3.2 Velocidade Angular

Podemos escrever o mapeamento $\tilde{\Omega}(t)$ da seguinte forma

$$\tilde{\Omega}(t) = \frac{\partial\left(M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1}\right)}{\partial t_1\big|_{t_1=t}} \qquad (0.0.1)$$

O mapeamento $M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1}$ mapeia $\mathbb{D}_{\tilde{R}}$ em $\mathbb{D}_R$ e depois, o mapeamento $M_{\tilde{R}R\,t}$ leva de volta para o espaço $\mathbb{D}_{\tilde{R}}$. Então o mapeamento $M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1}$ mapeia $\mathbb{D}_{\tilde{R}}$ em si mesmo; $M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1} : \mathbb{D}_{\tilde{R}} \to \mathbb{D}_{\tilde{R}}$. Como ambos os mapeamentos $M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1}$ e $M_{\tilde{R}R\,t}$ são lineares e conservam normas de vetores, o mapeamento $M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1}$ também é linear e conserva normas, e consequentemente produtos escalares e ângulos. Os mapeamentos lineares deste tipo são rotações ou uma inversão ($\vec{d} \mapsto -\vec{d}$) ou uma combinação de uma rotação com uma inversão. Mas, obviamente temos para tempos iguais $M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t} = \mathbf{1}$, e para $t_1 \to t$ o mapeamento $M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1}$ deve tender continuamente para $\mathbf{1}$. Então $M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1}$ não pode conter uma inversão e deve ser uma rotação pura.

É útil saber um pouco mais sobre os mapeamentos lineares que conservam o produto escalar. Seja $\Lambda : \mathbb{D}_{\tilde{R}} \to \mathbb{D}_{\tilde{R}}$ um mapeamento linear que conserva o produto escalar:

$$\forall\left(\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{D}_{\tilde{R}}\right): \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\Lambda \vec{a}\right) \cdot \left(\Lambda \vec{b}\right) \qquad (0.0.2)$$

Vamos escolher uma base ortonormal $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ no espaço universal $\mathbb{U}_{\tilde{R}}$ e representar os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ nesta base:

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^{3} \hat{e}_k a_k , \qquad \vec{b} = \sum_{k=1}^{3} \hat{e}_k b_k \qquad (0.0.3)$$

O mapeamento Λ pode ser estendido naturalmente para o espaço universal $\mathbb{U}_{\tilde{R}}$. Se aplicarmos o mapeamento Λ num dos vetores básicos obtemos um vetor que pode novamente ser escrito nesta base:

$$\Lambda \hat{e}_k = \sum_{l=1}^{3} \hat{e}_l \Lambda_{lk} \qquad (0.0.4)$$

Botamos dois índices nos coeficientes desta expansão; o índice da esquerda é da expansão na base e o da direita informa sobre qual vetor básico aplicamos o mapeamento Λ. Se você quer saber quanto valem estes coeficientes basta calcular os produtos escalares do vetor $\Lambda \hat{e}_k$ com os vetores básicos:

$$\Lambda_{mk} = \hat{e}_m \cdot \left(\Lambda \hat{e}_k\right) \qquad (0.0.5)$$

Esta fórmula associa uma matriz ao mapeamento. Veremos como a condição de manter produtos escalares inalterados pode ser formulada com a ajuda desta matriz.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k,m=1}^{3} \delta_{km} a_k b_m \quad &= \quad \sum_{k=1}^{3} a_k b_k \quad = \quad \vec{a}\cdot\vec{b} \quad = \quad \left(\Lambda\vec{a}\right)\cdot\left(\Lambda\vec{b}\right) \quad = \\
&= \quad \left(\sum_{k=1}^{3} \Lambda \hat{e}_k a_k\right)\cdot\left(\sum_{m=1}^{3} \Lambda \hat{e}_m b_m\right) \quad = \\
&= \quad \left(\sum_{i,k=1}^{3} \hat{e}_i \Lambda_{ik} a_k\right)\cdot\left(\sum_{j,m=1}^{3} \hat{e}_j \Lambda_{jm} b_m\right) \quad = \\
&= \quad \sum_{i,k,j,m} \delta_{ij} \Lambda_{ik} \Lambda_{jm} a_k b_m \quad = \quad \sum_{k,j,m} \Lambda_{jk} \Lambda_{jm} a_k b_m
\end{aligned}
\tag{0.0.6}
$$

Como este resultado vale para qualquer coeficientes a_k e b_m , segue que

$$
\sum_{j=1}^{3} \Lambda_{jk} \Lambda_{jm} = \delta_{km} \tag{0.0.7}
$$

Podemos escrever isto em termos da matriz identidade $\mathbf{1}$ e de um produto da transposta da matriz $\mathbf{\Lambda} = \left\{\Lambda_{lk}\right\}$ e da própria matriz:

$$
\mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}} \mathbf{\Lambda} \quad = \quad \mathbf{1} \tag{0.0.8}
$$

Do teorema de determinantes segue

$$
\det\left(\mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\right) \det\left(\mathbf{\Lambda}\right) = \det\left(\mathbf{1}\right) = 1 \tag{0.0.9}
$$

e com $\det\left(\mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}\right) = \det\left(\mathbf{\Lambda}\right)$ podemos concluir $\left[\det\left(\mathbf{\Lambda}\right)\right]^2 = 1$. Chegamos ao resultado que

$$
\det\left(\mathbf{\Lambda}\right) = \pm 1 \tag{0.0.10}
$$

O determinante é uma função contínua. Qualquer rotação podemos continuamente reduzir á identidade. Basta rodar cada vez por um ângulo menor até não rodar nada. Como temos $\det\left(\mathbf{1}\right) = 1$ deve valer $\det\left(\mathbf{\Lambda}\right) = +1$ para todas as rotações; pois o valor -1 não poder se transformar em $+1$ sem um pulo. Então todos os mapeamentos lineares que conservam o produto escalar e cuja matriz associada tem determinante -1 envolvem a inversão. Note que uma reflexão especular num plano também pode ser escrita como uma combinação de inversão e uma rotação.

Agora voltaremos para o estudo do mapeamento $\tilde{\Omega}\left(t\right)$ da fórmula (0.0.1). O mapeamento $M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1}$ descreve um giro no espaço $\mathbb{D}_{\tilde{R}}$. Consequentemente devemos chamar $\tilde{\Omega}\left(t\right)$, que era a derivada deste giro em relação à t_1 , de ***velocidade angular***. Como $M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1}$ conserva os produtos escalares sabemos que

$$
\vec{a}\cdot\vec{b} \quad = \quad \left(M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1} \vec{a}\right)\cdot\left(M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1} \vec{b}\right) \tag{0.0.11}
$$

Então o valor $\left(M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1} \vec{a}\right)\cdot\left(M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1} \vec{b}\right)$ não depende de t_1 e a derivada deste valor em relação à t_1 é zero:

$$0 \quad = \quad \frac{\partial\left(M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1}\vec{a}\right)\cdot\left(M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1}\vec{b}\right)}{\partial t_1} \quad =$$

$$= \quad \left(\frac{\partial M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1}}{\partial t_1}\vec{a}\right)\cdot\left(M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1}\vec{b}\right) \quad + \quad \left(M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1}\vec{a}\right)\cdot\left(\frac{\partial M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1}}{\partial t_1}\vec{b}\right)$$

(0.0.12)

Avaliando esta expressão para o valor de t_1 igual à t obtemos

$$\left(\tilde{\Omega}(t)\vec{a}\right)\cdot\vec{b} \quad + \quad \vec{a}\cdot\left(\tilde{\Omega}(t)\vec{b}\right) \quad = \quad 0 \qquad (0.0.13)$$

É interessante expressar esta condição em forma matricial. Da mesma maneira que associamos uma matriz $\mathbf{\Lambda}$ ao mapeamento Λ com a ajuda de uma base ortonormal, podemos definir uma matriz $\tilde{\mathbf{\Omega}}$. Omitimos neste momento o (t). Quando for de nosso interesse, podemos introduzir o t de novo para lembrar que tudo dependo do tempo. Então a matriz $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ associada ao mapeamento $\tilde{\Omega}$ é

$$\tilde{\Omega}_{mk} \quad = \quad \hat{e}_m\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_k\right) \qquad (0.0.14).$$

Quando aplicarmos o mapeamento $\tilde{\Omega}$ num vetor $\vec{a} = \hat{e}_1 a_1 + \hat{e}_2 a_2 + \hat{e}_3 a_3$ obtemos um vetor cujas componentes na base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ são

$$\left(\tilde{\Omega}\vec{a}\right)_m \quad = \quad \hat{e}_m\cdot\tilde{\Omega}\vec{a} \quad = \quad \sum_{k=1}^{3}\hat{e}_m\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_k\right)a_k \quad = \quad \sum_{k=1}^{3}\tilde{\Omega}_{mk}a_k \qquad (0.0.15)$$

Isto é um produto da matiz $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ com a matriz 3×1, ou seja com o vetor coluna, cujos elementos de matriz são as componentes do vetor $\vec{a}$ na base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. A escolha de uma base ortonormal permite fazer a seguinte associação de objetos geométricos com matrizes:

$$\vec{a}\mapsto\begin{pmatrix}\hat{e}_1\cdot\vec{a}\\ \hat{e}_2\cdot\vec{a}\\ \hat{e}_3\cdot\vec{a}\end{pmatrix}, \qquad \tilde{\Omega}\mapsto\begin{pmatrix}\hat{e}_1\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_1\right) & \hat{e}_1\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_2\right) & \hat{e}_1\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_3\right)\\ \hat{e}_2\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_1\right) & \hat{e}_2\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_2\right) & \hat{e}_2\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_3\right)\\ \hat{e}_3\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_1\right) & \hat{e}_3\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_2\right) & \hat{e}_3\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_3\right)\end{pmatrix},$$

(0.0.16)

$$\tilde{\Omega}\vec{a}\mapsto\begin{pmatrix}\hat{e}_1\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_1\right) & \hat{e}_1\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_2\right) & \hat{e}_1\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_3\right)\\ \hat{e}_2\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_1\right) & \hat{e}_2\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_2\right) & \hat{e}_2\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_3\right)\\ \hat{e}_3\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_1\right) & \hat{e}_3\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_2\right) & \hat{e}_3\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_3\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{e}_1\cdot\vec{a}\\ \hat{e}_2\cdot\vec{a}\\ \hat{e}_3\cdot\vec{a}\end{pmatrix}$$

Com a fórmula (0.0.13) temos

$$\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_m\right)\cdot\hat{e}_k \quad + \quad \hat{e}_m\cdot\left(\tilde{\Omega}\hat{e}_k\right) \quad = \quad 0 \qquad (0.0.17).$$

Mas, como o produto escalar é simétrico podemos escrever esta última equação também como

$$\hat{e}_k \cdot \left(\tilde{\Omega}\hat{e}_m\right) \quad + \quad \hat{e}_m \cdot \left(\tilde{\Omega}\hat{e}_k\right) \quad = \quad 0 \qquad (0.0.18)$$

e com a definição (0.0.14) dos elementos da matriz $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ podemos escrever isto como

$$\tilde{\Omega}_{km} \quad + \quad \tilde{\Omega}_{mk} \quad = \quad 0 \qquad (0.0.19).$$

Então a matriz $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ é antisimétrica; $\tilde{\Omega}_{km} = -\tilde{\Omega}_{mk}$.

As matrizes 3×3 antisimétricas têm apenas três parâmetros independentes, o mesmo número de componentes de um vetor em três dimensões.

$$\tilde{\mathbf{\Omega}} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & +\tilde{\Omega}_{12} & +\tilde{\Omega}_{13} \\ -\tilde{\Omega}_{12} & 0 & +\tilde{\Omega}_{23} \\ -\tilde{\Omega}_{13} & -\tilde{\Omega}_{23} & 0 \end{pmatrix} \qquad (0.0.20).$$

Podemos tentar inventar um vetor $\tilde{\vec{\omega}} = \hat{e}_1\tilde{\omega}_1 + \hat{e}_2\tilde{\omega}_2 + \hat{e}_3\tilde{\omega}_3$ cujos três componentes determinem os três valores independentes $\tilde{\Omega}_{12}$, $\tilde{\Omega}_{13}$, $\tilde{\Omega}_{23}$. Mas, este relacionamento deve ser tal que ele não dependa da escolha da base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Não é nada óbvio que isto é possível. De fato, na verdade isto não é possível. Mas, existe uma maneira de associar três valores $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$ aos valores $\tilde{\Omega}_{12}$, $\tilde{\Omega}_{13}$, $\tilde{\Omega}_{23}$ que é quase independente da escolha de base. Esta maneira é

$$\tilde{\omega}_1 = -\tilde{\Omega}_{23} \qquad \tilde{\omega}_2 = \tilde{\Omega}_{13} \qquad \tilde{\omega}_3 = -\tilde{\Omega}_{12} \qquad (0.0.21),$$

ou na forma matricial:

$$\tilde{\mathbf{\Omega}} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\omega}_z & \tilde{\omega}_y \\ \tilde{\omega}_z & 0 & -\tilde{\omega}_x \\ -\tilde{\omega}_y & \tilde{\omega}_x & 0 \end{pmatrix} \qquad (0.0.22).$$

Podemos escrever isto de forma mais compacta com a ajuda do símbolo de Levi-Civita:

$$\varepsilon_{ijk} \underset{def.}{=} \begin{cases} +1 & \text{se } \langle i,j,k\rangle \text{ for } \langle 1,2,3\rangle \text{ ou } \langle 2,3,1\rangle \text{ ou } \langle 3,1,2\rangle \\ -1 & \text{se } \langle i,j,k\rangle \text{ for } \langle 1,3,2\rangle \text{ ou } \langle 2,1,3\rangle \text{ ou } \langle 3,2,1\rangle \\ 0 & \text{se } i=j \text{ ou } i=k \text{ ou } k=j \end{cases} \qquad (0.0.23).$$

Com este símbolo a relação entre elementos da matriz $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ e componentes de $\tilde{\vec{\omega}}$ fica da seguinte forma:

$$\tilde{\Omega}_{ab} \quad = \quad -\sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc}\tilde{\omega}_c \qquad (0.0.24)$$

ou inversamente

$$\tilde{\omega}_c \quad = \quad -\frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{3} \tilde{\Omega}_{ab}\varepsilon_{abc} \qquad (0.0.25).$$

Agora temos que mostrar que o relacionamento entre $\tilde{\vec{\omega}}$ e $\tilde{\Omega}$ não depende (ou melhor, quase não depende) da base. Seja $\{\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3\}$ uma segunda base ortonormal. Podemos expandir estes vetores na antiga base:

$$\hat{f}_k \quad = \quad \sum_{l=1}^{3} \hat{e}_l \, \Theta_{lk} \tag{0.0.26}$$

Da condição de ortonormalidade dos novos vetores básicos segue

$$\begin{aligned} \delta_{km} \quad &= \quad \hat{f}_k \cdot \hat{f}_m \quad = \quad \sum_{a,b=1}^{3} \left(\hat{e}_a \Theta_{ak} \right) \cdot \left(\hat{e}_b \Theta_{bm} \right) \quad = \\ &= \quad \sum_{a,b=1}^{3} \delta_{ab} \Theta_{ak} \Theta_{bm} \quad = \quad \sum_{a=1}^{3} \Theta_{ak} \Theta_{am} \end{aligned} \tag{0.0.27}$$

Isto, escrito em forma matricial, significa

$$\boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Theta} \quad = \quad \mathbf{1} \tag{0.0.28}$$

Multiplicando esta fórmula com $\boldsymbol{\Theta}$ pela esquerda e com $\boldsymbol{\Theta}^{-1}$ (a inversa existe necessariamente) segue também

$$\boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}} \quad = \quad \mathbf{1} \tag{0.0.29}.$$

A matriz $\breve{\boldsymbol{\Omega}}$ que se obtém com a nova base é

$$\begin{aligned} \breve{\Omega}_{mk} \quad &= \quad \hat{f}_m \cdot \left(\tilde{\Omega} \, \hat{f}_k \right) \quad = \quad \sum_{a,b=1}^{3} \hat{e}_a \Theta_{am} \cdot \left(\tilde{\Omega} \, \hat{e}_b \Theta_{bk} \right) \quad = \\ &= \quad \sum_{a,b=1}^{3} \Theta_{am} \tilde{\Omega}_{ab} \Theta_{bk} \end{aligned} \tag{0.0.30}$$

Podemos escrever isto em termos das matrizes

$$\breve{\boldsymbol{\Omega}} \quad = \quad \boldsymbol{\Theta}^{\mathrm{T}} \, \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \, \boldsymbol{\Theta} \tag{0.0.31}$$

Usando a mesma regra de relacionamento (0.0.25) devemos formar componentes do vetor $\tilde{\vec{\omega}}$ da seguinte forma:

$$\breve{\omega}_c \quad = \quad -\frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{3} \breve{\Omega}_{ab} \varepsilon_{abc} \quad = \quad -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \sum_{a,b=1}^{3} \Theta_{ia} \tilde{\Omega}_{ij} \Theta_{jb} \varepsilon_{abc} \tag{0.0.32}$$

Vamos expressar os elementos da matriz $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ em termos dos componentes de $\tilde{\vec{\omega}}$ na antiga base. Com a fórmula (0.0.24) obtemos

$$\breve{\omega}_c \quad = \quad +\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{3} \sum_{i,j=1}^{3} \sum_{a,b=1}^{3} \Theta_{ia} \varepsilon_{ijk} \tilde{\omega}_k \Theta_{jb} \varepsilon_{abc} \tag{0.0.33}.$$

Entre ε_{ijk} e $\tilde{\omega}_k$ podemos introduzir uma identidade δ_{kl} substituindo o $\tilde{\omega}_k$ por um $\tilde{\omega}_l$ e somando sobre l. Mas, vamos escrever este delta na forma de $\delta_{kl} = \sum_{r=1}^{3} \Theta_{kr} \Theta_{lr}$.

$$\begin{aligned} \breve{\omega}_c \quad &= \quad +\frac{1}{2} \sum_{l,r=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \sum_{i,j=1}^{3} \sum_{a,b=1}^{3} \Theta_{ia} \varepsilon_{ijk} \Theta_{kr} \Theta_{lr} \tilde{\omega}_l \Theta_{jb} \varepsilon_{abc} \quad = \\ &= \quad \sum_{l=1}^{3} \sum_{r=1}^{3} \Delta_{cr} \Theta_{lr} \tilde{\omega}_l \end{aligned} \tag{0.0.34},$$

onde introduzimos a abreviação

$$\Delta_{cr} \underset{def.}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{i,j=1}^{3}\sum_{a,b=1}^{3}\Theta_{ia}\varepsilon_{ijk}\Theta_{kr}\Theta_{jb}\varepsilon_{abc} \qquad (0.0.35).$$

Vamos olhar esta expressão complicada com calma. Percebemos que os três índices da esquerda da matriz $\mathbf{\Theta}$ (isto é, *i*, *k* e *j*) aparecem todos no mesmo símbolo de Levi-Civita. Consequentemente somente termos que não têm valores iguais entre *i*, *j*, *k* sobrevivem. Consequentemente podemos substituir os somatórios sobre estes índices por um somatório sobre todas as permutações dos números 1, 2, 3. O símbolo ε_{ijk} vai fornecer um fator -1 para as permutação ímpares (que são as permutação que podem ser escritas como um número ímpar de trocas binárias) e o fator $+1$ para as permutações pares. Para uma permutação $\boldsymbol{\pi}$ de N objetos se define a paridade

$$\mathrm{P}_{\boldsymbol{\pi}} \underset{def.}{=} \begin{cases} +1 & \text{se } \boldsymbol{\pi} \text{ pode se escrito como um número par de ciclos binários} \\ -1 & \text{se } \boldsymbol{\pi} \text{ pode se escrito como um número impar de ciclos binários} \end{cases} \qquad (0.0.36).$$

Com isto podemos escrever (0.0.35) na seguinte forma:

$$\Delta_{cr} = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{\pi}\in S_3}\sum_{a,b=1}^{3}\mathrm{P}_{\boldsymbol{\pi}}\Theta_{\boldsymbol{\pi}(1)a}\Theta_{\boldsymbol{\pi}(2)r}\Theta_{\boldsymbol{\pi}(3)b}\varepsilon_{abc} \qquad (0.0.37),$$

onde o primeiro somatório é tomado sobre o grupo S_3 de todas as permutações de três objetos. O $\boldsymbol{\pi}(i)$ significa o objeto que substitui o objeto original *i*. Para cada dado valor de c, contribuem apenas dois termos do somatório de a e *b*. Pois os termos com $a=b$, $a=c$ ou $b=c$ são zerados pela presença do ε_{abc}. Se por ventura $r \neq c$ então *r* coincide com a ou com *b*. Então teríamos algo como $\Theta_{\boldsymbol{\pi}(1)a}\Theta_{\boldsymbol{\pi}(2)a}$ ou algo como $\Theta_{\boldsymbol{\pi}(2)b}\Theta_{\boldsymbol{\pi}(3)b}$. Mas, o somatório sobre as permutações com o fator de paridade geraria sempre pares $\left(\Theta_{\boldsymbol{\pi}(1)a}\Theta_{\boldsymbol{\pi}(2)a}-\Theta_{\boldsymbol{\pi}(2)a}\Theta_{\boldsymbol{\pi}(1)a}\right)$ ou $\left(\Theta_{\boldsymbol{\pi}(2)a}\Theta_{\boldsymbol{\pi}(3)b}-\Theta_{\boldsymbol{\pi}(3)a}\Theta_{\boldsymbol{\pi}(2)b}\right)$ que se anulam. Então podemos obter algo diferente de zero somente quando $r=c$. Então podemos escrever

$$\Delta_{cr} = \delta_{cr}\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{\pi}\in S_3}\sum_{a,b=1}^{3}\mathrm{P}_{\boldsymbol{\pi}}\Theta_{\boldsymbol{\pi}(1)a}\Theta_{\boldsymbol{\pi}(2)c}\Theta_{\boldsymbol{\pi}(3)b}\varepsilon_{abc} \qquad (0.0.38)$$

Para cada valor de c temos dois termos que contribuem com sinal oposto e que diferem por uma permutação impar, o que compensa o sinal. Então isto cancela o fator ½ na frente. *a*, *b*, *c* tem que ser permutação dos números 1,2,3. Qual permutação não importa já que se soma nos ouros índices sobre todas as permutações. Ao final obtemos:

$$\begin{aligned}\Delta_{cr} &= \delta_{cr}\sum_{\boldsymbol{\pi}\in S_3}\mathrm{P}_{\boldsymbol{\pi}}\Theta_{\boldsymbol{\pi}(1)1}\Theta_{\boldsymbol{\pi}(2)2}\Theta_{\boldsymbol{\pi}(3)3} = \\ &= \delta_{cr}\det\left(\mathbf{\Theta}\right)\end{aligned} \qquad (0.0.39)$$

Podemos inserir isto na lei de transformação (0.0.34):

$$\breve{\omega}_c = \det\left(\mathbf{\Theta}\right)\sum_{l=1}^{3}\tilde{\omega}_l\,\Theta_{lc} \qquad (0.0.40)$$

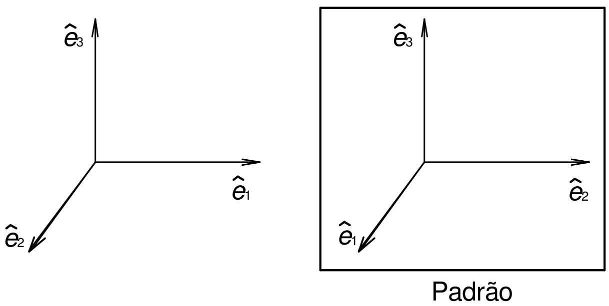
Se não fosse o fator $\det(\boldsymbol{\Theta})$ esta seria exatamente a lei de transformação das componentes de um vetor. Se $\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$, as componentes deste vetor na nova base são

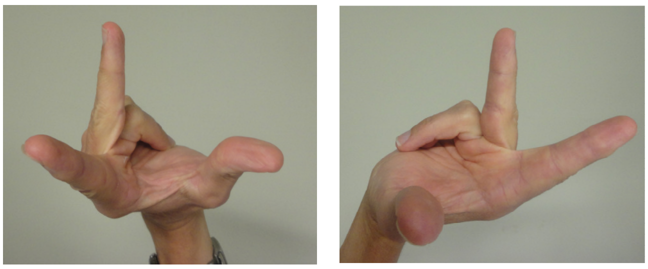
$$\begin{aligned} \breve{a}_c &= \hat{f}_c \cdot \vec{a} = \left(\sum_{l=1}^{3} \hat{e}_l\,\Theta_{lk}\right)\cdot \vec{a} = \\ &= \sum_{l=1}^{3} a_l\,\Theta_{lk} \end{aligned} \tag{0.0.41}$$

Isto coincide com a lei de transformação dos componentes de $\tilde{\tilde{\omega}}$ desde que $\det(\boldsymbol{\Theta}) = 1$. Da fórmula (0.0.28) concluímos que $\det(\boldsymbol{\Theta}) = \pm 1$. Caso a nova base $\left\{\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3\right\}$ difira da antiga base apenas por uma rotação temos $\det(\boldsymbol{\Theta}) = 1$ e a lei de transformação das componentes de $\tilde{\tilde{\omega}}$ é consistente. Mas, com mudanças de base que envolvam inversões, a lei de transformação não é correta. Então em quanto concordamos em nuca fazer mudanças de base que tenha $\det(\boldsymbol{\Theta}) = -1$ podemos representar o mapeamento $\tilde{\Omega}$ pelo vetor $\tilde{\tilde{\omega}}$. Podemos dizer que $\tilde{\tilde{\omega}}$ é "quase" um vetor. Chama-se este tipo de vetor de ***pseudovetor***. Quem não gosta deste tipo de pseudo-objetos pode tranquilamente trabalhar diretamente com o mapeamento $\tilde{\Omega}$.

Por enquanto expressamos apenas as três componentes independentes que existem dentro do mapeamento $\tilde{\Omega}$ em termos de um pseudovetor. Mas, queremos mais. O mapeamento faz algo, ele relaciona um vetor com outro $\tilde{\Omega}: \vec{a} \mapsto \tilde{\Omega}\vec{a}$. Gostaríamos de obter este relacionamento com a ajuda do pseudovetor $\tilde{\tilde{\omega}}$. Isto pode ser feito com um novo tipo de "produto".

Fig. 3.2.1 Uma base padrão (na moldura) e uma que não corresponde ao *padrão da mão direita*. O vetor desenhado inclinado dever ser imaginado como saindo do plano do papel na direção ao observador.





Primeiramente vamos generalizar o relacionamento entre $\tilde{\Omega}$ e $\tilde{\tilde{\omega}}$ para outros mapeamentos e vetores que não precisam ter a interpretação de velocidade angular. Primeiramente temos que selecionar bases ortonormais para evitar os problemas de transformações de base que envolvam $\det(\boldsymbol{\Theta}) = -1$. Imagine o conjunto de todas as bases ortonormais num espaço vetorial $\mathbb{V}$ de três dimensões. Neste conjunto podemos definir uma relação de equivalência. Vamos chamar duas bases chiral[1]-equivalente se a

[1] Do grego: Χειρομορφία = forma da mão.

transformação entre eles satisfaz $\det(\Theta) = +1$. Esta relação de equivalência decompõe o conjunto de bases ortonormais em exatamente duas classes. Vamos escolher uma destas classes como padrão. Geralmente escolhe-se a classe de bases da mão direita como aquela base na moldura da figura 3.2.1.

Seja $A : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ um mapeamento linear cuja matriz associada $A_{kl} = \hat{e}_k \cdot A\hat{e}_l$ numa das bases ortonormais do conjunto padrão seja antisimétirca

$$\hat{e}_k \cdot B\hat{e}_l \quad = \quad -\hat{e}_l \cdot B\hat{e}_k \tag{0.0.42}$$

Associamos a este mapeamento o vetor $\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$ cujas componentes são dados por

$$a_c \quad = \quad -\frac{1}{2}\sum_{a,b=1}^{3} A_{ab}\varepsilon_{abc} \qquad (0.0.43).$$

Inversamente seja $\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3$ um vetor em $\mathbb{V}$. Associamos a este vetor um mapeamento $A : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tal que

$$A_{ab} \quad = \quad -\sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc} a_c \tag{0.0.44}$$

Então definimos o produto vetorial

$$\vec{a}\times\vec{b} \quad \underset{def.}{=} \quad A\vec{b} \tag{0.0.45}$$

Em termos dos componentes dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ numa base padrão podemos escrever o vetor $\vec{a}\times\vec{b}$:

$$\begin{aligned} \vec{a}\times\vec{b} \quad &= \quad -\sum_{a,b,c=1}^{3} \hat{e}_a\,\varepsilon_{abc}\,a_c\,b_b \quad = \quad \sum_{a,b,c=1}^{3} \hat{e}_a\,\varepsilon_{acb}\,a_c\,b_b \quad = \\ &= \quad \sum_{a,b,c=1}^{3} \hat{e}_c\,\varepsilon_{cab}\,a_a\,b_b \end{aligned} \tag{0.0.46}$$

Note que não fizemos absolutamente nada no último passo, além de mudar nomes de índices mudos para ficar com uma fórmula mais bonita. É costume escrever esta última fórmula em forma de um determinante.

$$\vec{a}\times\vec{b} \quad = \quad \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{0.0.47}$$

Desta representação do produto vetorial percebemos imediatamente que este produto é antisimétrico:

$$\vec{a}\times\vec{b} \quad = \quad -\vec{b}\times\vec{a} \tag{0.0.48}$$

Produtos antisimétricos não são muito comuns. De fato poder-se-ia questionar se a operação "$\times$" merece o nome de produto. Esta operação tem poucas propriedades em comum com outros produtos. A única propriedade que pode ser citada como justificativa do nome produto é a lei distributiva:

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) \quad = \quad \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c} \tag{0.0.49}$$

Esta lei vale, porque o mapeamento A associado ao $\vec{a}$ é linear. De fato vale para qualquer combinação linear

$$\vec{a}\times(\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}) \quad = \quad \beta(\vec{a}\times\vec{b})+\gamma(\vec{a}\times\vec{c}) \qquad (0.0.50)$$

<u>O produto vetorial não obedece nem sequer a uma lei associativa</u>! No lugar da lei associativa vale uma outra lei, a saber, a identidade de Jacobi

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \;+\; \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) \;+\; \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) \quad = \quad 0 \qquad (0.0.51).$$

Repare que os vetores aparecem ciclicamente permutados. Para este tipo de produto vetorial duplo vale a seguinte fórmula útil:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \quad = \quad \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) \quad - \quad \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) \qquad (0.0.52)$$

Para facilitar a memorização desta fórmula ela recebeu o nome de "regra do bac menos cab". No entanto, este nome sozinho não resolve tudo, tem que se lembrar também dos lugares dos parênteses!

Cuidaremos agora do entendimento mais intuitivo geométrico do pseudovetor $\tilde{\tilde{\omega}}$. O mapeamento $M_{\tilde{R}R\,t}M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1}$, cuja derivada deu origem ao $\tilde{\tilde{\omega}}$, é um giro. Derivada significa uma aproximação linear da variação do valor de uma função. Se t_1 difere do tempo t apenas por um valor ε muito pequeno, isto é $t_1 = t+\varepsilon$, podemos aproximar o mapeamento $M_{\tilde{R}R\,t}M^{-1}_{\tilde{R}R\,t_1}$ da seguinte forma:

$$M_{\tilde{R}R\,t}M^{-1}_{\tilde{R}R\,t+\varepsilon} \quad = \quad 1+\varepsilon\,\Omega + \text{termos de ordem superior em } \varepsilon \qquad (0.0.53)$$

Na linguagem dos físicos falamos:

$$\text{"para } \varepsilon \text{ infinitesimal vale} \quad M_{\tilde{R}R\,t}M^{-1}_{\tilde{R}R\,t+\varepsilon} \quad = \quad 1+\varepsilon\,\Omega\,\text{"} \qquad (0.0.54)$$

O termo "infinitesimal" significa que numa fórmula como $M_{\tilde{R}R\,t}M^{-1}_{\tilde{R}R\,t+\varepsilon} = 1+\varepsilon\,\Omega$ devemos fechar os olhos em relação a erros de ordem superior em ε. Como todo giro, o giro $M_{\tilde{R}R\,t}M^{-1}_{\tilde{R}R\,t+\varepsilon}$ tem um eixo de giro. O fato que todo giro tem um eixo parece óbvio. Aqui vamos tomar este fato como algo evidente, mas no apêndice damos uma demonstração deste fato. Os vetores que apontam na direção do eixo de giro não sofrem nada com o giro e todos os vetores que têm alguma componente perpendicular ao eixo sofrem alguma mudança, desde que o giro não seja simplesmente a identidade (nenhum giro). Para um ângulo de giro infinitesimal um vetor perpendicular ao eixo deve sofrer uma alteração que é perpendicular ao próprio vetor e ao eixo de giro e cujo módulo é dado pelo produto do ângulo infinitesimal de giro e módulo do vetor:

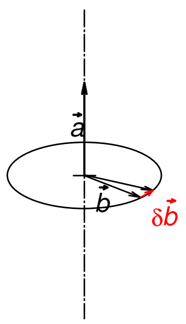


Fig. 3.2.2

$$\text{para } \vec{a} \text{ paralelo ao eixo de giro: } M_{\tilde{R}R\,t}M^{-1}_{\tilde{R}R\,t+\varepsilon}\vec{a} = \vec{a} \qquad (0.0.55)$$

$$\text{para } \vec{b} \text{ perpendicular ao eixo de giro : } \begin{cases} \left| M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t+\varepsilon} \vec{b} - \vec{b} \right| \quad = \quad \left| \vec{b} \right| \times \text{módulo do ângulo} \\ M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t+\varepsilon} \vec{b} - \vec{b} \quad \text{é perpendicular ao eixo} \\ M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t+\varepsilon} \vec{b} - \vec{b} \quad \text{é perpendicular ao } \vec{b} \end{cases}$$
(0.0.56)

Com (0.0.54) temos para um tempo ε infinitesimal

$$\text{para } \vec{a} \text{ paralelo ao eixo de giro: } \varepsilon\tilde{\Omega}\vec{a} = 0 \qquad (0.0.57)$$

$$\text{para } \vec{b} \text{ perpendicular ao eixo de giro : } \begin{cases} \left| \varepsilon\Omega\vec{b} \right| \quad = \quad \left| \vec{b} \right| \times \text{módulo do ângulo infinitesimal} \\ \varepsilon\Omega\vec{b} \quad \text{é perpendicular ao eixo} \\ \varepsilon\Omega\vec{b} \quad \text{é perpendicular ao } \vec{b} \end{cases}$$
(0.0.58)

Por outro lado podemos escrever o mapeamento Ω na forma $\vec{\omega}\times.....$. Com a antisimetria do produto vetorial temos $\vec{\omega}\times\vec{\omega}=0$. Então concluímos que o vetor $\vec{\omega}$ aponta na direção do eixo de giro. Para um vetor $\vec{b}$ perpendicular ao eixo temos $\left|\varepsilon\,\vec{\omega}\times\vec{b}\right| = |\varepsilon||\vec{\omega}|\left|\vec{b}\right|$ então podemos concluir que $|\varepsilon||\vec{\omega}|$ é o módulo do ângulo infinitesimal de giro. Falta descobrir a orientação do vetor $\vec{\omega}$. Esta orientação é tal que um parafuso direito ao ser girado conforme o giro $M_{\tilde{R}R\,t} M^{-1}_{\tilde{R}R\,t+\varepsilon}$ avançaria no sentido do vetor $\vec{\omega}$.

O fato que $\vec{\omega}$ não é verdadeiramente um vetor podemos também ver intuitivamente comparando os comportamentos de vetores e giros na frente de um espelho. A figura 3.2.3 exemplifica isto. Vetores paralelos ao plano do espelho coincidem com a sua imagem especular enquanto giros com eixo paralelos ao plano de espelho têm uma imagem contrária. Vetores perpendiculares ao plano de espelho mudam de sinal enquanto giros ficam inalterados. Então percebemos que giros e vetores são objetos geométricos diferentes e a representação de uma velocidade angular por um vetor é apenas um "quebra galho" ou "paliativo".

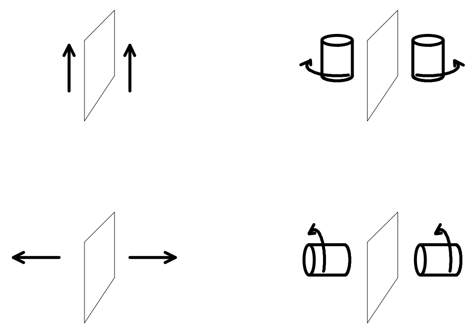


Fig. 3.2.3 Comportamento de um vetor e de um giro na frente de um espelho.

Apêndice Demonstração da existência de um eixo de giro.

Vamos investigar os giros mais detalhadamente: seja Γ um giro, isto é um mapeamento linear $\Gamma : \mathbb{D}_R \to \mathbb{D}_R$ que conserva normas, $\forall\left(\vec{d} \in \mathbb{D}_R\right) : \left|\vec{d}\right| = \left|\Gamma \vec{d}\right|$, e cuja matriz $\boldsymbol{\Gamma}$ associada tem determinante $+1$. Como Γ mapeia o espaço de vetores deslocamento em si mesmo, tem sentido perguntar se existem vetores que não sofrem alteração de direção sob a ação do mapeamento Γ. Seriam vetores que cumprem a seguinte equação

$$\Gamma \vec{a} \quad = \quad \gamma \vec{a} \tag{0.0.59}$$

onde γ é algum número. Certamente o vetor nulo cumpre esta equação. Mas esta solução trivial[2] não interessa e não é contada como solução. Este tipo de equação é chamado de *equação de auto-valor*. Um número γ e vetor $\vec{a}$ que satisfazem a equação são chamados de auto-valor e auto-vetor respectivamente. Em termos de matrizes a equação (0.0.59) toma a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} \gamma a_1 \\ \gamma a_2 \\ \gamma a_2 \end{pmatrix} \tag{0.0.60}$$

Podemos escrever isto também da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}-\gamma & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}-\gamma & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33}-\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad = \quad 0 \tag{0.0.61}$$

Condição necessária e suficiente para a existência de uma solução não trivial é

$$\det \begin{pmatrix} \Gamma_{11}-\gamma & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}-\gamma & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33}-\gamma \end{pmatrix} \quad = \quad 0 \tag{0.0.62}$$

Esta equação é uma equação cúbica na incógnita γ. Qualquer equação cúbica tem pelo menos uma solução real. Quando mandamos γ para $\pm\infty$ o determinante $\det\left(\boldsymbol{\Gamma} - \gamma \mathbf{1}\right)$ tende à $\pm\infty$ ou à $\mp\infty$, mas sempre tende a valores opostos nos dois extremos. Como os polinômios cúbicos são funções contínuas tem que existir algum valor γ_1 onde $\det\left(\boldsymbol{\Gamma} - \gamma_1 \mathbf{1}\right) = 0$. Então, com este valor de γ_1 existe uma solução $\vec{a}_{(1)}$ da equação (0.0.59):

$$\Gamma \vec{a}_{(1)} \quad = \quad \gamma_1 \vec{a}_{(1)} \tag{0.0.63}$$

Nesta fórmula botamos um índice $_{(1)}$ no vetor solução para indicar que se trata de uma solução associada ao valor especial γ_1. Com o fato que Γ conserva produtos escalares segue

$$\vec{a}_{(1)} \cdot \vec{a}_{(1)} \quad = \quad \left(\Gamma \vec{a}_{(1)}\right) \cdot \left(\Gamma \vec{a}_{(1)}\right) \quad = \quad \left(\gamma_1 \vec{a}_{(1)}\right) \cdot \left(\gamma_1 \vec{a}_{(1)}\right) \quad = \quad \left(\gamma_1\right)^2 \vec{a}_{(1)} \cdot \vec{a}_{(1)} \tag{0.0.64}$$

Com $\left|\vec{a}_{(1)}\right| \neq 0$ segue

$$\gamma_1 \quad = \quad \pm 1 \tag{0.0.65}$$

[2] A solução do vetor nulo é chamada de trivial por ser muito simples. A palavra "trivial" vem do nome do ciclo básico nas universidades medievais. Este ciclo básico se chamava "trivium", que vem do número três, porque este ciclo básico tinha somente três disciplinas: lógica, gramática e retórica. Estas disciplinas são supostamente as simples. Daí o significado da palavra trivial.

Agora vamos mostrar que o número $+1$ é sempre um autovalor de um giro. No resultado (0.0.65) temos duas opções; ou $\gamma_1 = +1$ ou $\gamma_1 = -1$. No primeiro caso já vale que existe um autovalor +1. Para completar a demonstração vamos agora supor que $\gamma_1 = -1$. Vamos normalizar o auto-vetor $\vec{a}_{(1)}$ e usar este vetor como o primeiro elemento de uma base ortonormal $\{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3\}$, com $\hat{b}_1 = \vec{a}_{(1)}$ e $\hat{b}_j \cdot \hat{b}_k = \delta_{lk}$. Para $k \neq 1$ temos

$$0 \;=\; \hat{b}_k \cdot \hat{b}_1 \;=\; (\Gamma\hat{b}_k)\cdot(\Gamma\hat{b}_1) \;=\; -(\Gamma\hat{b}_k)\cdot\hat{b}_1 \qquad (0.0.66)$$

Então na base $\{\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3\}$, a matriz do giro Γ tem a forma

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ 0 & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix} \qquad (0.0.67)$$

Então a equação característica (0.0.62) tem a forma

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \det\begin{pmatrix} -1-\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{22}-\gamma & \Gamma_{23} \\ 0 & \Gamma_{32} & \Gamma_{33}-\gamma \end{pmatrix} \;= \\ &=\; (-1-\gamma)\left\{\gamma^2 - \gamma(\Gamma_{22}+\Gamma_{33}) + \det\begin{pmatrix} \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix}\right\} \end{aligned} \qquad (0.0.68)$$

Os demais auto-valores que não correspondem ao auto-vetor $\vec{a}_{(1)}$ são soluções da equação

$$\gamma^2 - \gamma(\Gamma_{22}+\Gamma_{33}) + \det\begin{pmatrix} \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix} \;=\; 0 \qquad (0.0.69)$$

Com $\det(\boldsymbol{\Gamma}) = +1$ segue

$$\det\begin{pmatrix} \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \end{pmatrix} \;=\; -1$$

e a equação (0.0.69) tem duas soluções reais:

$$\begin{aligned} \gamma_2 \;&=\; \frac{\Gamma_{22}+\Gamma_{33}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Gamma_{22}+\Gamma_{33}}{2}\right)^2 + 1} \\ \gamma_3 \;&=\; \frac{\Gamma_{22}+\Gamma_{33}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\Gamma_{22}+\Gamma_{33}}{2}\right)^2 + 1} \end{aligned} \qquad (0.0.70)$$

Com o mesmo argumento usado para chegar na fórmula (0.0.65) obtemos $\gamma_k \;=\; \pm 1$ e com $\det(\boldsymbol{\Gamma}) = +1$ e com a hipótese $\gamma_1 = -1$ concluímos que $\gamma_2 = +1$ e $\gamma_3 = -1$. Isto completa a demonstração que existe sempre um autovalor +1. Temos os seguintes casos:

(a): $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1$ então $\Gamma = \mathbf{1}$ (nenhum giro)

(b): $\gamma_1 = \gamma_3 = -1$ e $\gamma_2 = 1$ então Γ é giro com ângulo de 180°

(c): $\gamma_1 = 1$ e γ_2, γ_3 não são reais então Γ é giro com ângulo $\neq \pm 180^{\circ}$

(0.0.71)

Em todos os casos existem vetores que ficam inalterados pela ação de Γ . Nos caso (b) e (c), nos quais realmente acontece algo, podemos dizer que existe um eixo de rotação dado pelos vetores que ficam inalterados.