O vetor \vec{V} é arbitrário e representa os parâmetros ajustáveis da solução geral. Para achar uma solução particular da equação inhomogênea existe um método conhecido com o nome de “variação da constante”. Neste método substitui-se a constante ajustável da solução geral da equação homogênea por uma função desconhecida:

$$\vec{v}_p(t) = \vec{U}(t) \exp\left\{-\frac{\nu}{m}t\right\} \quad (2.3.31)$$

Inserindo esta tentativa na equação (2.3.23) obtemos uma equação diferencial muito simples para a incógnita \vec{U}

$$m \exp\left\{-\frac{\nu}{m}t\right\} \frac{d\vec{U}(t)}{dt} = -\hat{\uparrow}_p \tilde{g}_p m \quad (2.3.32)$$

A solução é

$$\vec{U}(t) = -\hat{\uparrow}_p \frac{m \tilde{g}_p}{\nu} \exp\left\{+\frac{\nu}{m}t\right\} \quad (2.3.33)$$

Inserindo esta solução na fórmula (2.3.31) obtemos a solução particular

$$\vec{v}_p(t) = -\hat{\uparrow}_p \frac{m \tilde{g}_p}{\nu} \quad (2.3.34)$$

O método da variação da constante é poderoso, mas em muitos casos funciona também um método mais simples. Olha-se o tipo de função que aparece como inhomogeneidade e faz-se uma tentativa que emita o tipo de função. No nosso caso a inhomogeneidade é uma constante. Então vamos fazer a tentativa

$$\vec{v}_p(t) = \vec{A} \quad (2.3.35)$$

onde \vec{A} é algum vetor desconhecido e constante. Inserindo esta tentativa na equação (2.3.23) obtemos

$$0 = -\hat{\uparrow}_p \tilde{g}_p m - \nu \vec{A} \quad (2.3.36),$$

o que fornece a mesma solução particular que achamos antes com o método da variação da constante.

Agora temos todos os elementos para poder escrever a solução geral

$$\vec{v}_G(t) = -\hat{\uparrow}_p \frac{m g_p}{\nu} + \vec{V} \exp\left\{-\frac{\nu}{m}t\right\} \quad (2.3.37)$$

Podemos integrar esta solução para obter a solução do problema original (2.3.21):

$$\vec{r}_G(t) = \vec{r}_0 - \hat{\uparrow}_p \frac{m g_p}{\nu} t - \frac{m}{\nu} \vec{V} \left[\exp\left\{-\frac{\nu}{m}t\right\} - 1 \right] \quad (2.3.38)$$

Percebemos que o movimento da partícula se aproxima para grandes tempos assintoticamente de um movimento de uma partícula livre. Isto acontece porque a força de atrito com o ar acaba cancelando a força gravitacional.

É de se esperar que o atrito do ar se torne desprezível para pequenas velocidades. Se soltarmos a partícula do repouso devemos obter inicialmente um comportamento da queda livre (2.3.18) com $\vec{v}_0 = 0$. Vamos verificar isto. Escolhemos condições iniciais

$$\vec{r}(0) = \vec{R}_0, \quad \dot{\vec{r}}(0) = 0 \quad (2.3.39)$$

Da segunda condição segue

$$\vec{V} = \hat{\uparrow}_p \frac{m g_p}{\nu} \quad (2.3.40)$$

e da primeira

$$\vec{r}_0 = \vec{R}_0 \quad (2.3.41)$$

Então temos

$$\vec{r}(t) = \vec{R}_0 - \hat{\uparrow}_p \frac{m g_p}{\nu} t - \hat{\uparrow}_p \frac{m^2 g_p}{\nu^2} \left[\exp\left\{-\frac{\nu}{m}t\right\} - 1 \right] \quad (2.3.42)$$

Para pequenos tempos podemos aproximar a função exponencial pelos primeiros termos da expansão em série de Taylor:

$$\exp\left\{-\frac{\mathbf{v}}{m}t\right\} = 1 - \frac{\mathbf{v}}{m}t + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{v}}{m}t\right)^2 + O(t^3) \quad (2.3.43)$$

Então, desprezando termos de ordem superior ao quadrático em t obtemos:

$$\vec{r}(t) \approx \vec{R}_0 - \hat{\uparrow}_p \frac{g_P}{2} t^2 \quad (2.3.44)$$

Isto é o esperado comportamento de queda livre.

Permaneceremos mais um tempo no laboratório. Muitos arranjos mecânicos no laboratório envolvem cordas flexíveis para puxar objetos. Então vamos estudar alguns aspectos da mecânica de cordas. Uma corda pode ser vista como uma fileira de partículas. Podemos indicar estas partículas com algum parâmetro numérico $\xi \in [0,1]$ cujos valores servem como nomes das partículas. Apesar do conceito de partícula ser associado a um objeto individual podemos, com o mesmo espírito que usamos na substituição de uma imensa soma por uma integral na fórmula (2.3.1), pensar neste parâmetro ξ como uma variável contínua. A configuração de uma corda, isto é sua disposição no espaço, pode ser descrita com uma curva parametrizada κ no espaço que usa a variável ξ como parâmetro. As forças que atuam sobre as partículas constituintes da corda podem ser classificadas em dois tipos: forças exercidas por objetos fora da corda, e forças exercidas de uma parcela da corda sobre outra parcela da mesma corda. Vamos escrever a força que a parcela da corda com valores de parâmetro ξ maiores que um certo valor ξ_0 exerce sobre a parcela com valores de parâmetro menores que ξ_0 como \vec{F}_{ξ_0}

$$\vec{F}_{\xi_0} \stackrel{def.}{=} \text{força que a parcela além de } \xi_0 \text{ exerce sobre a parcela aquém de } \xi_0 \quad (2.3.45)$$

Vamos chamar uma corda de *totalmente flexível* se \vec{F}_{ξ_0} tiver sempre a direção do vetor tangente da curva κ no ponto $\kappa(\xi_0)$.

A configuração de uma corda pode mudar com o passar do tempo. Então temos uma curva diferente para cada instante t . Ou seja, o comportamento temporal de uma corda é descrito por uma função κ que depende não apenas do parâmetro ξ mas também do tempo de tal forma que $\kappa(\cdot, t): [0,1] \rightarrow \mathcal{E}_R$ descreve uma curva para cada valor de t .

Para cada instante t podemos definir o comprimento de arco s_κ . Vamos chamar uma corda de *inesticável* se a função s_κ não depender de t . Naturalmente as noções de flexibilidade e inesticabilidade são idealizações. As cordas reais não cumprem estas condições exatamente e depende da exigência de precisão da descrição se estas idealizações podem ser aplicadas.

Como as cordas podem-se mover de muitas formas, o tratamento da mecânica de uma corda não é simples. Mas, aqui vamos, neste momento, apenas estudar um tipo de movimento extremamente simples. Vamos imaginar uma corda guiada por algum artefato de tal forma que todas as curvas parametrizadas $\kappa(\cdot, t): [0,1] \rightarrow \mathcal{E}_R$ sejam partes de uma única curva guia γ . Podemos imaginar, por exemplo, um tubo dentro do qual a

corda pode deslizar. Na curva guia vamos usar o comprimento de curva s_γ como parâmetro padrão. Num dado instante t a curva $\kappa(\cdot, t): [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}_R^c$ ocuparia um trecho

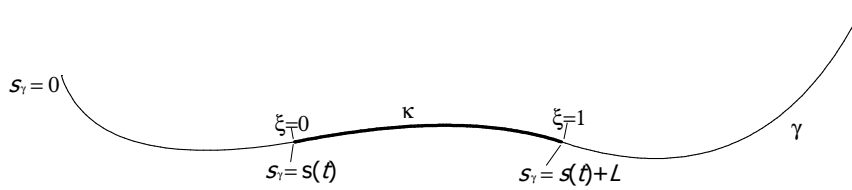


Fig. 2.3.1
Corda guiada pela curva γ

da curva γ que começa no comprimento de arco $s_\gamma = s(t)$ e termina em $s_\gamma = s(t) + L$ onde L é o comprimento da corda. Cada partícula da corda faz um movimento percorrendo a curva γ com uma velocidade $s\hat{t}$ onde \hat{t} é o vetor tangente da curva guia no ponto da partícula.

Vamos escrever a segunda lei de Newton para um pequeno pedaço de tamanho infinitesimal da corda. A massa do pedaço entre valores de parâmetro de ξ_0 e $\xi_0 + \varepsilon$ é $\lambda(\xi_0)\varepsilon$ onde $\lambda(\xi_0)$ é a densidade linear de massa da corda no ponto ξ_0 . A aceleração deste trecho é dada pela fórmula (1.9.31)

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \frac{d^2 s}{dt^2} \hat{t} + \begin{cases} |\vec{v}|^2 \frac{1}{R} \hat{n} & \text{se } \frac{d\hat{t}}{ds} \neq 0 \\ 0 & \text{se } \frac{d\hat{t}}{ds} = 0 \end{cases} = \\ &\equiv \frac{d^2 s}{dt^2} \hat{t} + a_n \hat{n} \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

Repare, no entanto, que o símbolo s aqui tem um significado diferente. Na antiga fórmula (1.9.31) s era o comprimento do caminho que a partícula percorreu entre os instantes 0 e t . Aqui s é o valor do comprimento de arco da curva guia no ponto inicial da corda. Mas, para uma corda inextensível estes dois parâmetros diferem apenas por uma constante, isto é, constante no sentido temporal, o valor desta constante depende de ξ_0 . Como na fórmula (1.9.31), ou então na fórmula atual (2.3.46), entram apenas derivadas temporais de s , podemos usar a fórmula sem problemas.

As forças que atuam sobre o pedaço de corda são: (a) forças exercidas por outras partes da corda, (b) forças exercidas pelo guia e (c) forças externas como forças gravitacional elétrica etc. . Para uma corda totalmente flexível temos

$$\vec{F}_{\xi_0} = T(\xi_0, s(t)) \hat{t}(\xi_0, s(t)) \quad (2.3.47)$$

onde $\hat{t}(\xi_0, s(t))$ é o vetor tangente no local do pedacinho e $T(\xi_0, s(t))$ é uma função escalar que chamaremos de tensão na corda no ponto do pedacinho. Estas forças são de curto alcance e, portanto, a força que o trecho além de ξ_0 exerce sobre o trecho aquém de ξ_0 é praticamente a mesma que o pedacinho entre ξ_0 e $\xi_0 + \varepsilon$ exerce sobre o trecho

além de ξ_0 . Com a terceira lei de Newton a força que o trecho além de ξ_0 exerce sobre o pedacinho entre ξ_0 e $\xi_0 + \varepsilon$ é então $-T(\xi_0, s(t)) \hat{t}(\xi_0, s(t))$. Com os mesmos argumentos de força de curto alcance concluímos que a força que o trecho além de $\xi_0 + \varepsilon$ exerce sobre o pedacinho entre ξ_0 e $\xi_0 + \varepsilon$ é dado por $T(\xi_0 + \varepsilon, s(t)) \hat{t}(\xi_0 + \varepsilon, s(t))$. Então as forças internas da corda sobre o pedacinho são:

$$\begin{aligned} \vec{F}^{\text{intern}} &= T(\xi_0 + \varepsilon, s(t)) \hat{t}(\xi_0 + \varepsilon, s(t)) - T(\xi_0, s(t)) \hat{t}(\xi_0, s(t)) = \\ &= \frac{\partial(T\hat{t})}{\partial\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \times \varepsilon + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.3.48)$$

É razoável supor que as forças externas e forças exercidas pelo guia também podem ser aproximadas de forma linear em ε .

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{f}^{\text{ext}}(\xi_0, s(t)) \times \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (2.3.49)$$

$$\vec{F}^{\text{guia}} = \vec{f}^{\text{guia}}(\xi_0, s(t)) \times \varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (2.3.50)$$

Comparando termos de primeira ordem em ε na segunda lei de Newton obtemos:

$$\lambda(\xi_0) \left(\frac{d^2 s}{dt^2} \hat{t} + a_n \hat{n} \right) = \frac{\partial(T\hat{t})}{\partial\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} + \vec{f}^{\text{ext}}(\xi_0, s(t)) + \vec{f}^{\text{guia}}(\xi_0, s(t)) \quad (2.3.51)$$

O guia toma conta das componentes perpendiculares ao vetor tangente com forças de vínculo apropriados. Estes componentes não interessam. Então vamos multiplicar a equação (2.3.51) com o vetor tangente \hat{t} para filtrar apenas a parcela que interessa:

$$\lambda(\xi_0) \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{\partial T}{\partial\xi} \Big|_{\xi=\xi_0} + \hat{t} \cdot \vec{f}^{\text{ext}}(\xi_0, s(t)) + \hat{t} \cdot \vec{f}^{\text{guia}}(\xi_0, s(t)) \quad (2.3.52)$$

Neste último passo usamos o teorema 1.9.1 (ou seja $\hat{t} \cdot \partial\hat{t}/\partial\xi = 0$). Para um guia que atua sem atrito vale $\hat{t} \cdot \vec{f}^{\text{guia}}(\xi_0, s(t)) = 0$. Além disso vamos supor que as forças externas possam ser desprezadas de tal forma que os dois últimos termos possam ser ignorados. Podemos integrar a fórmula (2.3.52) de zero até algum valor ξ_1 e obtemos:

$$T(\xi_1, s(t)) - T(0, s(t)) = \frac{d^2 s}{dt^2} \int_0^{\xi_1} \lambda(\xi_0) d\xi_0 \quad (2.3.53)$$

A integral é a massa do trecho da corda ente zero e ξ_1 .

Com este resultado podemos agora analisar um exemplo típico que é conhecido por todos da disciplina Física I. Imaginamos um carrinho de massa m_A num trilho horizontal³ sem atrito. Uma corda inesticável e totalmente flexível é guiada sem atrito até uma massa m_B pendurada sujeita à força gravitacional como mostra a figura 2.3.2. Ambas as massas A e B trataremos como partículas.

³ Isto é, um trilho perpendicular à direção vertical.



Fig. 2.3.2 Trilho horizontal sem atrito com partícula A ligada a uma partícula B por um fio inextensível e totalmente flexível guiado sem atrito.

Vamos escolher uma origem e um sistema de coordenadas cartesianas com o eixo x apontando na direção do trilho e o eixo z na vertical para cima. As coordenadas das

posições das duas partículas A e B chamaremos de x_A, y_A, z_A e x_B, y_B, z_B respectivamente. y_A e y_B são iguais e constantes e não têm importância. Também z_A e x_B são constantes e não interessam. Os valores de x_A e z_B estão vinculados pelo comprimento da corda de tal forma que vale uma relação

$$z_B = -x_A + a \quad (2.3.54)$$

onde a é uma constante que depende do comprimento da corda e da escolha da origem de coordenadas. Então precisamos apenas de um parâmetro para descrever a configuração do sistema.

O número de parâmetros necessários para descrever a configuração de um sistema mecânico é chamado o *número de graus de liberdade* do sistema.

Então o presente exemplo tem apenas um grau de liberdade. Isto significa que devemos formular a dinâmica em termos de uma única incógnita. Podemos, por exemplo, escolher x_A como esta incógnita. Vamos supor que a parte vertical do guia da corda guie também a partícula B . Da segunda lei de Newton para a partícula B interessa somente a componente vertical, já que as demais componentes são por conta do guia. Da segunda lei de Newton da partícula A interessa apenas a componente x , as outras componentes são por conta do trilho que deve fornecer as devias forças de vínculo. A força que a corda exerce sobre a partícula A é

$$\vec{F}_{A \leftarrow \text{corda}} = \hat{x} T(0, s(t)) \quad (2.3.55)$$

No nosso caso o ponto inicial da corda é $s(t) = x_A(t)$. A força que a corda exerce sobre a partícula B é

$$\vec{F}_{B \leftarrow \text{corda}} = \hat{z} T(1, s(t)) \quad (2.3.56)$$

Fora desta força, temos uma componente z da atração gravitacional da Terra. Então as componentes relevantes das duas segundas leis de Newton são:

$$m_A \ddot{x}_A(t) = T(0, x_A(t)) \quad (2.3.57)$$

$$m_B \ddot{z}_B(t) = T(1, x_A(t)) - m_B g_P \quad (2.3.58)$$

Com o vínculo (2.3.54) podemos eliminar \ddot{z}_B dando $\ddot{z}_B = -\ddot{x}_A$ e com o resultado das cordas (2.3.53) temos $T(1, x_A(t)) = T(0, x_A(t)) + m_K \ddot{x}_A(t)$, onde m_K é a massa da corda. Então a equação (2.3.58) resulta em

$$-m_B \ddot{x}_A(t) = T(0, x_A(t)) + m_K \ddot{x}_A(t) - m_B g_P \quad (2.3.59)$$

Com a equação (2.3.57) podemos eliminar $T(0, x_A(t))$ e obtemos:

$$\ddot{x}_A(t) \{m_A + m_B + m_\kappa\} = m_B g_P \quad (2.3.60)$$

ou

$$\ddot{x}_A(t) = \frac{m_B}{m_A + m_B + m_\kappa} g_P \quad (2.3.61)$$

Então a partícula A executa um movimento uniformemente acelerado com uma aceleração que é uma fração de g_P . Neste tratamento desprezamos a força gravitacional que atua sobre a parcela vertical da corda. Então o nosso tratamento é válido apenas como uma aproximação enquanto a massa do trecho vertical for muito menor que m_B .

Exercício: Resolva o mesmo problema sem esta aproximação.

Este exemplo discutido é tão simples que não parece ser digno de uma discussão num curso de mecânica clássica. No entanto, ele mostra um aspecto interessante: ao invés de eliminar $T(0, x_A(t))$ da equação (2.3.59) com a equação (2.3.57) vamos eliminar $T(0, x_A(t))$ da equação (2.3.57) com a equação (2.3.59):

$$m_A \ddot{x}_A(t) = m_B g_P - \ddot{x}_A(t) \{m_B + m_\kappa\} \quad (2.3.62)$$

Agora podemos tomar o ponto de vista de considerar o lado direito como uma força externa efetiva que atua sobre a partícula A . Percebemos que esta força efetiva depende da aceleração da partícula A . Ela não é apenas uma função da posição e velocidade. É este tipo de contribuição que aparece como terceiro termo na força efetiva da fórmula (2.3.19). Quando um corpo faz um movimento acelerado dentro de um fluido ele provoca necessariamente um movimento acelerado de uma parcela do fluido da mesma forma que a aceleração da partícula A é atrelada a uma aceleração da partícula B e da corda. A massa acelerada do fluido se manifesta na força efetiva que atua sobre o corpo com um termo proporcional a aceleração. Em muitos livros texto de física básica e de mecânica clássica podemos encontrar o seguinte tipo de exercício:

Uma bóia cilíndrica flutua na água como mostra a figura 3.3.3. No equilíbrio, uma parte de profundidade p_0 está mergulhada na água. Quando empurramos a bóia para dentro da água ela começa a oscilar. Calcule a frequência angular desta oscilação.

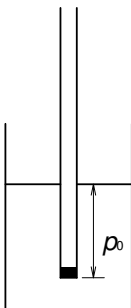


Fig. 2.3.3 Bóia cilíndrica flutuando na água.

Aqui vamos dar a solução do problema que os autores imaginam como correta, mas esta está totalmente errada. Primeiramente escolhemos um parâmetro que descreve a configuração do sistema. Chamaremos $p(t)$ a profundidade da parte mergulhada da bóia no instante t . Este parâmetro é suficiente se supormos movimentos restritos na direção vertical. Além disso vamos supor que a superfície da água seja imensa de tal forma que um aprofundamento da bóia não altere o nível da água apreciavelmente. Os autores dos livros mencionados imaginam como força que atua sobre a bóia o peso e o empuxo.

$$\vec{F} = (-m + A p \rho) g_p \hat{\uparrow}_p \quad (2.3.63)$$

onde m é a massa da bóia, A é a área da seção transversal do cilindro, e ρ a densidade da água. A segunda lei de Newton seria

$$-m \ddot{\hat{\uparrow}}_p = (-m + A p \rho) g_p \hat{\uparrow}_p \quad (2.3.64)$$

No equilíbrio temos $m = A p_0$. Eliminando m obtemos:

$$-p_0 \ddot{p} = (-p_0 + p) g_p \quad (2.3.65)$$

Podemos introduzir a incógnita nova $z \stackrel{def.}{=} p - p_0$ e obtemos uma bela equação de oscilador harmônico:

$$\ddot{z} = -\frac{g_p}{p_0} z \quad (2.3.66)$$

Com a solução geral

$$z(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{g_p}{p_0}} t + \varphi_0\right) \quad (2.3.67)$$

Então a procurada frequência angular é $\omega = (g_p / p_0)^{1/2}$.

O que está errada é a fórmula da força. A água executa um movimento acelerado e portanto a fórmula do empuxo, que é tomada da hidrostática não descreve a força que a água exerce sobre a bóia! No mínimo falta um termo proporcional à aceleração da bóia, um termo análogo do terceiro termo da fórmula (2.3.19) ou análogo ao termo $-\ddot{x}_A(t) \{m_B + m_K\}$ da equação (2.3.62). Mas, na verdade a força total que a água exerce sobre a bóia não pode ser expressa como uma função dos dados espaço-temporais da bóia. Podemos ver isto analisando o comportamento de uma bóia colocada num lago de infinita extensão. Mesmo com um termo proporcional à aceleração o tipo de solução seria uma oscilação harmônica eterna. Mas, uma bóia iria transferir seu movimento à água e gerar ondas resultando numa gradativa diminuição da amplitude de oscilação. Isto aconteceria mesmo num fluido sem viscosidade! Estamos na frente de um sistema de muitos graus de liberdade e uma descrição como sistema de uma única partícula com força externa efetiva é apenas uma aproximação grosseira. Também a fórmula (2.3.19) é uma aproximação.

Trataremos de mais um exemplo no âmbito de laboratório. Consideramos acima cordas inesticáveis. Agora vamos admitir que no mundo real as cordas se alongam um pouco quando submetidas a forças. Para poder formular uma lei empírica da relação entre alongamento e tensão precisamos da descrição matemática da configuração de uma corda esticável. Como antes, vamos supor que a corda será forçada de se mover ao longo de uma curva guia γ . Com a possibilidade de alongamentos, não basta o ponto inicial da corda para caracterizar a configuração. Podemos informar em que comprimento de arco s_γ da curva guia se encontra a partícula ξ_0 da corda, onde ξ_0 é um valor qualquer do parâmetro ξ da curva parametrizada $\kappa(\cdot, t)$. Então a configuração da corda no instante t é descrita por uma função $s_\gamma(\xi, t)$. Mas, nesta descrição a escolha da parametrização é ainda bastante arbitrária. Somente os valores $\xi = 0$ e $\xi = 1$ têm pontos bem determinados da corda, a saber o início e o fim da corda.

Vamos restringir esta arbitrariedade. Colocamos a corda numa configuração κ_0 , na qual não há tensões na mesma, $T = 0$. Vamos exigir do parâmetro ξ , que caracteriza as partículas constituintes da corda, que ele tenha uma relação linear com o comprimento de arco da curva κ_0 :

$$s_{\kappa_0}(\xi) = L_0 \xi \quad (2.3.68)$$

A constante de proporcionalidade é o comprimento da corda nesta configuração não esticada. Este comprimento L_0 chamaremos de comprimento natural da corda. Com esta escolha podemos agora formular uma lei empírica de cordas, que vale para pequenos valores de alongamentos da corda.

Lei de Hooke para cordas: A tensão, que foi definida pela relação (2.3.47), depende da configuração da corda da seguinte forma:

$$T_\kappa(\xi) = K(\xi) \left\{ \frac{\partial s_\kappa}{\partial \xi} - L_0 \right\} \quad (2.3.69)$$

Expressamos com o índice κ no T que esta tensão depende da configuração. A função K é alguma característica da corda, ela depende do material e da espessura da corda. A maioria das cordas é constituída de forma homogênea e neste caso K seria uma constante. No lugar da segunda lei para cordas inesticáveis guiadas (2.3.51) temos agora

$$\lambda(\xi_0) \left(\frac{\partial^2 s_\gamma(\xi_0, t)}{\partial t^2} \hat{t} + a_n \hat{n} \right) = \frac{\partial(T\hat{t})}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} + \vec{f}^{\text{ext}}(s_\gamma(\xi_0, t)) + \vec{f}^{\text{guia}}(s_\gamma(\xi_0, t)) \quad (2.3.70)$$

e filtrando novamente a componente tangencial

$$\begin{aligned} \lambda(\xi_0) \frac{\partial^2 s_\gamma(\xi_0, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial T}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} + \hat{t} \cdot \vec{f}^{\text{ext}}(s_\gamma(\xi_0, t)) + \hat{t} \cdot \vec{f}^{\text{guia}}(s_\gamma(\xi_0, t)) \\ &= K \frac{\partial^2 s_\gamma(\xi_0, t)}{\partial \xi_0^2} + \hat{t} \cdot \vec{f}^{\text{ext}}(s_\gamma(\xi_0, t)) + \hat{t} \cdot \vec{f}^{\text{guia}}(s_\gamma(\xi_0, t)) \end{aligned} \quad (2.3.71)$$

No último passo usamos a lei de Hooke e usamos que s_κ e s_γ diferem apenas por uma função de t de tal forma que $\partial s_\kappa / \partial \xi = \partial s_\gamma / \partial \xi$. Vamos explorar esta equação mais detalhadamente no capítulo 6. Aqui vamos considerar apenas uma forma aproximada desta equação. Vamos fazer a idealização de uma corda sem massa, ou seja vamos considerar que λ seja desprezivelmente pequeno e vamos desprezar também as forças externas e forças de atrito do guia. Neste caso a equação (2.3.71) se reduz a

$$\frac{\partial^2 s_\gamma(\xi_0, t)}{\partial \xi_0^2} = 0 \quad (2.3.72)$$

Isto significa que a relação entre comprimento de arco e parâmetro deve ter a forma

$$s_\gamma(\xi, t) = s_\gamma(0, t) + L(t) \xi \quad (2.3.73)$$

Substituindo isto na lei de Hooke obtemos que a tensão na corda é uniforme ao longo dela ($\partial T / \partial \xi = 0$) e o valor da tensão é

$$T_k = K \{L(t) - L_0\} \quad (2.3.74).$$