3. Mudanças de Referencial

3.1 Μαρτυριον - o mapeamento isócrono.

Seja $\mathscr{E}_R$ o espaço associado a um referencial R. Cada evento e acontece em algum ponto em $\mathscr{E}_R$. Então temos um mapeamento $L_R : \mathscr{E}\mathscr{T} \to \mathscr{E}_R$ que mapeia o espaço-tempo $\mathscr{E}\mathscr{T}$ no espaço $\mathscr{E}_R$. Chamamos este mapeamento de *localização*. A imagem $L_R(e)$ de um evento e é o ponto no espaço $\mathscr{E}_R$ onde o evento e acontece. Por outro lado, podemos imaginar que se escolhe um evento em cada ponto de um espaço de um referencial. Tal tipo de escolha define um mapeamento $\varepsilon_R : \mathscr{E}_R \to \mathscr{E}\mathscr{T}$. A imagem $\varepsilon_R(\mathrm{P})$ de um ponto P é algum evento escolhido que acontece no ponto P. Na discussão do espaço e tempo da mecânica não relativística formulamos uma lei fundamental:

Seja R um referencial. Para cada evento e_0 existe uma função de escolha $\varepsilon_R : \mathscr{E}_R \to \mathscr{E}\mathscr{T}$ tal que e_0 é um dos eventos escolhidos e tal que para qualquer outro referencial $\tilde{R}$ o mapeamento $L_{\tilde{R}} \circ \varepsilon_R : \mathscr{E}_R \to \mathscr{E}_{\tilde{R}}$ conserva a geometria; isto é, a distância entre quaisquer pontos em $\mathscr{E}_R$ é a mesma dos correspondentes pontos imagem em $\mathscr{E}_{\tilde{R}}$. Os eventos escolhidos chamamos de *simultâneos* com o evento e_0.

Associamos a eventos simultâneos um valor t de uma grandeza que podemos medir com a ajuda das distancias percorridas por uma partícula livre num referencial inercial. Dos eventos simultâneos associados ao valor t se diz que eles acontecem no instante t. Lembramos que os referenciais inerciais eram aqueles nos quais as trajetórias de todas as partículas livres eram pontos ou retas.

Então o evento e_0 da lei fundamental formulada acima acontece num certo instante t_0. Podemos usar o valor t_0 como rótulo para o mapeamento $L_{\tilde{R}} \circ \varepsilon_R$. Vamos escreve-lo como $\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0}$, isto é $\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0} \underset{def.}{=} L_{\tilde{R}} \circ \varepsilon_R$. Um evento que acontece no instante t_0 num ponto P em $\mathscr{E}_R$ pode ser presenciado no mesmo instante no ponto $\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0}(\mathrm{P})$ do espaço do referencial $\tilde{R}$. Alguém presente neste ponto pode testemunhar este evento[1].

A definição de equivalência de pares de pontos que define os valores da grandeza vetor deslocamento é toda baseada em medidas de distâncias espaciais. Como $\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0}$ conserva distancias espaciais podemos concluir imediatamente que dois pares de pontos $\langle \mathrm{A},\mathrm{B}\rangle$ e $\langle \mathrm{C},\mathrm{D}\rangle$ do espaço $\mathscr{E}_R$ são equivalentes no sentido vetor se e somente se $\left\langle \mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0}(\mathrm{A}),\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0}(\mathrm{B})\right\rangle$ e $\left\langle \mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0}(\mathrm{C}),\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0}(\mathrm{D})\right\rangle$ foram equivalentes.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0}(\mathrm{A})\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0}(\mathrm{B})} = \overrightarrow{\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0}(\mathrm{C})\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0}(\mathrm{D})} \tag{3.1.1}$$

Consequentemente o mapeamento $\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0} : \mathscr{E}_R \to \mathscr{E}_{\tilde{R}}$ induz um mapeamento entre os espaços vetoriais associados $M_{\tilde{R}R\,t_0} : \mathbb{D}_R \to \mathbb{D}_{\tilde{R}}$. Este mapeamento joga o vetor $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ no vetor $\overrightarrow{\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0}(\mathrm{A})\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0}(\mathrm{B})}$:

---

[1] Dai a escolha do símbolo M do grego μαρτὺριον = testemunho.

$$M_{\tilde{R}R\,t_0}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \underset{def.}{=} \overrightarrow{\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0}(\mathrm{A})\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0}(\mathrm{B})} \tag{3.1.2}$$

Repare que usamos um M em itálico para o mapeamento de vetores enquanto o mapeamento de pontos era um M.

Como toda a construção de soma de vetores era baseada em medidas de distâncias e $\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0}$ conserva as distâncias podemos concluir que para todos os vetores $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{D}_R$ temos $M_{\tilde{R}R\,t_0}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=M_{\tilde{R}R\,t_0}(\vec{a})+M_{\tilde{R}R\,t_0}\left(\vec{b}\right)$. Também segue que para $\lambda\in\mathbb{R}$ vale $M_{\tilde{R}R\,t_0}(\lambda\vec{a})=\lambda M_{\tilde{R}R\,t_0}(\vec{a})$. Então chegamos à conclusão que $M_{\tilde{R}R\,t_0}$ é um mapeamento <u>linear</u>. Como é de costume com mapeamentos lineares, vamos escrever o valor da função $M_{\tilde{R}R\,t_0}(\cdot)$ como uma multiplicação, isto é, no lugar de $M_{\tilde{R}R\,t_0}\left(\vec{d}\right)$ vamos escrever $M_{\tilde{R}R\,t_0}\vec{d}$.

O módulo de um vetor de deslocamento era definido como a distância dos pontos de um par de pontos que pertence ao vetor. Como $\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t_0}$ conserva as distâncias segue que $M_{\tilde{R}R\,t_0}$ conserva os módulos de vetores. Sendo um mapeamento linear entre dois espaços com a mesma dimensão que conserva a norma de vetores o mapeamento $M_{\tilde{R}R\,t_0}$ é necessariamente bijectivo.

Os eventos que acontecem num instante t relacionam os pontos dos espaços $\mathcal{E}_R$ e $\mathcal{E}_{\tilde{R}}$ de dois referenciais R e $\tilde{R}$ com um mapeamento $\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t}$ que conserva distâncias e que induz um mapeamento linear, bijectivo $M_{\tilde{R}R\,t}:\mathbb{D}_R\rightarrow\mathbb{D}_{\tilde{R}}$ que conserva módulos de vetores. Ambos os mapeamentos, $\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t}$ e $M_{\tilde{R}R\,t}$ chamaremos de martyrion.

Como o produto escalar de vetores era definido com os módulos podemos concluir que $M_{\tilde{R}R\,t}$ conserva também produtos escalares de vetores:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left\{M_{\tilde{R}R\,t}\vec{a}\right\}\cdot\left\{M_{\tilde{R}R\,t}\vec{b}\right\} \tag{3.1.3}$$

Agora imagine uma partícula. No passar do temo esta partícula ocupa os lugares $\mathrm{P}(t)$ no espaço $\mathcal{E}_R$ do referencial *R*. A chegada da partícula no ponto $\mathrm{P}(t)$ no instante t define um evento. Este evento acontece no ponto $\tilde{\mathrm{P}}(t) = \mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t}(\mathrm{P}(t))$ do espaço $\mathcal{E}_{\tilde{R}}$ de um outro referencial $\tilde{R}$. Vamos escolher origens $\mathrm{O}\in\mathcal{E}_R$ e $\tilde{\mathrm{O}}\in\mathcal{E}_{\tilde{R}}$ nos respectivos espaços e escrever as posições da partícula com a ajuda de vetores posição nos respectivos espaços vetoriais $\mathbb{D}_R$ e $\mathbb{D}_{\tilde{R}}$:

$$\vec{r}(t) \underset{def.}{=} \overrightarrow{\mathrm{OP}(t)}, \qquad \tilde{\vec{r}}(t) \underset{def.}{=} \overrightarrow{\tilde{\mathrm{O}}\tilde{\mathrm{P}}(t)}, \tag{3.1.4}$$

Correspondentemente temos as velocidades e acelerações:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}, \qquad \tilde{\vec{v}}=\frac{d\tilde{\vec{r}}}{dt}, \qquad \vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}, \qquad \tilde{\vec{a}}=\frac{d\tilde{\vec{v}}}{dt} \tag{3.1.5}$$

Como t é um escalar universal, igualmente disponível nos dois referenciais, a definição dos espaços de velocidades e acelerações pode ser feita a partir dos espaços $\mathbb{D}_R$ e $\mathbb{D}_{\tilde{R}}$ da mesma foram e os mapeamentos lineares $M_{\tilde{R}R\,t} : \mathbb{D}_R \to \mathbb{D}_{\tilde{R}}$ podem ser estendidos para estes espaços. Mais geral ainda: Seja G alguma grandeza escalar que é igualmente definida nos referenciais R e $\tilde{R}$. Sejam $\mathbb{B}_R$ e $\mathbb{B}_{\tilde{R}}$ os respectivos espaços de valores de vetores que resultam da multiplicação de vetores de deslocamento de $\mathbb{D}_R$ e $\mathbb{D}_{\tilde{R}}$ com o escalar G. Então a ação de $M_{\tilde{R}R\,t}$ no espaço $\mathbb{B}_R$ é definida da seguinte forma: seja $\vec{a} = g\vec{d}$ um vetor de $\mathbb{B}_R$, onde g é um valor da grandeza G e $\vec{d}$ é algum vetor de deslocamento de $\mathbb{D}_R$. Então $M_{\tilde{R}R\,t}\vec{a} \underset{def.}{=} g M_{\tilde{R}R\,t}\vec{d}$.

A nossa tarefa é de expressar os vetores posição assim como suas derivadas temporais em termos dos vetores definidos no outro referencial. Para esta finalidade vamos definir os vetores

$$\tilde{\vec{R}}(t) \underset{def.}{=} \overrightarrow{\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t}(\mathrm{O})\tilde{\mathrm{O}}}, \qquad \vec{R}(t) \underset{def.}{=} M_{\tilde{R}R\,t}^{-1}\left(\tilde{\vec{R}}(t)\right) \tag{3.1.6}$$

Com estas definições consideramos a imagem do vetor posição $\vec{r}(t)$ sob o mapeamento $M_{\tilde{R}R\,t}$:

$$\begin{aligned} M_{\tilde{R}R\,t}\vec{r}(t) &= \overrightarrow{\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t}(\mathrm{O})\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t}(\mathrm{P}(t))} = \\ &= \overrightarrow{\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t}(\mathrm{O})\tilde{\mathrm{O}}} + \overrightarrow{\tilde{\mathrm{O}}\tilde{\mathrm{P}}(t)} = \\ &= \tilde{\vec{R}}(t) + \tilde{\vec{r}}(t) \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Aplicando o mapeamento inverso $M_{\tilde{R}R\,t}^{-1}$ a esta fórmula obtemos

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + M_{\tilde{R}R\,t}^{-1}\tilde{\vec{r}}(t) \tag{3.1.8}$$

A partir desta fórmula calculamos a primeira e a segunda derivada temporal:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\,\vec{R}(t)}{dt} + M_{\tilde{R}R\,t}^{-1}\tilde{\vec{v}}(t) + \frac{dM_{\tilde{R}R\,t}^{-1}}{dt}\tilde{\vec{r}}(t) \tag{3.1.9}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\,\vec{R}(t)}{dt^2} + M_{\tilde{R}R\,t}^{-1}\tilde{\vec{a}}(t) + 2\frac{dM_{\tilde{R}R\,t}^{-1}}{dt}\tilde{\vec{v}}(t) + \frac{d^2M_{\tilde{R}R\,t}^{-1}}{dt^2}\tilde{\vec{r}}(t) \tag{3.1.10}$$

Vamos ler a fórmula (3.1.9) no referencial $\tilde{R}$. Isto significa que vamos mapear todos os vetores da fórmula (3.1.9) para o espaço das velocidades no referencial $\tilde{R}$. Isto se faz aplicando o mapeamento $M_{\tilde{R}R\,t}$ em ambos os lados:

$$M_{\tilde{R}R\,t}\vec{v}(t) = M_{\tilde{R}R\,t}\frac{d\,\vec{R}(t)}{dt} + \tilde{\vec{v}}(t) + M_{\tilde{R}R\,t}\frac{dM_{\tilde{R}R\,t}^{-1}}{dt}\tilde{\vec{r}}(t) \tag{3.1.11}$$

Nesta fórmula aparece uma combinação de mapeamentos muito interessante, a saber, o produto

$$\tilde{\Omega}(t) \underset{def.}{=} M_{\tilde{R}R\,t}\frac{dM_{\tilde{R}R\,t}^{-1}}{dt} \tag{3.1.12}$$

Antes de prosseguir com a análise das fórmulas (3.1.9) e (3.1.10) vamos investigar este mapeamento mais detalhadamente.