## 3.4 Construção explícita dos mapeamentos $\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t}$ e $M_{\tilde{R}R\,t}$ e tensores

Para desmistificar os mapeamentos $\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t}$ e $M_{\tilde{R}R\,t}$ vamos construí-los explicitamente para um exemplo simples. Vamos imaginar um pêndulo num laboratório. O referencial do laboratório seja $R$ . Na massa do pêndulo vive uma formiginha que considera este bloco de metal o mundo e naturalmente usa este corpo como referencial. No espaço do laboratório vamos escolher o ponto de suspensão do pêndulo como origem. Mas a formiginha considera o centro da massa do pêndulo o ponto mais importante do mundo e escolhe este ponto como origem.

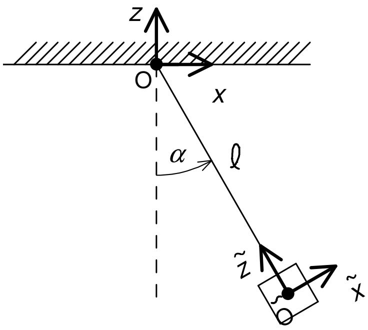


Fig. 3.4.1 Definição de coordenadas no espaço do laboratório e no espaço do pêndulo. Repare que somente a escolha de um instante $t$ permite representar ambos os espaços no mesmo desenho.

Vamos chamar o comprimento do pêndulo de $\ell$ e o ângulo que a haste do pêndulo faz com a direção vertical do laboratório de $\alpha(t)$ . O sentido que tomamos como positivo está indicado na figura com uma seta no arco indicador do ângulo. Em ambos os referenciais se usam coordenadas Cartesianas como indicado na figura.

O ponto no espaço do laboratório que tem as coordenadas $x, y, z$ será escrito como $\mathtt{L}\langle x, y, z\rangle$. O ponto no espaço do pêndulo que tem as coordenadas $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ será escrito como $\mathtt{P}\langle \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\rangle$ .

$$\mathtt{L}\langle x, y, z\rangle \underset{def.}{=} \text{O ponto no espaço do laboratório que tem as coordenadas } x, y, z \tag{3.4.1}$$

$$\mathtt{P}\langle \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\rangle \underset{def.}{=} \text{O ponto no espaço do pêndulo que tem as coordenadas } \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \tag{3.4.2}$$

Com exemplos de pontos escolhidos no laboratório você se convence que vale a seguinte relação:

$$\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t}\left(\mathtt{L}\langle x, y, z\rangle\right) \quad = \quad \mathtt{P}\left\langle x\cos\alpha(t) + z\,\mathrm{sen}\,\alpha(t),\, y,\, \ell - x\,\mathrm{sen}\,\alpha(t) + z\cos\alpha(t)\right\rangle \tag{3.4.3}$$

A próxima meta é determinar o mapeamento $M_{\tilde{R}R\,t}$, que relaciona os vetores. Para poder escrever este mapeamento é conveniente definir os vetores básicos associados aos sistemas de coordenadas. Seja $\delta$ algum comprimento não nulo. As bases ortonormais associadas às coordenadas nos dois espaços são:

$$\hat{x} \;=\; \frac{1}{\delta}\overrightarrow{\mathtt{L}\langle a,b,c\rangle\mathtt{L}\langle a+\delta,b,c\rangle}, \qquad \hat{z} \;=\; \frac{1}{\delta}\overrightarrow{\mathtt{L}\langle a,b,c\rangle\mathtt{L}\langle a,b,c+\delta\rangle} \tag{3.4.4}$$

$$\hat{\tilde{x}} \;=\; \frac{1}{\delta}\overrightarrow{\mathtt{P}\langle a,b,c\rangle\mathtt{P}\langle a+\delta,b,c\rangle}, \qquad \hat{\tilde{z}} \;=\; \frac{1}{\delta}\overrightarrow{\mathtt{L}\langle a,b,c\rangle\mathtt{L}\langle a,b,c+\delta\rangle} \tag{3.4.5}$$

Não escrevemos os vetores $\hat{y}$ e $\hat{\tilde{y}}$ que são inteiramente análogos e que serão menos usados nas considerações seguintes.

Dois comentários são importantes: 1) no caso de coordenadas curvilíneas teríamos um limite $\delta \to 0$ que resultaria numa derivada. No caso de coordenadas Cartesianas este limite não é necessário e o vetor que resulta é independente da escolha do $\delta$ , desde que $\delta \neq 0$ . 2) O ponto escolhido é totalmente irrelevante. $a, b, c$ podem ser quaisquer três valores de distâncias. Os vetores definidos pelas fórmulas (3.4.4) e (3.4.5) não dependem destas distâncias. Isto também seria diferente no caso de coordenadas curvilíneas. Agora podemos determinar $\boldsymbol{M}_{\tilde{R}R\,t}\hat{x}$. Lembramos da definição do mapeamento $\boldsymbol{M}_{\tilde{R}R\,t}$:

$$\boldsymbol{M}_{\tilde{R}R\,t}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \underset{def.}{=} \overrightarrow{\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t}(\mathrm{A})\ \mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t}(\mathrm{B})} \tag{3.4.6}$$

Para poder escrever isto no caso do vetor $\hat{x}$ sem ultrapassar os limites da folha de papel precisamos de umas abreviações:

$$c_t \underset{def.}{=} \cos\alpha(t), \qquad s_t \underset{def.}{=} \operatorname{sen}\alpha(t) \tag{3.4.7}$$

Então temos:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{\tilde{R}R\,t}\hat{x} &= \boldsymbol{M}_{\tilde{R}R\,t}\frac{1}{\delta}\overrightarrow{\mathrm{L}\langle x, y, z\rangle\mathrm{L}\langle x+\delta, y, z\rangle}\\ &= \frac{1}{\delta}\overrightarrow{\mathrm{P}\langle x c_t + z s_t, y, \ell - x s_t + z c_t\rangle\mathrm{P}\langle x c_t + z s_t + \delta c_t, y, \ell - x s_t + z c_t - \delta s_t\rangle}\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

O vetor que resultou pode ser escrito como soma de dois vetores:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{\tilde{R}R\,t}\hat{x} &=\\ &= \frac{1}{\delta}\overrightarrow{\mathrm{P}\langle x c_t + z s_t, y, \ell - x s_t + z c_t\rangle\mathrm{P}\langle x c_t + z s_t + \delta c_t, y, \ell - x s_t + z c_t\rangle}+\\ &+\frac{1}{\delta}\overrightarrow{\mathrm{P}\langle x c_t + z s_t + \delta c_t, y, \ell - x s_t + z c_t\rangle\mathrm{P}\langle x c_t + z s_t + \delta c_t, y, \ell - x s_t + z c_t - \delta s_t\rangle}\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

No primeiro vetor vamos introduzir as seguintes abreviações:

$$a \underset{def.}{=} x c_t + z s_t, \qquad b \underset{def.}{=} \ell - x s_t + z c_t, \qquad \varepsilon \underset{def.}{=} \delta c_t \tag{3.4.10}$$

e no segundo vetor as abreviações:

$$c \underset{def.}{=} x c_t + z s_t + \delta c_t, \qquad \eta \underset{def.}{=} -\delta s_t \tag{3.4.11}$$.

Então o vetor $\boldsymbol{M}_{\tilde{R}R\,t}\hat{x}$ fica na forma

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_{\tilde{R}R\,t}\hat{x} &=\\ &= \frac{\cos\alpha(t)}{\varepsilon}\overrightarrow{\mathrm{P}\langle a, y, b\rangle\mathrm{P}\langle a+\varepsilon, y, b\rangle}+\\ &-\frac{\operatorname{sen}\alpha(t)}{\eta}\overrightarrow{\mathrm{P}\langle c, y, b\rangle\mathrm{P}\langle c, y, b+\eta\rangle}\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

Usando (3.4.5) e que os pontos de partida e os comprimentos de deslocamento são irrelevantes nas definições dos vetores básicos podemos escreve este resultado na forma simples:

$$M_{\tilde{R}R\,t}\hat{x} \;=\; \hat{\hat{x}}\cos\alpha(t)-\hat{\hat{z}}\,\mathrm{sen}\,\alpha(t) \tag{3.4.13}$$

Deixamos como exercício mostrar os seguintes resultados:

$$M_{\tilde{R}R\,t}\hat{y} \;=\; \hat{\hat{y}} \tag{3.4.14}$$

e

$$M_{\tilde{R}R\,t}\hat{z} \;=\; \hat{\hat{x}}\,\mathrm{sen}\,\alpha(t)+\hat{\hat{z}}\cos\alpha(t) \tag{3.4.15}$$

As fórmulas (3.4.13), (3.4.14) e (3.4.15) determinam o mapeamento $M_{\tilde{R}R\,t}$ completamente. Basta saber o que $M_{\tilde{R}R\,t}$ faz com os vetores básicos. O que este mapeamento faz com um vetor qualquer é determinado pela linearidade. Então $M_{\tilde{R}R\,t}$ é determinado. Mas, seria bom poder escrever algo concreto $M_{\tilde{R}R\,t}=........$ e não apenas dizer o que $M_{\tilde{R}R\,t}$ faz. Para conseguir escrever $M_{\tilde{R}R\,t}$ concretamente vamos introduzir novos objetos. Seja $\vec{a}$ um vetor do espaço universal $\mathbb{U}_R$ do referencial $R$. Vamos definir um objeto $\vec{a}\bullet$ que é o vetor $\vec{a}$ junto com o ponto do produto escalar. Este objeto deve ser entendido da seguinte maneira: quando se escreve qualquer vetor $\vec{b}$ dos espaços $\mathbb{U}_R$, $\mathbb{D}_R$, $\mathbb{V}_R$ e.t.c. ao lado direito de $\vec{a}\bullet$ se forma automaticamente um valor unidimensional, que é o produto escalar de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Especialmente quando $\vec{b}\in\mathbb{U}_R$ se forma um número. Este número $\vec{a}\cdot\vec{b}$ depende linearmente do vetor $\vec{b}$. Então o nosso novo objeto $\vec{a}\bullet$ pode ser encarado como um mapeamento linear que mapeia o espaço $\mathbb{U}_R$ nos números reais. O conjunto de todos os mapeamentos lineares que mapeiam um espaço linear real $\mathbb{L}$ nos números reais está naturalmente equipado com a estrutura de um espaço linear e este espaço é chamado o espaço dual de $\mathbb{L}$, e ele é escrito como $\mathbb{L}^*$. Então o nosso $\vec{a}\bullet$ é um elemento do espaço $\mathbb{U}_R^{\;*}$.

Agora vamos definir um produto de elementos de $\mathbb{U}_R^{\;*}$ com elementos do espaço $\mathbb{U}_{\tilde{R}}$. Isto é a primeira vez que consideramos um produto de duas grandezas multidimensionais. Lembramos do produto de duas grandezas. Sejam $U$ e $G$ duas grandezas. Do produto $u\otimes g$ de valores $u$, $g$ das respectivas grandezas $U$ e $G$ exigimos que

$$(\lambda u)\otimes g \;=\; u\otimes(\lambda g) \qquad \text{para todo } \lambda\in\mathbb{R} \tag{3.4.16}$$

$$(u_1+u_2)\otimes g \;=\; u_1\otimes g+u_2\otimes g \tag{3.4.17}$$

$$u\otimes(g_1+g_2) \;=\; u\otimes g_1+u\otimes g_2 \tag{3.4.18}$$

Para poder chamar $U\otimes G$ uma grandeza era necessário definir uma soma de valores. No caso que uma das grandezas é unidimensional mostramos no capítulo 1 que as condições (3.4.16), (3.4.17) e (3.4.18) já determinam a soma de valores do produto e qualquer valor do produto pode ser escrito como um par de valores. Mas, quando ambas as grandezas foram multidimensionais estas condições não são suficientes para determinar a soma. Este é o nosso caso quando queremos definir um produto de vetores do espaço $\mathbb{U}_R^{\ *}$ e vetores do espaço $\mathbb{U}_{\tilde{R}}$.

Sejam $\vec{a}\bullet \in \mathbb{U}_R^{\ *}$ e $\vec{\tilde{c}} \in \mathbb{U}_{\tilde{R}}$ dados. Podemos formar o par $\vec{\tilde{c}} \otimes \vec{a}\bullet$ e podemos exigir que estes objetos obedeçam as regras (3.4.16), (3.4.17) e (3.4.18). Mas como podemos definir a soma de tais objetos? Esta soma tem uma definição natural se dermos uma interpretação concreta aos objetos $\vec{\tilde{c}} \otimes \vec{a}\bullet$ . Esta interpretação resulta do uso destes objetos definidos pelas seguintes regras: quando se coloca o objeto $\vec{\tilde{c}} \otimes \vec{a}\bullet$ ao lado esquerdo de um vetor $\vec{b}$ de um dos espaços $\mathbb{U}_R$, $\mathbb{D}_R$, $\mathbb{V}_R$ e.t.c. deve-se executar o produto escalar e multiplicar o vetor $\vec{\tilde{c}}$ som o valor unidimensional $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

$$\vec{\tilde{c}} \otimes \vec{a}\bullet \ \vec{b} \underset{def.}{=} \vec{\tilde{c}} \otimes \left( \vec{a} \cdot \vec{b} \right) \tag{3.4.19}$$

É costume de omitir o sinal "$\otimes$" em produtos entre um vetor e um valor unidimensional. Então podemos escrever

$$\vec{\tilde{c}} \otimes \vec{a}\bullet \ \vec{b} = \vec{\tilde{c}} \left( \vec{a} \cdot \vec{b} \right) \tag{3.4.20}$$

O resultado é um vetor que depende linearmente do vetor $\vec{b}$ . Então construímos um mapeamento linear. Mas para mapeamentos lineares a soma é bem definida. Então a interpretação do objeto $\vec{\tilde{c}} \otimes \vec{a}\bullet$ como mapeamento linear oferece uma definição de soma natural. A soma de dois deste objetos $\vec{\tilde{c}} \otimes \vec{a}\bullet$ e $\vec{\tilde{d}} \otimes \vec{c}\bullet$ é dada pelo mapeamento linear

$$\left\{ \vec{\tilde{c}} \otimes \vec{a}\bullet + \vec{\tilde{d}} \otimes \vec{c}\bullet \right\} \vec{b} \underset{def.}{=} \vec{\tilde{c}} \left( \vec{a} \cdot \vec{b} \right) + \vec{\tilde{d}} \left( \vec{c} \cdot \vec{b} \right) \tag{3.4.21}$$

O produto que acabamos de conhecer é chamado de produto tensorial.

Agora estamos prontos para escrever o mapeamento $M_{\tilde{R}R\,t}$:

$$M_{\tilde{R}R\,t} = \left\{ \hat{\tilde{x}} \cos\alpha(t) - \hat{\tilde{z}} \operatorname{sen}\alpha(t) \right\} \otimes \hat{x}\bullet + \hat{\tilde{y}} \otimes \hat{y}\bullet + \left\{ \hat{\tilde{x}} \operatorname{sen}\alpha(t) + \hat{\tilde{z}} \cos\alpha(t) \right\} \otimes \hat{z}\bullet \tag{3.4.22}$$

Colocando os vetores $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ ao lado direito do objeto escrito na fórmula (3.4.22) resultam corretamente as três fórmulas (3.4.13), (3.4.14) e (3.4.15). Podemos também usar os tensores para escrever o inverso do mapeamento $M_{\tilde{R}R\,t}$.

$$M_{\tilde{R}R\,t}^{\ -1} = \hat{x} \otimes \left\{ \cos\alpha(t)\, \hat{\tilde{x}}\bullet - \operatorname{sen}\alpha(t)\, \hat{\tilde{z}}\bullet \right\} + \hat{y} \otimes \hat{\tilde{y}} + \hat{z} \otimes \left\{ \operatorname{sen}\alpha(t)\, \hat{\tilde{x}}\bullet + \cos\alpha(t)\, \hat{\tilde{z}}\bullet \right\} \tag{3.4.23}$$

É um excelente exercício mostrar que $M_{\tilde{R}R\,t} M_{\tilde{R}R\,t}^{\ -1} = \mathbf{1}$. Aqui vamos calcular algo mais geral, a saber $M_{\tilde{R}R\,t} M_{\tilde{R}R\,t_1}^{\ -1}$. Novamente vamos usar abreviações para reduzir o tamanho das fórmulas:

$$c \underset{def.}{=} \cos\alpha(t), \quad s \underset{def.}{=} \operatorname{sen}\alpha(t), \quad c_1 \underset{def.}{=} \cos\alpha(t_1), \quad s_1 \underset{def.}{=} \operatorname{sen}\alpha(t_1) \tag{3.4.24}$$

$$M_{\tilde{R}R\,t} M_{\tilde{R}R\,t_1}{}^{-1} \;=\; \hat{\tilde{x}}\, cc_1 \otimes \hat{\tilde{x}}\bullet \;-\; \hat{\tilde{x}}\, cs_1 \otimes \hat{\tilde{z}}\bullet \;-\; \hat{\tilde{z}}\, sc_1 \hat{\tilde{x}}\bullet \;+\; \hat{\tilde{z}}\, ss_1 \hat{\tilde{z}}\bullet \;+ \\ +\; \hat{\tilde{x}}\, ss_1 \otimes \hat{\tilde{x}}\bullet \;+\; \hat{\tilde{x}}\, sc_1 \otimes \hat{\tilde{z}}\bullet \;+\; \hat{\tilde{z}}\, cs_1 \hat{\tilde{x}}\bullet \;+\; \hat{\tilde{z}}\, cc_1 \hat{\tilde{z}}\bullet \tag{3.4.25}$$

Calculando a derivada em relação ao $t_1$ e escolhendo depois $t_1 = t$ obtemos a velocidade angular:

$$\Omega \;=\; \frac{d\alpha}{dt}\left\{\hat{\tilde{z}} \otimes \hat{\tilde{x}}\bullet \;-\; \hat{\tilde{x}} \otimes \hat{\tilde{z}}\bullet\right\} \tag{3.4.26}$$

Com o produto vetorial podemos escrever este mapeamento como

$$\Omega \;=\; -\frac{d\alpha}{dt}\,\hat{\tilde{y}}\times \tag{3.4.27}$$

Vamos ainda escrever os vetores $\vec{\tilde{R}}(t)$ e $\vec{R}(t)$ (compare (3.1.6)).

$$\vec{\tilde{R}}(t) \;=\; -\ell\,\hat{\tilde{z}} \tag{3.4.28}$$

$$\vec{R}(t) \;=\; M_{\tilde{R}R\,t}{}^{-1}\,\vec{\tilde{R}}(t) \;= \\ =\; -\ell\left\{-\hat{\tilde{x}}\,\mathrm{sen}\,\alpha(t) + \hat{\tilde{z}}\cos\alpha(t)\right\} \tag{3.4.29}$$

Por fim vamos ver como a fórmula da trajetória e lei horária de um disquinho numa mesa sem atrito num carrossel (fórmula (3.3.14)) pode ser obtido. O ponto no espaço do carrossel que tem as coordenadas $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ será escrito como $\mathtt{C}\langle \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}\rangle$. Então podemos copiar a fórmula (3.4.3) com pequenas adaptações: trocar $y$ e $z$, botar $\ell = 0$ e botar $\alpha(t) = \omega t$:

$$\mathrm{M}_{\tilde{R}R\,t}\left(\mathtt{L}\langle x, y, z\rangle\right) \;=\; \mathtt{C}\langle x\cos\omega t + y\,\mathrm{sen}\,\omega t, -x\,\mathrm{sen}\,\omega t + y\cos\omega t, z\rangle \tag{3.4.30}$$

Substituindo $x(t)$ e $y(t)$ das fórmulas (3.3.13) nesta fórmula obtemos a lei horária (3.3.14).