3.5 Transformações entre referenciais inerciais

Em referenciais inerciais não existem as forças inerciais. Consequentemente, se ambos os referencias R e $\tilde{R}$ foram inerciais todos os termos $-m_k M_{\tilde{R}R\,t}\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2}$, $-m_k 2\,\Omega\tilde{\vec{v}}$, $-m_k\dfrac{d\Omega}{dt}\tilde{\vec{r}}$ e $-m_k\Omega\Omega\tilde{\vec{r}}$ devem ser nulos. Então a origem $\tilde{O}$ do referencial $\tilde{R}$ deve se mover no espaço do referencial de R como uma partícula livre sem aceleração. Também a velocidade angular Ω deve ser zero em todos os instantes. Lembramos que

$$\Omega = \left.\frac{\partial\left(M_{\tilde{R}R\,t}M_{\tilde{R}R\,t_1}{}^{-1}\right)}{\partial t_1}\right|_{t_1=t} \tag{3.5.1}$$

Uma derivada é uma aproximação linear da variação dos valores de uma função numa pequena vizinhança de um ponto. Então vale

$$M_{\tilde{R}R\,t}M_{\tilde{R}R\,t+\varepsilon}{}^{-1} = \mathbf{1} + \varepsilon\Omega(t) + E_\varepsilon(t) \tag{3.5.2}$$

onde $E_\varepsilon(t)$ é um erro de ordem superior em ε. Ser de ordem superior em ε significa

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{E_\varepsilon(t)}{\varepsilon} = 0 \tag{3.5.3}$$

e isto quer dizer que o supremo da norma dos vetores $\varepsilon^{-1}E_\varepsilon(t)\vec{u}$ com $|\vec{u}|=1$ tem limete zero:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{|\vec{u}|=1}\left|\frac{E_\varepsilon(t)}{\varepsilon}\vec{u}\right| = 0 \tag{3.5.4}$$

Agora vamos considerar dois instante distintos t e $t+\tau$, com $\tau>0$. Vamos dividir o intervalo de tempo $[t,t+\tau]$ em n intervalos do mesmo tamanho e escrever $M_{\tilde{R}R\,t}M_{\tilde{R}R\,t+\tau}{}^{-1}$ como um imenso produto:

$$M_{\tilde{R}R\,t}M_{\tilde{R}R\,t+\tau}{}^{-1} = M_{\tilde{R}R\,t}M_{\tilde{R}R\,t+\tau/n}{}^{-1}M_{\tilde{R}R\,t+\tau/n}M_{\tilde{R}R\,t+2\tau/n}{}^{-1}M_{\tilde{R}R\,t+2\tau/n}\cdots M_{\tilde{R}R\,t+\frac{(n-1)\tau}{n}}{}^{-1}M_{\tilde{R}R\,t+\frac{(n-1)\tau}{n}}M_{\tilde{R}R\,t+\tau}{}^{-1} \tag{3.5.5}$$

Considerando $\varepsilon=\dfrac{\tau}{n}$ podemos escrever esta expressão como um produto de n fatores da forma $\mathbf{1}+\varepsilon\Omega(t+k\varepsilon)+E_\varepsilon(t+k\varepsilon)$:

$$M_{\tilde{R}R\,t}M_{\tilde{R}R\,t+\tau}{}^{-1} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathbf{1}+\varepsilon\Omega(t+k\varepsilon)+E_\varepsilon(t+k\varepsilon)\right) \tag{3.5.6}$$

Neste produto os fatores estão ordenados da esquerda para a direita em ordem temporal crescente. No caso de uma transformação entre referenciais inerciais todas as velocidades angulares são zero e temos

$$M_{\tilde{R}Rt} M_{\tilde{R}Rt+\tau}{}^{-1} \quad = \quad \prod_{k=0}^{n-1} \left(\mathbf{1} + E_\varepsilon \left(t + k\varepsilon \right) \right) \quad =$$

$$= \quad \mathbf{1} + \sum_{k=0}^{n-1} E_\varepsilon \left(t + k\varepsilon \right) + \sum_{l=0}^{n-2} \sum_{k=l+1}^{n-1} E_\varepsilon \left(t + l\varepsilon \right) E_\varepsilon \left(t + k\varepsilon \right) + \ldots + E_\varepsilon \left(t \right) E_\varepsilon \left(t + \varepsilon \right) \ldots . E_\varepsilon \left(t + 2\varepsilon \right) E_\varepsilon \left(t + (n-1)\varepsilon \right)$$

(3.5.7)

Queremos mostrar que a soma de todos os termos de erro tendem a zero no limite $n \to \infty$.

O supremo $\sup_{|\vec{u}|=1} \left| E_\varepsilon \left(t \right) \vec{u} \right|$ deve ser uma função contínua de t e deve atingir um máximo no intervalo fechado $\left[t, t + \tau \right]$. Vamos chamar este máximo de e_ε :

$$\mathrm{e}_\varepsilon \underset{def.}{=} \max_{t' \in [t, t+\tau]} \sup_{|\vec{u}|=1} \left| E_\varepsilon \left(t' \right) \vec{u} \right| \qquad (3.5.8)$$

e temos

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathrm{e}_\varepsilon}{\varepsilon} \quad = \quad 0 \qquad (3.5.9).$$

Se aplicarmos a soma dos erros de fórmula (3.5.7) num vetor normalizado $\vec{u}$ obtemos com a desigualdade de triangulo:

$$\left| \left\{ \sum_{k=1}^{n} E_\varepsilon \left(t + k\varepsilon \right) + \sum_{l=0}^{n-2} \sum_{k=l+1}^{n-1} E_\varepsilon \left(t + l\varepsilon \right) E_\varepsilon \left(t + k\varepsilon \right) + \ldots + E_\varepsilon \left(t \right) E_\varepsilon \left(t + \varepsilon \right) \ldots . E_\varepsilon \left(t + 2\varepsilon \right) E_\varepsilon \left(t + (n-1)\varepsilon \right) \right\} \vec{u} \right|$$

$$\leq \quad n \mathrm{e}_\varepsilon + n \left(n - 1 \right) \mathrm{e}_\varepsilon{}^2 + \frac{n!}{3! \left(n - 3 \right)!} \mathrm{e}_\varepsilon{}^3 + \ldots\ldots.. + \mathrm{e}_\varepsilon{}^n \quad = \quad \left(1 + \mathrm{e}_\varepsilon \right)^n - 1$$

(3.5.10)

Como no nosso caso $\varepsilon = \tau n^{-1}$, vamos definir uma seqüência

$$a_n \underset{def.}{=} n \mathrm{e}_{\tau n^{-1}} \qquad (3.5.11).$$

A fórmula (3.5.9) significa

$$\lim_{n \to \infty} a_n \quad = \quad 0 \qquad (3.5.12).$$

Para qualquer $k \in \mathbb{N}$ fixo temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \left\{ \left(1 + \mathrm{e}_\varepsilon \right)^n - 1 \right\} \quad &= \quad \lim_{n \to \infty} \left\{ \left(1 + \frac{a_n}{n} \right)^n - 1 \right\} \quad \leq \\ \leq \quad \lim_{n \to \infty} \left\{ \left(1 + \frac{a_k}{n} \right)^n - 1 \right\} \quad &= \quad \exp\left\{ a_k \right\} - 1 \end{aligned} \qquad (3.5.13).$$

Tomando o limite $k \to \infty$ segue com (3.5.12) que

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \left(1 + \mathrm{e}_\varepsilon \right)^n - 1 \right\} \quad = \quad 0 \qquad (3.5.14)$$

Então a desigualdade (3.5.10) implica que o limite da soma dos erros é zero. Mas, como o lado esquerdo da (3.5.7) e o termo $\mathbf{1}$ não dependem de n concluímos que a soma dos erros é de fato zero mesmo para qualquer n finito. Então mostramos que

$$M_{\tilde{R}Rt} M_{\tilde{R}Rt+\tau}{}^{-1} \quad = \quad \mathbf{1} \tag{3.5.15}$$

Multiplicando com $M_{\tilde{R}Rt+\tau}$ obtemos

$$M_{\tilde{R}Rt} \quad = \quad M_{\tilde{R}Rt+\tau} \tag{3.5.16}$$

Isto significa que, no caso de transformações entre referenciais inerciais, o mapeamento de vetores $M_{\tilde{R}Rt}$ não depende do tempo.

Este resultado importante permite identificar os espaços vetoriais de todos os referenciais inerciais. Dentro de um referencial R, os vetores de deslocamento eram definidos como classes de equivalência de pares de pontos $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$ do espaço $\mathscr{E}_R$ do referencial R, onde a relação de equivalência era definida com um transporte paralelo. Esta relação de equivalência era definida no conjunto $\mathscr{E}_R \times \mathscr{E}_R$. Agora podemos redefinir os vetores de translação de tal forma que todos os referenciais inerciais usem o mesmo espaço vetorial $\mathbb{D}$. No lugar do conjunto $\mathscr{E}_R \times \mathscr{E}_R$ vamos usar o conjunto

$$\bigcup_{R \text{ ref.inercial}} \left(\mathscr{E}_R \times \mathscr{E}_R \right) \tag{3.5.17}$$

Para dois pares $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$, $\langle \mathrm{C}, \mathrm{D} \rangle$ de pontos do mesmo espaço $\mathscr{E}_R$ a equivalência é definida como anteriormente com o transporte paralelo. Para dois pares $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle$, $\langle \mathrm{C}, \mathrm{D} \rangle$ de espaços distintos, isto é $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle \in \mathscr{E}_R \times \mathscr{E}_R$ e $\langle \mathrm{C}, \mathrm{D} \rangle \in \mathscr{E}_{\tilde{R}} \times \mathscr{E}_{\tilde{R}}$ vamos definir que

$$\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle \sim \langle \mathrm{C}, \mathrm{D} \rangle \quad \underset{def.}{\Leftrightarrow} \quad \overrightarrow{\mathrm{CD}} = M_{\tilde{R}Rt} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \tag{3.5.18}$$

O resultado (3.5.16) garante que esta condição não depende do instante t que aparece no lado direito da seta dupla. Os vetores são novamente as classes de equivalência. Estes vetores são definidos para todos os referenciais inerciais e os mapeamentos $M_{\tilde{R}Rt}$ entre dois espaços de referenciais inerciais se reduziram simplesmente ao mapeamento identidade. Repare no entanto, que os mapeamentos de pontos $\mathrm{M}_{\tilde{R}Rt}$ continuam não triviais e inclusive continuam dependentes do tempo! Com isto as formulas de transformação de velocidade de aceleração para referenciais inerciais ficam da seguinte forma:

$$\vec{v}(t) \quad = \quad \frac{d\vec{R}(t)}{dt} + \tilde{\vec{v}}(t) \tag{3.5.19}$$

e

$$\vec{a}(t) \quad = \quad \tilde{\vec{a}}(t) \tag{3.5.20}$$