

3.3 A segunda lei de Newton num referencial geral.

Agora vamos supor que R seja um referencial inercial no qual formulamos a segunda e a terceira lei de Newton. A grandeza mais importante nestas leis é a aceleração. Então vamos agora analisar a fórmula de aceleração (3.1.10) mais detalhadamente:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2} + M_{\tilde{R}Rt}^{-1} \tilde{a}(t) + 2 \frac{dM_{\tilde{R}Rt}^{-1}}{dt} \tilde{v}(t) + \frac{d^2 M_{\tilde{R}Rt}^{-1}}{dt^2} \tilde{r}(t)$$

Da mesma maneira como limos a fórmula da velocidade (3.1.9) no referencial \tilde{R} vamos ler a fórmula da aceleração neste referencial:

$$M_{\tilde{R}Rt} \vec{a}(t) = M_{\tilde{R}Rt} \frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2} + \tilde{a}(t) + 2M_{\tilde{R}Rt} \frac{dM_{\tilde{R}Rt}^{-1}}{dt} \tilde{v}(t) + M_{\tilde{R}Rt} \frac{d^2 M_{\tilde{R}Rt}^{-1}}{dt^2} \tilde{r}(t) \quad (3.3.1)$$

O termo que leva o fator 2 pode ser escrito com a ajuda da velocidade angular:

$$M_{\tilde{R}Rt} \vec{a}(t) = M_{\tilde{R}Rt} \frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2} + \tilde{a}(t) + 2\Omega(t) \tilde{v}(t) + M_{\tilde{R}Rt} \frac{d^2 M_{\tilde{R}Rt}^{-1}}{dt^2} \tilde{r}(t) \quad (3.3.2)$$

Agora tentaremos expressar também o termo da segunda derivada temporal do inverso do martyriion em termos da velocidade angular. Temos

$$\begin{aligned} M_{\tilde{R}Rt} \frac{d^2 M_{\tilde{R}Rt}^{-1}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[M_{\tilde{R}Rt} \frac{dM_{\tilde{R}Rt}^{-1}}{dt} \right] - \frac{dM_{\tilde{R}Rt}}{dt} \frac{dM_{\tilde{R}Rt}^{-1}}{dt} = \\ &= \frac{d\Omega}{dt} - \frac{dM_{\tilde{R}Rt}}{dt} M_{\tilde{R}Rt}^{-1} M_{\tilde{R}Rt} \frac{dM_{\tilde{R}Rt}^{-1}}{dt} = \\ &= \frac{d\Omega}{dt} + M_{\tilde{R}Rt} \frac{dM_{\tilde{R}Rt}^{-1}}{dt} M_{\tilde{R}Rt} \frac{dM_{\tilde{R}Rt}^{-1}}{dt} = \\ &= \frac{d\Omega}{dt} + \Omega \Omega \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

No penúltimo passo usamos

$$0 = \frac{d\mathbf{1}}{dt} = \frac{d[M_{\tilde{R}Rt} M_{\tilde{R}Rt}^{-1}]}{dt} \quad (3.3.4)$$

Podemos inserir o resultado (3.3.3) na fórmula (3.3.2):

$$M_{\tilde{R}Rt} \vec{a} = M_{\tilde{R}Rt} \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \tilde{a} + 2\Omega \tilde{v} + \frac{d\Omega}{dt} \tilde{r} + \Omega \Omega \tilde{r} \quad (3.3.5)$$

Nesta fórmula omitimos de novo os (t) para obter uma fórmula mais compacta. Sabemos desde já que todo depende do tempo.

A segunda lei de Newton para um sistema de N massas puntiformes era

$$m_k \vec{a}_k = \sum_{l \neq k} \vec{F}_{kl} \quad (3.3.6)$$

Aplicando $M_{\tilde{R}Rt}$ nesta equação e usando (3.3.5) obtemos:

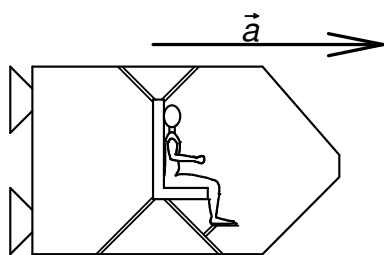
$$m_k M_{\tilde{R}Rt} \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + m_k \tilde{a} + m_k 2\Omega \tilde{v} + m_k \frac{d\Omega}{dt} \tilde{r} + m_k \Omega \Omega \tilde{r} = \sum_{l \neq k} M_{\tilde{R}Rt} \vec{F}_{kl} \quad (3.3.7)$$

O observador situado no referencial \vec{R} vai querer interpretar esta equação de novo como uma segunda lei de Newton “massa vezes aceleração = força”. Então ele escreve todos os termos do lado esquerdo que diferem do termo $m_k \vec{a}$ para o lado direito e interpreta estes termos como forças:

$$m_k \vec{a} = -m_k M_{\vec{R}Rt} \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} - m_k 2 \Omega \vec{v} - m_k \frac{d\Omega}{dt} \vec{r} - m_k \Omega \Omega \vec{r} + \sum_{l \neq k} M_{\vec{R}Rt} \vec{F}_{kl} \quad (3.3.8)$$

Esta interpretação modifica o conceito de força. As forças verdadeiras \vec{F}_{kl} , ou lidas do referencial novo $M_{\vec{R}Rt} \vec{F}_{kl}$, descrevem a interação entre partículas. A partícula l exerce a força \vec{F}_{kl} na partícula k . As “forças” $-m_k M_{\vec{R}Rt} \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}$, $-m_k 2 \Omega \vec{v}$, $-m_k \frac{d\Omega}{dt} \vec{r}$ e $-m_k \Omega \Omega \vec{r}$, que são chamadas de forças inerciais, não são exercidas por nada, eles não descrevem uma interação. Eles são um artefato gerado pela escolha de referencial. O termo $-m_k \Omega \Omega \vec{r}$ representa a famosa força centrífuga e o termo $-m_k 2 \Omega \vec{v}$ a força de Coriolis¹.

Veremos uns exemplos simples: Imagine um foguete que está no espaço inter-estelar bem longe de todos os objetos que poderiam perturbar seu comportamento. Dentro dele há um astronauta como indicado na figura 3.3.1. Agora o astronauta aciona os motores do foguete de tal forma que este se mova com aceleração para frente. Neste momento o astronauta sente uma pressão nas costas. O assento exerce uma força (de natureza eletromagnética) nas moléculas da superfície do seu corpo. Mas, do ponto de vista do astronauta ele está sentado quieto no referencial do foguete e na opinião dele seu corpo não tem aceleração. Então, com o conhecimento da segunda lei de Newton, ele conclui que a soma das forças que atuam sobre seu corpo deve ser nula. Consequentemente ele imagina uma força que aponta para trás e que compensa a força que o assento exerce nas costas. Esta força corresponde ao termo



$-m_k M_{\vec{R}Rt} \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}$ da equação (3.3.8).

Fig. 3.3.1 Foguete acelerado com astronauta.

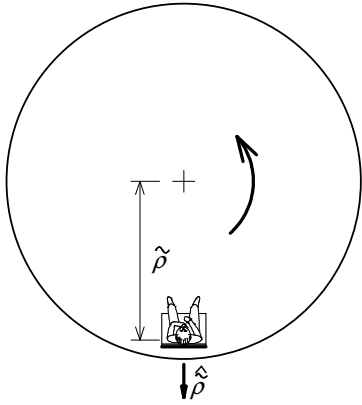
Agora o astronauta solta um pequeno objeto da mão. Ele está acostumado que os objetos que ele larga sem velocidade inicial ficam pairando no mesmo lugar onde ele os largou. Mas agora com os motores do

foguete ligados, ele observa que o objeto se desloca para trás aceleradamente. O astronauta vá atribuir este comportamento a uma força que novamente corresponde ao

termo $-m_k M_{\vec{R}Rt} \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}$.

Como segundo exemplo consideramos um disco rígido em rotação com velocidade angular ω constante. Uma cadeira está montada perto da beirada do disco e uma

¹ Gaspard-Gustave de Coriolis ou Gustave Coriolis (Frances: [gaspɑʁ ɡystav də kɔʁjɔlis]; 21 Maio 1792 – 19 Setembro 1843)



pessoa de massa m está sentada nesta cadeira olhando para o centro do disco pelo qual passa o eixo de rotação como mostra a figura 3.3.2.

Fig. 3.3.2 Carrossel com observador em rotação.

Sabemos que o assento deve exercer a força centrípeta $-\hat{\rho}m\rho\omega^2$ no corpo da pessoa para manter-lo na trajetória circular. Nesta expressão ρ é a distância do corpo do eixo de rotação e $\hat{\rho}$ é um vetor unitário apontando para fora. Conseqüentemente a pessoa percebe uma força nas costas que é exercida pelo assento. Do ponto de vista desta pessoa ela está sentada quieta no assento e ela julga não ter aceleração nenhuma. Ela aplica a segunda lei de Newton e conclui que a força resultante que atua sobre o corpo é nula. Então ela conclui que deve existir uma força que anula as forças exercidas pelo assento. Esta força imaginada é a força centrífuga. Vamos calcular este termo: Usaremos coordenadas cilíndricas no referencial do disco com o eixo \hat{z} coincidindo com o eixo de rotação. As coordenadas cilíndricas $\langle \tilde{\rho}, \tilde{\phi}, \tilde{z} \rangle$ do espaço do referencial do disco se relacionam com coordenadas Cartesianas $\langle \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \rangle$ do mesmo espaço da seguinte forma:

$$\tilde{x} = \tilde{\rho} \cos(\tilde{\phi}), \quad \tilde{y} = \tilde{\rho} \sin(\tilde{\phi}) \quad (3.3.9)$$

e os vetores básicos associados são

$$\hat{\rho} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \tilde{\rho}}, \quad \hat{\phi} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \tilde{\phi}}, \quad \hat{z} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \tilde{z}}$$

$$\hat{\rho} = \hat{x} \cos(\tilde{\phi}) + \hat{y} \sin(\tilde{\phi}), \quad \hat{\phi} = -\hat{x} \sin(\tilde{\phi}) + \hat{y} \cos(\tilde{\phi}), \quad \hat{z} = \hat{z} \quad (3.3.10)$$

Temos $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ e a força centrífuga que atua sobre uma massa no plano $\hat{z} = 0$ é

$$-m \Omega \Omega \tilde{\mathbf{r}} = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \hat{\rho} \tilde{\rho}) = -m \omega^2 \hat{z} \times \hat{\phi} \tilde{\rho} = +\hat{\rho} m \omega^2 \tilde{\rho} \quad (3.3.11)$$

Agora vamos imaginar que há uma mesa sem atrito montada encima do disco giratório (daquelas que tem furinhos na tampa por onde sai ar comprimido) e a pessoa sentada na borda do disco lança um disquinho nesta mesa empurrando-o na direção ao centro do disco com velocidade $\vec{v} = -v_0 \hat{\rho}$. Vamos supor que o disquinho foi lançado no exato momento quando a pessoa estava passando encima do eixo x de coordenadas no espaço do referencial fixo. Neste referencial o disquinho faria simplesmente um movimento retilíneo uniforme:

$$x(t) = \tilde{\rho}_0 - v_0 t, \quad y(t) = \tilde{\rho}_0 \omega t \quad (3.3.12)$$

ou, em termos do vetor posição com a origem no centro da mesa:

$$\vec{r}(t) = \hat{x}\{\tilde{\rho}_0 - v_0 t\} + \hat{y} \tilde{\rho}_0 \omega t \quad (3.3.13)$$

Na próxima sessão mostraremos que no espaço do referencial em rotação o movimento do disquinho é descrito pela função

$$\vec{r}(t) = \hat{x}\{(\tilde{\rho}_0 - v_0 t) \cos(\omega t) + \tilde{\rho}_0 \omega t \operatorname{sen}(\omega t)\} + \hat{y}\{\tilde{\rho}_0 \omega t \cos(\omega t) - (\tilde{\rho}_0 - v_0 t) \operatorname{sen}(\omega t)\} \quad (3.3.14)$$

A figura 3.3.3 mostra um exemplo de uma trajetória no referencial do disco giratório. Neste exemplo escolhemos $v_0 = 2\tilde{\rho}_0\omega$. O observador que está sentado no disco vai explicar esta trajetória curvada com as forças de Coriolis e com a força centrífuga.

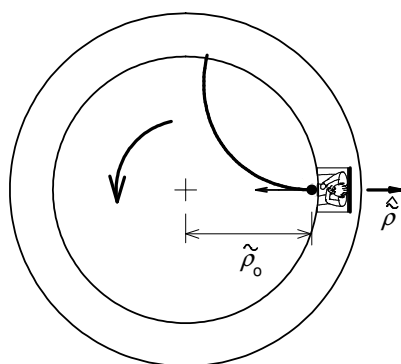


Fig. 3.3.3 Trajetória no espaço de um referencial em rotação de um disquinho que foi lançado numa mesa sem atrito e com velocidade inicial na direção ao eixo de rotação.

Um fato chama a atenção nas forças inerciais. Eles são proporcionais à massa da partícula. Este detalhe eles têm em comum com a força de atração gravitacional. Uma massa M situada na posição \vec{r}_M atrai uma massa m situada na posição \vec{r} com a força

$$\vec{F} = -m \frac{GM(\vec{r} - \vec{r}_M)}{|\vec{r} - \vec{r}_M|^3} \quad (3.3.15)$$

Numa região espacial muito pequena em comparação com a distância $|\vec{r} - \vec{r}_M|$ entre as massas um observador que por alguma razão não pode ver ou perceber a massa M pode achar que a força que atua sobre a massa m é somente uma forças inercial. Localmente ele pode adotar um referencial diferente no qual a força sobre a massa m simplesmente desaparece. Este referencial é construído a parti de corpos que se encontrem em queda livre. É isto que acontece nas cápsulas espaciais. Frequentemente podemos ver imagens na televisão com astronautas brincando com pequenos objetos soltos que simplesmente flutuam ou andam com velocidade constante sem cair como a gravitação não existisse. Na verdade a atração gravitacional no local do satélite é ainda bastante forte. Mas toda a cápsula espacial está caindo livremente na direção à Terra, sem chegar na Terra, e neste referencial em queda livre a força inercial compensa a força gravitacional. Mas, este cancelamento é local. Se investigássemos uma região espacial um pouco mais extensa notaremos que o cancelamento não é perfeito. Ele não pode ser perfeito numa região extensa porque a força gravitacional depende da posição e a força inercial do primeiro termo $M_{RRt} \frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2}$ não depende da posição. A pequena

diferença do não cancelamento de força gravitacional e força inercial é chamada de força de maré. A possibilidade de cancelar uma força gravitacional pela escolha local de referencial é a essência do *princípio de equivalência*, que é um ingrediente importante na construção da *teoria da relatividade geral*.

Se podemos localmente cancelar uma força gravitacional com uma força inercial podemos também fazer o inverso: fazer de conta que uma força inercial é uma força gravitacional. Isto não é correto, pois a força gravitacional é uma força exercida por um corpo enquanto a força inercial não é exercida por nada e não possui o par de reação. Mas, para fins práticos esta substituição pode servir. O exemplo clássico é a aceleração

da gravidade num laboratório. Se você medir a aceleração da gravidade g dentro do laboratório você mede na verdade a soma da aceleração causada pela atração da Terra e a aceleração devido a força centrífuga causada pela rotação da Terra. A Terra dá uma volta completa em aproximadamente 86164,1 s. Isto é a duração de um dia sideral. Um dia sideral corresponde a uma volta completa da Terra num referencial inercial. Por outro lado um dia solar usa a aparente posição do Sol como critério para dizer se a Terra completou uma volta. Como a Terra dá uma volta ao redor do Sol durante um ano os dias solares e dias siderais diferem um pouco. Mais tarde veremos que a velocidade angular do movimento orbital da Terra por volta do Sol não é constante. Consequentemente a diferença entre dia solar e dia sideral muda também durante um ano. 24 h (que são 86400 s) é a duração média do dia solar. Com o tempo de rotação 86164,1 s obtemos uma velocidade angular

$$|\vec{\omega}_{\text{Terra}}| \approx 7,292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1} \quad (3.3.16)$$

e este pseudovetor aponta na direção do eixo da Terra com a orientação do Sul para o Norte. Numa posição no equador a força centrífuga seria

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{centrífug.}} &= m \hat{\rho} \rho |\vec{\omega}_{\text{Terra}}|^2 = \\ &= m \hat{\rho} 6378137,0 \text{ m} \times (7,292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1})^2 = m \hat{\rho} 0,0339 \text{ m s}^{-2} \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Isto, com um g de aproximadamente $09,81 \text{ m s}^{-2}$, significa que a verdadeira aceleração da gravidade seria uns 0,3% maior que o g medido no laboratório no equador. Para os fins práticos não interessa o que é gravitação verdadeira e qual parcela é força centrífuga. Na prática vamos usar o g que contém as duas parcelas. Uma discussão análoga pode ser feita com a direção da aceleração da gravidade. Em lugares entre equador e pólos a direção do fio do prumo não aponta exatamente para o centro da Terra. A força centrífuga provoca um desvio do prumo. É a direção do prumo que chamamos de vertical. Então a direção vertical não aponta para o centro da Terra em todos os pontos da Terra. Também a força centrífuga deforma o globo Terrestre um pouco. A Terra não tem exatamente a forma de uma esfera. A distância do centro ao pólo é aproximadamente 6356,8 km e a distância do centro ao equador é aproximadamente 6378,1 km, ou seja 21,3 km maior. Isto é um desvio de aproximadamente 0,3%. A figura 3.3.4 mostra esta situação de forma exagerada. Na verdade o desvio da forma esférica e o desvio do prumo da direção ao centro são tão pequenos que num desenho fiel eles seriam imperceptíveis ao olho.

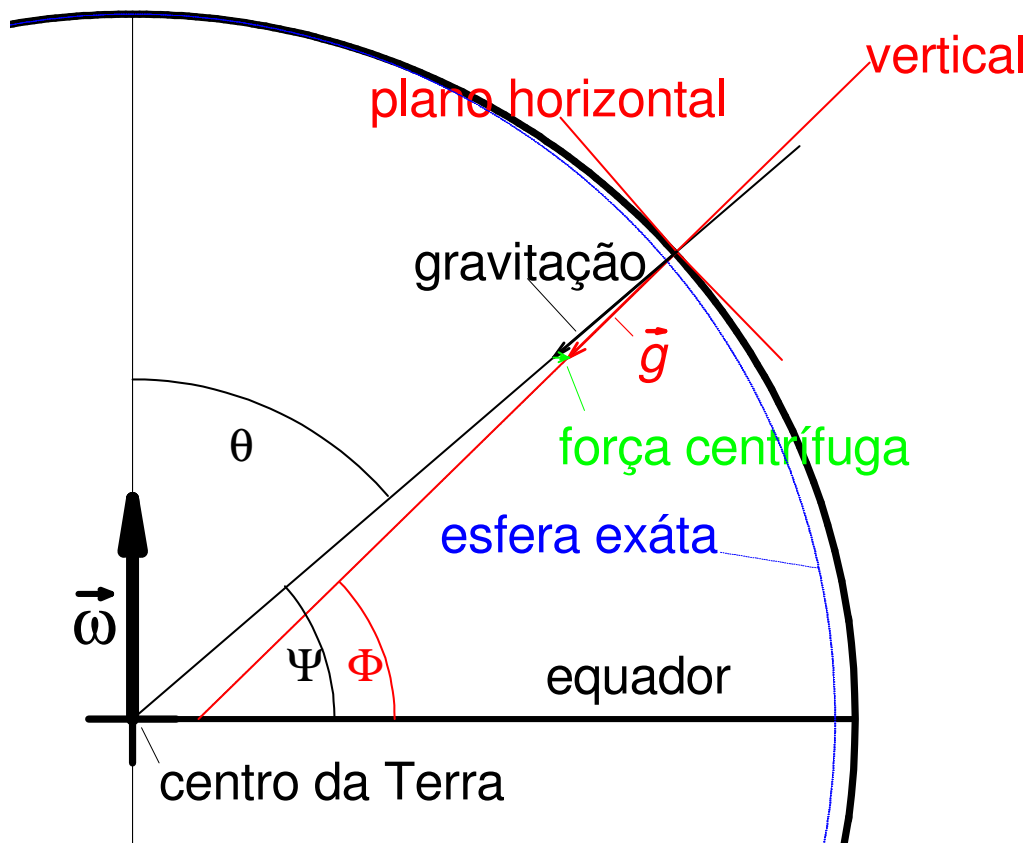


Fig. 3.3.4 Representação exagerada do desvio da forma esférica da Terra e do desvio do prumo da direção central devido à força centrífuga.

A figura deixa evidente que se pode definir diferentes ângulos de latitude para servir como coordenada para pontos na superfície da Terra. Por exemplo, pode-se usar o ângulo que a linha, que une a posição em questão com o centro da Terra, faz com o plano equatorial. Este ângulo está indicado na figura 3.3.4 com o símbolo Ψ . Mas, também se pode usar o ângulo que a direção vertical faz com o plano equatorial. Este ângulo está indicado como a letra Φ . O sistema GPS (Global Positioning System) usa algo parecido com o ângulo Φ , com a única diferença que no lugar da verdadeira direção vertical (direção do prumo) o GPS usa uma direção vertical nominal, que é definida como normal ao plano tangente de um elipsóide de rotação que aproxima a forma verdadeira da Terra bastante bem². Apesar do fato que as diferenças entre os ângulos Ψ e Φ são pequenas ao olho humano as diferenças de localização entre diferentes sistemas de latitude podem chegar a distâncias que ultrapassam 100 m. Então na hora de usar mapas junto com um aparelho de GPS tem que prestar atenção se os dois usam a mesma definição de latitude.

Poder-se-ia argumentar que toda esta discussão complicada dos referenciais não inerciais é supérflua. Um cálculo num referencial inercial parece ser mais simples. Mas, isto não é sempre o caso. Frequentemente a escolha de um referencial não inercial simplifica os cálculos. Um caso famoso desta situação é a análise do comportamento do

² O elipsóide usado pelo sistema GPS tem o semieixo maior (centro – equador) de 6.378.137,0 m e o semieixo menor (centro – pólo) de 6.356.752,3142 m.

pêndulo de Foucault. Jean Bernard Léon Foucault ³ queria demonstrar que a Terra gira e para esta demonstração ele usou um gigantesco pêndulo com uma massa de 28 kg pendurada num fio de 67m de comprimento.



Fig. 3.3.5 Pêndulo de Foucault no Panthéon, Paris. (Imagem tomada da Wikipedia)

Se montássemos um pêndulo destes num laboratório situado exatamente no pólo Sul da Terra, a análise do comportamento do pêndulo seria muito simples. Neste caso a escolha de um referencial inercial seria realmente a mais adequada. O pêndulo oscila simplesmente de forma estacionária e a Terra gira por baixo dele. Nesta situação é evidente que um observador fixo no referencial da Terra viria um pêndulo cujo plano de oscilação gira com uma velocidade angular $-\vec{\omega}_{\text{Terra}}$. Mas para a experiência feita em Paris a situação é bem mais complicada. Neste local o ponto de suspensão do pêndulo faz um trajeto circular no referencial inercial. Nesta situação é vantajoso adotar a Terra como referencial.

Como explicamos acima, podemos absorver a força centrífuga no g e na definição da direção vertical. Além disso, vamos fazer a aproximação usual de considerar \vec{g} um vetor constante dentro do laboratório. Uma vez feito isto podemos agora deslocar a origem do referencial para um ponto dentro do laboratório. A força de Coriolis não sofre nenhuma alteração com esta mudança de origem⁴. Vamos usar o ponto de suspensão do pêndulo como origem e vamos usar coordenadas esféricas. Mas, o eixo \tilde{z} não será mais o eixo de rotação da Terra, como na figura 3.3.4, mas usaremos a direção

³ Jean Bernard Léon Foucault (Francês : [ʒɑ̃ bɛʁnɑʁ lɛɔ̃ fuko]) (18 setembro 1819 – 11 fevereiro 1868). Foucault descobriu correntes induzidas em metais (correntes de Foucault) e ele pesquisou giroscópios.

⁴ A força centrífuga sofreria uma alteração, mas esta seria exatamente compensada por uma alteração do termo $-m_k M_{RRt} d^2 \vec{R} / dt^2$.

vertical como direção do eixo \tilde{z} e com a orientação para baixo (no sentido de \vec{g}). Como não estamos acostumados com sistemas de coordenadas esféricas com o eixo \tilde{z} apontando para baixo e nem com desenhos da Terra com o pólo Sul encima vamos mudar a localização da experiência de Paris para algum lugar da Argentina par obter uma figura mais amigável. Naturalmente vamos exagerar o tamanho do pêndulo na figura para poder enxergar algo. A figura 3.3.6 mostra as coordenadas. O eixo \tilde{z} aponta verticalmente para baixo (na figura para cima) e o eixo \tilde{x} aponta para o pólo sul. Usamos o “~” para indicar que estamos no referencial não inercial.

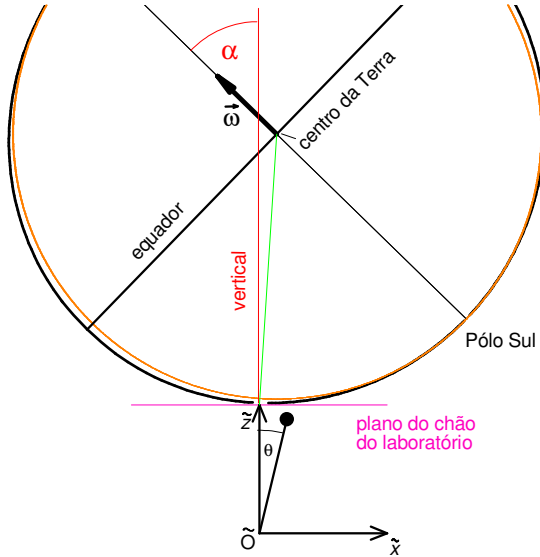


Fig. 3.3.6 Definição de coordenadas para o pêndulo de Foucault em algum lugar imaginado com latitude de aproximadamente 41° S.

A vertical do laboratório faz um ângulo $\alpha = 90^\circ - \Phi$ com o eixo de rotação da Terra. Temos

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \hat{z} \omega \cos \alpha - \hat{x} \omega \sin \alpha = \\ &= \hat{z} \omega_c - \hat{x} \omega_s\end{aligned}\quad (3.3.18).$$

onde introduzimos a abreviação

$$\omega_c \stackrel{def.}{=} \omega \cos \alpha, \quad \omega_s \stackrel{def.}{=} \omega \sin \alpha \quad (3.3.19).$$

Os vetores unitários associados às coordenadas esféricas são (compare o exercício 2 B):

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \hat{x} \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} + \hat{y} \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\varphi} + \hat{z} \cos \tilde{\theta} \\ \hat{\theta} &= \hat{x} \cos \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} + \hat{y} \cos \tilde{\theta} \sin \tilde{\varphi} - \hat{z} \sin \tilde{\theta} \\ \hat{\varphi} &= -\hat{x} \sin \tilde{\varphi} + \hat{y} \cos \tilde{\varphi}\end{aligned}\quad (3.3.20)$$

Destas fórmulas obtemos

$$\begin{aligned}\hat{z} &= \hat{r} \cos \tilde{\theta} - \hat{\theta} \sin \tilde{\theta} \\ \hat{x} &= -\hat{\varphi} \sin \tilde{\varphi} + \hat{r} \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} + \hat{\theta} \cos \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi}\end{aligned}\quad (3.3.21)$$

Então podemos expressar a velocidade angular na base $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\}$:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \hat{r}\{\omega_c \cos \tilde{\theta} - \omega_s \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi}\} + \\ &+ \hat{\theta}\{-\omega_c \sin \tilde{\theta} - \omega_s \cos \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi}\} + \\ &+ \hat{\varphi}\omega_s \sin \tilde{\varphi}\end{aligned}\quad (3.3.22)$$

Do exercício 2B) sabemos que a velocidade da massa do pêndulo é

$$\vec{v} = \hat{r}\dot{\tilde{r}} + \hat{\theta}\tilde{r}\dot{\tilde{\theta}} + \hat{\varphi}\tilde{r}\sin \tilde{\theta}\dot{\tilde{\varphi}} \quad (3.3.23).$$

Mas, no caso do pêndulo o fio de suspensão tem um comprimento fixo de tal forma que a derivada temporal da coordenada \tilde{r} é zero:

$$\vec{v} = \hat{\theta}\tilde{r}\dot{\tilde{\theta}} + \hat{\varphi}\tilde{r}\sin \tilde{\theta}\dot{\tilde{\varphi}} \quad (3.3.24).$$

Com esta expressão vamos calcular a força de Coriolis:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{Coriolis}} &= -2m\vec{\omega} \times \vec{v} = \\ &= \hat{r}2m\tilde{r}\left\{\dot{\tilde{\theta}}\omega_s \sin \tilde{\varphi} + \dot{\tilde{\varphi}}\left[\omega_c(\sin \tilde{\theta})^2 + \omega_s \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi}\right]\right\} + \\ &+ \hat{\theta}2m\tilde{r}\dot{\tilde{\varphi}}\left\{\omega_c \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta} - \omega_s(\sin \tilde{\theta})^2 \cos \tilde{\varphi}\right\} + \\ &+ \hat{\varphi}2m\tilde{r}\dot{\tilde{\theta}}\left\{-\omega_c \cos \tilde{\theta} + \omega_s \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi}\right\}\end{aligned}\quad (3.3.25).$$

A força gravitacional junto com a centrífuga é

$$m\vec{g} = \hat{r}mg \cos \tilde{\theta} - \hat{\theta}mg \sin \tilde{\theta} \quad (3.3.26).$$

Do exercício 2B) temos a expressão da aceleração na base $\{\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi}\}$:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \hat{r}\left\{\ddot{\tilde{r}} - \tilde{r}(\dot{\tilde{\theta}})^2 - \tilde{r}(\sin \tilde{\theta})^2(\dot{\tilde{\varphi}})^2\right\} + \\ &+ \hat{\theta}\left\{\ddot{\tilde{r}}\tilde{\theta} + 2\dot{\tilde{r}}\dot{\tilde{\theta}} - \tilde{r}\sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta}(\dot{\tilde{\varphi}})^2\right\} + \\ &+ \hat{\varphi}\left\{\ddot{\tilde{r}}\tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} \dot{\tilde{\varphi}} + 2\sin \tilde{\theta}\dot{\tilde{r}}\dot{\tilde{\varphi}} + 2\tilde{r}\cos \tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}}\dot{\tilde{\varphi}}\right\}\end{aligned}\quad (3.3.27)$$

No caso do pêndulo podemos ignorar todos os termos que envolvem derivadas de \tilde{r} . Estamos prontos para escrever a segunda lei de Newton, que fornece três equações:

$$\begin{aligned}\ddot{\tilde{r}}\tilde{\theta} - \tilde{r}\sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta}(\dot{\tilde{\varphi}})^2 &= \\ &= -g \sin \tilde{\theta} + 2\tilde{r}\dot{\tilde{\varphi}}\left\{\omega_c \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta} - \omega_s(\sin \tilde{\theta})^2 \cos \tilde{\varphi}\right\}\end{aligned}\quad (3.3.28)$$

$$\tilde{r}\sin \tilde{\theta}\ddot{\tilde{\varphi}} + 2\tilde{r}\cos \tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}}\dot{\tilde{\varphi}} = 2\tilde{r}\dot{\tilde{\theta}}\left\{-\omega_c \cos \tilde{\theta} + \omega_s \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi}\right\} \quad (3.3.29),$$

onde já eliminamos a massa. A terceira equação, que envolve $\ddot{\tilde{r}}$, não foi escrita. Nela aparece a força que o fio de suspensão exerce sobre a massa e esta força toma conta do $\ddot{\tilde{r}} = 0$. Esta equação não tem interesse para a determinação do movimento da massa, mas ela pode ser interessante para calcular a força que o fio de suspensão tem que agüentar.

Seguir em frente com as equações (3.3.28) e (3.3.29) seria extremamente difícil. Mas, podemos simplificar estas equações com uma aproximação, que se aplica bem na maioria das experiências de pêndulo de Foucault. Vamos supor que a amplitude de oscilação seja pequena de tal forma que $|\tilde{\theta}| \ll 1$ e que termos quadráticos em $\tilde{\theta}$ possam ser desprezados.

$$\ddot{\tilde{\theta}} - \tilde{\theta}(\dot{\tilde{\phi}})^2 = -\frac{g}{\tilde{r}}\tilde{\theta} + 2\dot{\tilde{\phi}}\omega_c\tilde{\theta} \quad (3.3.30)$$

$$\tilde{\theta}\ddot{\tilde{\phi}} + 2\dot{\tilde{\theta}}\dot{\tilde{\phi}} = -\omega_c 2\dot{\tilde{\theta}} \quad (3.3.31)$$

Na equação (3.3.31) não aparece $\tilde{\phi}$. Então é vantajoso usar a derivada primeira como uma nova incógnita. De fato, podemos logo incluir o ω_c nesta incógnita:

$$\eta \stackrel{def.}{=} \dot{\tilde{\phi}} + \omega_c \quad (3.3.32)$$

Com esta variável a equação (3.3.31) toma a forma simples

$$\tilde{\theta}\dot{\eta} + 2\dot{\tilde{\theta}}\eta = 0 \quad (3.3.33)$$

Podemos separa variáveis e obtemos

$$\frac{\dot{\eta}}{\eta} = -\frac{2\dot{\tilde{\theta}}}{\tilde{\theta}} \quad (3.3.34)$$

Esta equação pode ser integrada:

$$\ln \frac{\eta(t)}{\eta(0)} = -2 \ln \frac{\tilde{\theta}(t)}{\tilde{\theta}(0)} \quad (3.3.35)$$

e resulta uma relação para $\dot{\tilde{\phi}}$

$$\dot{\tilde{\phi}}(t) = -\omega_c + \eta_0 \left[\frac{\tilde{\theta}(0)}{\tilde{\theta}(t)} \right]^2 \quad (3.3.36)$$

onde η_0 é uma constante que depende das condições iniciais e que poderia ser unida com a constante $(\tilde{\theta}(0))^2$. Mas mantivemos estas constantes separadas para expressar claramente que $\dot{\tilde{\phi}}$ é da ordem $\tilde{\theta}^0$. Agora vamos substituir este resultado na (3.3.30)

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\theta}}(t) &= -\frac{g}{\tilde{r}}\tilde{\theta}(t) + \tilde{\theta}(t)\dot{\tilde{\phi}}(t)\{2\omega_c + \dot{\tilde{\phi}}(t)\} = \\ &= -\frac{g}{\tilde{r}}\tilde{\theta}(t) + \tilde{\theta}(t)\left(-\omega_c + \eta_0 \left[\frac{\tilde{\theta}(0)}{\tilde{\theta}(t)} \right]^2\right)\left(+\omega_c + \eta_0 \left[\frac{\tilde{\theta}(0)}{\tilde{\theta}(t)} \right]^2\right) = \\ &= -\frac{(g + \tilde{r}\omega_c^2)}{\tilde{r}}\tilde{\theta}(t) + \eta_0^2 \frac{\tilde{\theta}(0)^4}{\tilde{\theta}(t)^3} \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

Isto significa que o único efeito da força de Coriolis no comportamento da variável $\tilde{\theta}$ pode ser resumido numa substituição da constante g pela constante $g + \tilde{r}\omega_c^2$. Temos $|\omega_c| \leq \omega$ e mesmo com um pêndulo gigante com $r = 67$ m a alteração é muito pequena:

$$|\tilde{r}\omega_c^2| \leq 67 \text{ m} (7,292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1})^2 \approx 3,56 \times 10^{-7} \text{ m s}^{-2} \quad (3.38)$$

Com g na ordem de 10ms^{-2} esta correção é completamente insignificante, outras aproximações que fizemos causam erros maiores. Com esta informação que $\tilde{\theta}$ não sofre praticamente nenhuma alteração pela presença da força de Coriolis voltaremos ao resultado (3.3.36) da velocidade angular $\dot{\tilde{\phi}}$: a fórmula (3.3.36) informa que o único efeito da força de Coriolis é uma adição de um giro uniforme por volta da direção vertical com uma velocidade angular $-\omega\cos\alpha$. Os observadores pacientes notam esta rotação observando os pontos de retorno do pêndulo durante algumas horas. A velocidade angular $-\omega\cos\alpha$ corresponde à projeção ortogonal do vetor $-\vec{\omega}$ na direção vertical do laboratório.